



Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

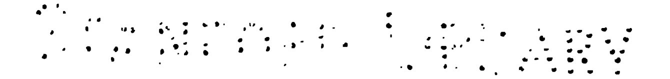
und

Dr. M. Cantor.



Fünfter Jahrgang.

Mit 7 lithographirten Tafeln und Holzschnitten.



LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1860.

Inhalt.

Arithmetik und Analysis.

Theoretische und praktische Geometrie.

Mechanik.

Akustik.

Optik.

Wärmelehre und Molecularphysik.

Elektricität und Magnetismus.

I.

Von den Fusspunktlinien.

Von Dr. Franz Wetzig in Leipzig.

(Zweiter Artikel.)

III. Beziehungen zwischen den Flächeninhalten von Fusspunktlinien derselben Basis von verschiedenen Polen aus.

7.

Steiner hat in der Abhandlung: „Vom Krümmungsschwerpunkt ebener Curven“ (Crelle's Journal, Bd. 21) folgenden merkwürdigen Satz auf geometrischem Wege bewiesen:

„Unter allen Fusspunktlinien einer gegebenen geschlossenen und überall convexen Curve hat diejenige den kleinsten Inhalt, welche dem Krümmungsschwerpunkt entspricht. (Krümmungsschwerpunkt ist der Schwerpunkt einer Curve, deren Belastung umgekehrt proportional dem Krümmungshalbmesser vertheilt ist.) Der Inhalt der Fusspunktlinie für einen beliebigen Pol ist gleich diesem Minimalinhalt, vermehrt um die halbe Kreisfläche, welche den Abstand dieses Pols vom Krümmungsschwerpunkt zum Halbmesser hat. Sind n geschlossene und überall convexe Curven gegeben, so ist der Schwerpunkt ihrer Krümmungsschwerpunkte Minimumpol, und wird die Summe der Inhalte in Bezug auf einen anderen Pol um die $n$fache halbe Kreisfläche übertroffen, welche den Abstand beider Pole zum Halbmesser hat. Der Ort des Pols für constanten Flächeninhalt ist also ein Kreis, dessen Mittelpunkt der Minimumpol ist.“ Raabe hat (Crelle's Journal, Bd. 50) analytisch gezeigt, dass für eine nicht geschlossene Curve der Ort des Pols für constanten Flächeninhalt eine Ellipse ist.

Um diesen Sätzen eine allgemeine Ausdehnung auf beliebige Curven zu geben, ist nöthig, das Vorzeichen des Krümmungshalbmessers auf eine von der Lage des Pols und überhaupt des Coordinatensystems unabhängige Weise zu bestimmen.

Lässt man eine Gerade an einer Curve sich berührend fortbewegen, welche Bewegung man als eine Drehung mit stetiger Veränderung des Drehpunktes ansehen kann, so ist die Richtung dieser Drehung stets dieselbe, so lange die Curve keinen Wendepunkt hat; geht aber die Krümmung der Curve durch einen Wendepunkt in die entgegengesetzte über, so wird auch die Drehungsrichtung der Berührenden die entgegengesetzte. Der Krümmungshalbmesser soll daher positiv oder negativ genommen werden, je nachdem die Drehung der Berührenden in positiver oder negativer Richtung erfolgt. Da hiernach das Vorzeichen der Krümmung eines Curvenstückes AB davon abhängt, ob man die Berührende ihren Weg von A nach B oder von B nach A machen lässt, so soll stets der Punkt als Anfangspunkt genommen werden, für den die Gesammtdrehung der Berührenden bei ihrer Fortbewegung bis zum Endpunkte eine positive ist.

Die Drehung des Vectors der Fusspunktlinie stimmt nun nach Grösse und Richtung mit der der Berührenden der Basis überein, da er auf dieser senkrecht steht. Mithin bewegt sich der Vector der Fusspunktlinie immer parallel dem Krümmungshalbmesser der Basis, und ist daher das Winkeldifferential $d\varphi_1$ der Fusspunktlinie gleich dem Contingenzwinkel der Basis $\frac{ds_0}{\varrho_0}$. Da nun hier ds_0 stets positiv zu nehmen ist, so gilt auch dem Vorzeichen nach die Gleichung

$$d\varphi_1 = \frac{ds_0}{\varrho_0}.$$

Dieselbe folgt auch direct aus Gleichung 1) des §. 5, wenn man statt $d\varphi_0$ einführt $ds_0 = \frac{r_0 d\varphi_0}{\sin\alpha}$, und die andere Vorzeichenbestimmung von ϱ_0 und ds_0 berücksichtigt.

8.

Vom Minimumpol einer Linie.

Es wird zunächst als Basis eine Linie vorausgesetzt, die ihre Richtung nicht sprungweise ändert, also keine Ecken hat.

Sei $df_0 = \frac{1}{2} r_0^2 d\varphi_0$ ein Flächenelement der Basis vom Pol O aus, $df_0' = \frac{1}{2} r_0'^2 d\varphi_0'$ das über demselben Bogenelement ds_0 stehende Flächenelement vom Pol O' aus, wo r_0' und φ_0' Vector und Anomalie der Basis vom Pol O' aus bezeichnen, so verhalten sich beide Flächenelemente zu einander wie ihre Höhen, also wie ihre senkrechten Abstände von der Berührenden der Basis, d. i. wie die Vectoren r_1 und r_1' der Fusspunktlinien der Basis von den Polen O und O' aus, also

$$df_0 : df_0' = r_1 : r_1'.$$

Seien df_1 und df_1' die zugehörigen Flächenelemente der Fusspunktlinien von O und O' aus, so ist

$$df_1 = \tfrac{1}{2} r_1^2 \, d\varphi_1,$$
$$df_1' = \tfrac{1}{2} r_1'^2 \, d\varphi_1,$$

woraus folgt

$$\left(\frac{df_0}{df_0'}\right)^2 = \frac{df_1}{df_1'};$$

Es ist also das Quadrat des Verhältnisses zweier zu demselben Bogenelement gehöriger Flächendifferentiale der Basis aus zwei verschiedenen Polen gleich dem einfachen Verhältniss der zugehörigen Flächendifferentiale der beiden Fusspunktlinien.

Der Flächeninhalt der Fusspunktlinien erhält positiven oder negativen Zuwachs, je nachdem die Berührende der Basis sich in positiver oder negativer Richtung dreht.

Seien nun x und y die rechtwinkligen Coordinaten des Poles O' in Bezug auf O, so ist

$$r_1' = r_1 - x \cos\varphi_1 - y \sin\varphi_1,$$

daher

$$2 df_1' = (r_1 - x \cos\varphi_1 - y \sin\varphi_1)^2 \, d\varphi_1.$$

Entspreche dem Anfangspunkte der Basis $\varphi_1 = \gamma$ und dem Endpunkte $\varphi_1 = \delta$, wo, wie schon gesagt, als Anfangspunkt der Punkt zu nehmen ist, für welchen die Gesammtdrehung der Berührenden eine positive ist, so erhält man durch Integration von $\varphi_1 = \gamma$ bis $\varphi_1 = \delta$ die Summe f_1' der vom Vector r_1' überstrichenen Flächenelemente. Es sei ferner f_1 die Summe der vom parallelen Vector r_1 überstrichenen Flächenelemente, also der Flächeninhalt der Fusspunktlinie vom Pol O aus. Es sind nun folgende Fälle zu unterscheiden:

1) Die Basis hat keinen Wendepunkt und lässt sich keine Berührende vom Pol O an sie legen. Wenn man die Integration

$$2\int_\gamma^\delta df_1' = \int_\gamma^\delta (r_1 - x \cos\varphi_1 - y \sin\varphi_1)^2 \, d\varphi_1$$

ausführt, so erhält man die Gleichung

$$1)\left\{\begin{aligned} 2f_1' = 2f_1 &- 2x\int_\gamma^\delta r_1 \cos\varphi_1 \, d\varphi - 2y\int_\gamma^\delta r_1 \sin\varphi_1 \, d\varphi_1 \\ &+ \frac{x^2}{2}\left(\delta - \gamma + \frac{\sin 2\delta - \sin 2\gamma}{2}\right) - \frac{xy}{2}(\cos 2\delta - \cos 2\gamma) \\ &+ \frac{y^2}{2}\left(\delta - \gamma - \frac{\sin 2\delta - \sin 2\gamma}{2}\right). \end{aligned}\right.$$

Die Differenz $\delta - \gamma$ ist dasselbe als die Grösse der Drehung der Berührenden bei ihrer Fortbewegung vom Anfangs- bis zum Endpunkte der Basis.

2) Die Basis hat einen Wendepunkt, es lässt sich keine Berührende vom Pol O an sie legen. Entspreche dann dem Wendepunkte $\varphi_1 = \alpha$, so

kehrt von diesem Punkte an, welcher eine Spitze der Fusspunktlinie ist, ihr Vector in entgegengesetzter Richtung zurück. Daher hat man, je nachdem die Anfangsdrehung der Berührenden der Basis negativ oder positiv ist,

$$2f_1' = -\int_\alpha^\gamma r_1'^2 d\varphi_1 + \int_\alpha^\delta r_1'^2 d\varphi_1 = \int_\gamma^\alpha r_1'^2 d\varphi_1 + \int_\alpha^\delta r_1'^2 d\varphi_1,$$

oder

$$2f_1' = -\int_\gamma^\alpha r_1'^2 d\varphi_1 - \int_\delta^\alpha r_1'^2 d\varphi_1 = \int_\gamma^\alpha r_1'^2 d\varphi_1 + \int_\alpha^\delta r_1'^2 d\varphi_1.$$

Daraus folgt, dass durch Ausführung der Integration man eine Gleichung erhält, die sich von 1) nur dadurch unterscheidet, dass an die Stelle von

$$\int_\gamma^\delta r_1 \frac{\cos\varphi_1}{\sin\varphi_1} d\varphi_1 \text{ tritt } \int_\gamma^\alpha r_1 \frac{\cos\varphi_1}{\sin\varphi_1} d\varphi_1 + \int_\alpha^\delta r_1 \frac{\cos\varphi_1}{\sin\varphi_1} d\varphi_1.$$

3) Die Basis hat keinen Wendepunkt; es lässt sich vom Pol O eine Berührende an sie legen. Entspreche dann dem Berührungspunkte $\varphi_1 = \beta$, so hat man, weil die Fusspunktlinie durch den Pol O geht und in diesem senkrecht auf der Berührenden der Basis steht,

$$2f_1' = \int_\gamma^\beta r_1'^2 d\varphi_1 + \int_{\beta+\pi}^{2\pi+\delta} r_1'^2 d\varphi_1.$$

Führt man die Integration aus, so ist wie oben $\int_\gamma^\beta r_1^2 d\varphi_1 + \int_{\pi+\beta}^{2\pi+\delta} r_1^2 d\varphi_1$ der doppelte Flächeninhalt $2f_1$ der Fusspunktlinie von O aus. An die Stelle von

$$\int_\gamma^\delta r_1 \frac{\cos\varphi_1}{\sin\varphi_1} d\varphi_1 \text{ tritt } \int_\gamma^\beta r_1 \frac{\cos\varphi_1}{\sin\varphi_1} d\varphi_1 + \int_{\pi+\beta}^{2\pi+\delta} r_1 \frac{\cos\varphi_1}{\sin\varphi_1} d\varphi_1;$$

an die Stelle von $\delta - \gamma$ tritt

$$\beta - \gamma + (2\pi + \delta) - (\beta + \pi) = \pi + \delta - \gamma,$$

was wieder die Grösse der Drehung der Berührenden der Basis ist, und statt $\sin 2\delta - \sin 2\gamma$ kommt

$$\sin 2\beta - \sin 2\gamma - \sin(4\pi + 2\delta) - \sin(2\beta + 2\pi) = \sin 2\delta - \sin 2\gamma;$$

es bleibt also diese Differenz ebenso wie $\cos 2\delta - \cos 2\gamma$ ungeändert.

4) Hat die Basis einen Wendepunkt und lässt sich vom Pol O aus eine Berührende an sie legen, so gilt das für den zweiten und dritten Fall Gesagte.

Die Gleichung 1) ist daher allgemein giltig, wenn man unter $\delta - \gamma$ die Grösse der Drehung der Berührenden der Basis bei ihrer Fortbeweg-

ung vom Anfangs- bis zum Endpunkte versteht, und man die Integrale $\int_\gamma^\delta r_1 \frac{\cos \varphi_1}{\sin \varphi_1} d\varphi_1$ auf die angegebene Weise bildet. Unter dieser Voraussetzung sei

$$\int_\gamma^\delta r_1 \cos \varphi_1 \, d\varphi_1 = P, \quad \int_\gamma^\delta r_1 \sin \varphi_1 \, d\varphi_1 = Q,$$

wo daher P und Q Functionen von γ und δ sind. Ferner sei der Drehungswinkel der Berührenden $= \tau$, so ist zu setzen

$$\frac{\sin 2\delta - \sin 2\gamma}{2} = \sin \tau \, . \, \cos(\tau + 2\gamma)$$

$$\frac{\cos 2\delta - \cos 2\gamma}{2} = - \sin \tau \, . \, \sin(\tau + 2\gamma).$$

Führt man diese Grössen in die Gleichung 1) ein, so erhält man:

$$2) \left\{ \begin{aligned} 2f_1' = 2f_1 - 2xP - 2yQ + \frac{x^2}{2}[\tau + \sin \tau \cos(\tau + 2\gamma)] \\ + \frac{y^2}{2}[\tau - \sin \tau \cos(\tau + 2\gamma)] + xy \sin \tau \sin(\tau + 2\gamma); \end{aligned} \right.$$

wo der Anfangswerth γ so zu nehmen ist, dass τ positiv ausfällt.

Setzt man $\gamma = 0$, d. h. nimmt man die Senkrechte auf die Berührende des Anfangspunktes als Nulllinie, so wird

$$3) \quad \left\{ \begin{aligned} 4(f_1' - f_1) = -4Px - 4Qy + x^2(\tau + \sin \tau \cos \tau) \\ + y^2(\tau - \sin \tau \cos \tau) + 2xy \sin^2 \tau. \end{aligned} \right.$$

Es sind nun die beiden Fälle $\tau > 0$ und $\tau = 0$ zu unterscheiden. Sei

$$\tau > 0.$$

Um dann die Gleichung 3) auf ihre einfachste Gestalt zu bringen, drehe man die Nulllinie um $\frac{\tau}{2}$, wo sie dann senkrecht auf der Halbirungslinie des von den Berührenden des Anfangs- und Endpunktes der Basis eingeschlossenen Winkels τ steht, und verschiebe dann das Coordinatensystem parallel um die Grössen

$$g = 2 \frac{P \cos \frac{\tau}{2} + Q \sin \frac{\tau}{2}}{\tau + \sin \tau},$$

$$h = 2 \frac{Q \cos \frac{\tau}{2} - P \sin \frac{\tau}{2}}{\tau - \sin \tau},$$

setze also, wenn x' und y' die Coordinaten des Pols O' in Bezug auf das neue Coordinatensystem bezeichnen,

$$x = (x' + g) \cos \frac{\tau}{2} - (y' + h) \sin \frac{\tau}{2},$$

$$y = (x' + g) \sin \frac{\tau}{2} - (y' + h) \cos \frac{\tau}{2};$$

so erhält man:

$$4) \left\{ \begin{aligned} 4 (f_1' - f_1) &= x'^2 (\tau + \sin \tau) + y'^2 (\tau - \sin \tau) \\ &- 4 \frac{\tau (P^2 + Q^2) - \sin \tau \cos \tau (P^2 - Q^2) - 2 PQ \sin^2 \tau}{\tau^2 - \sin^2 \tau}. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung hat aber eine geometrische Bedeutung. Es wird nämlich der Inhalt f_1', der dem Pol (x', y') entspricht, dargestellt durch die zu x', y' gehörige dritte rechtwinklige Coordinate eines elliptischen Paraboloids, dessen Scheitel senkrecht über dem Coordinatenanfang liegt und dessen Achse diese dritte Coordinatenachse ist. Der jetzige Coordinatenanfang ist daher Minimumpol; seine Coordinaten in Bezug auf das Coordinatensystem in Gleichung 2) folgen für $x' = y' = 0$

$$x = g \cos \frac{\tau}{2} - h \sin \frac{\tau}{2},$$

$$y = g \sin \frac{\tau}{2} + h \cos \frac{\tau}{2},$$

d i., wenn man die Werthe von g und h einsetzt,

$$5) \left\{ \begin{aligned} x &= 2 \frac{P (\tau - \sin \tau \cos \tau) - Q \sin^2 \tau}{\tau^2 - \sin^2 \tau}, \\ y &= 2 \frac{Q (\tau + \sin \tau \cos \tau) - P \sin^2 \tau}{\tau^2 - \sin^2 \tau}, \end{aligned} \right.$$

und ist die Grösse des zugehörigen Minimalinhaltes gleich der Coordinate des Scheitels, d. i.

$$6) \quad f'_{1\,min.} = f_1 - \frac{\tau (P^2 + Q^2) - \sin \tau \cos \tau (P^2 - Q^2) - 2 PQ \sin^2 \tau}{\tau^2 - \sin^2 \tau};$$

Es wird daher die Inhaltszunahme

$$f_1' - f'_{1\,min.} = z,$$

welche beim Uebergange vom Minimumpol im Coordinatenanfang zu einem Pol mit den rechtwinkligen Coordinaten x', y' in Bezug auf die Senkrechte auf die Halbirungslinie von τ als Nulllinie eintritt, durch die Gleichung eines elliptischen Paraboloids

$$7) \qquad 4 z = x'^2 (\tau + \sin \tau) + y'^2 (\tau - \sin \tau)$$

dargestellt.

Hieran knüpfen sich folgende Betrachtungen:

1) Es bestehe zwischen x' und y' die Gleichung

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

so kann man die Gleichung 7) auf die Form bringen

$$8)\qquad 4z = (x'^2 + y'^2)\left[\tau + \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\sin\tau\right] - \frac{2a^2b^2}{a^2 - b^2}\sin\tau;$$

d. h.

Bewegt sich der Pol auf einer Ellipse oder Hyperbel, deren Mittelpunkt der Minimumpol ist und deren Axen die von den Berührenden des Anfangs- und Endpunktes der Basis eingeschlossenen Winkel halbiren, so ist die um eine Constante vermehrte oder verminderte Inhaltszunahme proportional dem Quadrat der Entfernung des Pols vom Minimumpol.

Die Inhaltszunahme wird dann dargestellt durch die dritte Coordinate einer doppelt gekrümmten Linie, welche der Durchschnitt eines elliptischen oder hyperbolischen Cylinders mit dem elliptischen Paraboloid ist.

Für die gleichseitige Hyperbel z. B. vereinfacht sich die Gleichung 8) in die folgende:

$$4z = (x'^2 + y'^2)\,\tau + a^2 \sin\tau.$$

Für den Kreis allein gilt obiger Satz nicht. Für diesen erhält man, wenn man $y'^2 = b^2\left(1 - \frac{x'^2}{a^2}\right)$ einführt und dann $a = b$ setzt,

$$4z = a^2\tau + (x'^2 - y'^2)\sin\tau.$$

2) Lässt man in Gleichung 8) die Constante, d. i. $\frac{2a^2b^2}{a^2 - b^2}$ verschwinden, so geht der Kegelschnitt in zwei gegen die Senkrechte zur Halbirungslinie von τ symmetrisch liegende Gerade über; ihr Neigungswinkel gegen dieselbe sei $\pm\beta$, so hat man

$$4z = (x'^2 + y'^2)(\tau + \sin\tau\cos 2\beta),$$

woraus für $\beta = \frac{\pi}{4}$ folgt:

$$4z = (x'^2 + y'^2)\,\tau,$$

d. h.

Bewegt sich der Pol auf einer der beiden gegen die Halbirungslinie von τ um 45^0 geneigten Geraden, so ist die Inhaltszunahme gleich dem halben mit der Entfernung vom Minimumpol und mit τ als Centriwinkel beschriebenen Kreissector.

3) Besteht zwischen den Halbachsen des Kegelschnittes die Gleichung

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = -\frac{\tau}{\sin\tau},$$

welche wegen $\tau > \sin\tau$ nur eine Ellipse erfüllen kann, so ist die Inhaltszunahme constant, nämlich

$$4z = \frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2}\,\tau.$$

Für jeden Punkt einer solchen Ellipse übertrifft also der Inhalt den Minimalinhalt um den halben, mit dem mittleren (d. i. das Axenkreuz halbirenden) Vector der Ellipse als Habmesser und den Drehungswinkel der Berührenden als Centriwinkel beschriebenen Kreissector. Diese Ellipsen sind die Durchschnitte einer der xy-Ebene parallelen Ebene mit dem elliptischen Paraboloid.

4) Sei τ ein Vielfaches von π, etwa $\tau = m\pi$, so folgt:

$$4z = (x'^2 + y'^2)\, m\pi.$$

Es ist dann die Inhaltszunahme gleich der mit der Entfernung des Pols von dem Minimumpol beschriebenen halben Kreisfläche, soviel mal genommen, als die Berührende der Basis Umdrehungen gemacht hat.

Hierin liegt für $m = 2$ der oben genannte Steiner'sche Satz.

5) Reducirt man Gleichung 5) auf P und Q, so erhält man:

$$2P = x(\tau + \sin\tau\cos\tau) + y\sin^2\tau$$

$$2Q = x\sin^2\tau + y(\tau - \sin\tau\cos\tau),$$

woraus für $x = y = 0$ folgt

$$P = 0,\ Q = 0;$$

d. h. für die dem Minimumpol entsprechende Fusspunktlinie verschwinden die Integrale P und Q.

In dem besonderen Falle

$$\tau = 0$$

ergiebt die Gleichung 3)

$$f_1' = f_1 - Px - Qy.$$

Wenn also die Gesammtdrehung der Berührenden Null ist — wie bei einer $\int$förmigen Curve, deren Berührenden im Anfangs- und Endpunkte einander parallel sind —, so hängt f_1' auf lineare Weise von x und y ab und wird also durch die dritte zu x und y gehörige Coordinate einer Ebene dargestellt. Es giebt daher dann kein Minimum des Flächeninhalts im bisherigen Sinne. Der Ort des Pols für constanten Flächeninhalt sind parallele Gerade, und unter diesen giebt es eine, für welche der Inhalt gleich Null ist, welche die Gleichung hat

$$1 = \frac{P}{f_1}x + \frac{Q}{f_1}y.$$

9.

Vom Minimumpole mehrerer Linien.

Die Resultate des vorigen §. lassen sieh leicht auf den allgemeinen Fall ausdehnen, dass beliebig viel getrennte Curvenstücke als Basis gegeben sind. Werde durch das Zeichen Σ die über alle einzelnen Curven und deren Fusspunktlinien auszudehnende Summation bezeichuet, so ist

$$2\Sigma\int_{\gamma}^{\delta} df_1' = \Sigma\int_{\gamma}^{\delta}(r_1 - x\cos\varphi_1 - y\sin\varphi_1)^2\,d\varphi_1,$$

und folgt hieraus durch Integration

$$1)\quad 4(\Sigma f_1' - \Sigma f_1) = -4x\,\Sigma P - 4y\,\Sigma Q$$
$$+ x^2\,\Sigma[\tau + \sin\tau\cos(\tau+2\gamma)] + y^2\,\Sigma[\tau - \sin\tau\cos(\tau+2\gamma)]\ldots$$
$$+ 2xy\,\Sigma\sin\tau\sin(\tau+2\gamma);$$

Hierin bedeutet also $\Sigma f_1'$ die Summe der Flächeninhalte der Fusspunktlinien vom Pol O' aus, Σf_1 die der Fusspunktlinien vom Pol und Coordinatenanfang O aus.

Um dieser Gleichung ihre einfachste Gestalt zu geben, drehe man die Nulllinie um einen Winkel ω und verschiebe dann das Coordinatensystem parallel um g und h, welche Grössen gegeben sind durch die Gleichungen

$$2)\quad \begin{cases} \tan 2\omega = \dfrac{\Sigma\sin\tau\sin(\tau+2\gamma)}{\Sigma\sin\tau\cos(\tau+2\gamma)}, \\ \text{nämlich} \\ \cos 2\omega = \dfrac{\Sigma\sin\tau\cos(\tau+2\gamma)}{R}, \\ \sin 2\omega = \dfrac{\Sigma\sin\tau\sin(\tau+2\gamma)}{R}, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$R = \sqrt{\Sigma^2\sin\tau\sin(\tau+2\gamma) + \Sigma^2\sin\tau\cos(\tau+2\gamma)};$$

ferner

$$3)\quad \begin{cases} g = 2\dfrac{\cos\omega\,\Sigma P + \sin\omega\,\Sigma Q}{\Sigma\tau + R}, \\ h = 2\dfrac{\cos\omega\,\Sigma Q - \sin\omega\,\Sigma P}{\Sigma\tau - R}; \end{cases}$$

Alsdann hat man in Gleichung 1) einzusetzen

$$x = (x' + g)\cos\omega - (y' + h)\sin\omega,$$
$$y = (x' + g)\sin\omega + (y' + h)\cos\omega,$$

wo x' und y' die Coordinaten des Pols O' in Bezug auf das neue Coordinatensystem bezeichnen. Man erhält

$$4)\quad \begin{cases} 4(\Sigma f_1' - \Sigma f_1) = x'^2(\Sigma\tau + R) + y'^2(\Sigma\tau - R) \\ -4\dfrac{\Sigma\tau(\Sigma^2 P + \Sigma^2 Q) - \Sigma\sin\tau\cos(\tau+2\gamma)(\Sigma^2 P - \Sigma^2 Q) - 2\Sigma\sin\tau\sin(\tau+2\gamma)\Sigma P\Sigma Q}{\Sigma^2\tau - R^2} \end{cases}$$

Es sind nun die Fälle $\Sigma\tau > R$ und $\Sigma\tau < R$ zu unterscheiden.

Sei zuerst $\Sigma\tau > R$.

Diese Bedingung wird allemal dann erfüllt, wenn man die Anfangspunkte jedes Curvenstückes so nimmt, dass jedes τ positiv ist. Denn den Ausdruck

$$R^2 = \Sigma^2\sin\tau\sin(\tau+2\gamma) + \Sigma^2\sin\tau\cos(\tau+2\gamma)$$

kann man, wenn man die Quadraten der Summen wirklich bildet, auch auf die Form bringen

$$R^2 = \Sigma \sin^2 \tau + 2 \Sigma \sin \tau_m \sin \tau_n \,.\, \cos [(\tau_m + 2\gamma_m) - (\tau_n + 2\gamma_n)],$$

wo für τ_m und τ_n und die zugehörigen γ_m und γ_n alle möglichen Combinationen je zweier verschiedenen Werthe von τ_m und τ_n, γ_m und γ_n zu setzen sind. Es ist aber

$$\Sigma^2 \sin \tau = \Sigma \sin^2 \tau + 2 \Sigma \sin \tau_m \sin \tau_n,$$

daher, wenn man jedes $\tau < \pi$, also $\sin \tau > 0$ voraussetzt,

$$R^2 < \Sigma^2 \sin \tau,$$
$$R < \Sigma \sin \tau,$$

und um so mehr

$$R < \Sigma \tau.$$

Denkt man sich nun τ_m um π vermehrt, so bleibt das Glied

$$\sin \tau_m \,.\, \sin \tau_n \cos [(\tau_m + 2\gamma_m) - (\tau_n + 2\gamma_n)]$$

auch im Vorzeichen ungeändert, aber $\Sigma \tau$ wächst um π. Daher gilt die Ungleichung

$$R < \Sigma \tau$$

für alle positiven τ.

Dann wird, ganz wie im vorigen §., die Summe der Inhalte $\Sigma f_1'$ dargestellt durch die zu x', y' gehörige dritte Coordinate eines elliptischen Paraboloids, dessen Scheitel senkrecht über dem Coordinatenanfang liegt und dessen Axe die dritte Coordinatenaxe ist. Der jetzige Coordinatenanfang ist daher Minimumpol, dessen Coordinaten in Bezug auf das alte Coordinatensystem (auf dessen Anfang sich Σf_1 bezieht) für $x' = y' = 0$ folgen

$$x = g \cos \omega - h \sin \omega,$$
$$y = g \sin \omega + h \cos \omega,$$

wofür man durch Einsetzung der Werthe von g, h, $\sin \omega$, $\cos \omega$ aus den Gleichungen 2) und 3) erhält

$$5) \quad \begin{cases} x = 2\dfrac{\Sigma P [\Sigma \tau - \Sigma \sin \tau \cos (\tau + 2\gamma)] - \Sigma Q \,.\, \Sigma \sin \tau \sin (\tau + 2\gamma)}{\Sigma^2 \tau - R^2}, \\[2ex] y = 2\dfrac{\Sigma Q [\Sigma \tau + \Sigma \sin \tau \cos (\tau + 2\gamma)] - \Sigma P \Sigma \sin \tau \sin (\tau + 2\gamma)}{\Sigma^2 \tau - R^2}; \end{cases}$$

Die Grösse der Minimalsumme der Flächeninhalte, dargestellt durch die Ordinate des Scheitels, ergiebt sich aus Gleichung 4) für $x' = y' = 0$

$$6) \quad \Sigma_{min.} f_1' = \Sigma f_1 - \frac{\Sigma \tau (\Sigma^2 P + \Sigma^2 Q) - \Sigma \sin \tau \cos (\tau + 2\gamma)(\Sigma^2 P - \Sigma^2 Q) - 2 \Sigma \sin \tau \sin (\tau + 2\gamma) \Sigma P \Sigma Q}{\Sigma^2 \tau - R^2};$$

Es wird daher die Inhaltszunahme

$$z = \Sigma f_1' - \Sigma_{min.} f_1',$$

die beim Uebergange vom Minimumpole im Coordinatenanfang zu einem Pole (x', y') eintritt, dargestellt durch die dritte Coordinate jenes elliptischen Paraboloids von der Gleichung

$$7) \quad 4z = x'^2 (\Sigma \tau + R) + y'^2 (\Sigma \tau - R);$$

Hieraus ergeben sich nun ganz dieselben Folgerungen, wie im vorigen §., man hat nur τ mit $\Sigma\tau$ und $\sin\tau$ mit R zu vertauschen.

1) Setzt man

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1,$$

so erhält man aus Gleichung 7)

$$8)\qquad 4z=(x'^2+y'^2)\left(\Sigma\tau+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}R\right)-\frac{2a^2b^2}{a^2-b^2}R;$$

d. h.

Bewegt sich der Pol auf einem centralen Kegelschnitt — den Kreis allein ausgenommen —, dessen Mittelpunkt der Minimumpol ist, und dessen Axenkreuz die durch Gleichung 2) bestimmte Lage hat, so ist die um eine Constante veränderte Zunahme der Summe der Flächeninhalte proportional dem Quadrate der Entfernung des Pols vom Minimumpol.

2) Bewegt sich der Pol auf einer gegen die Axe der x' um $\pm\beta$ geneigten durch den Minimumpol gehenden Geraden, so verschwindet die Constante und wird

$$4z=(x'^2+y'^2)(\Sigma\tau+R\cos 2\beta);$$

Bewegt sich daher der Pol auf einer unter 45° geneigten Geraden, so ist die Inhaltszunahme gleich den halben mit der Entfernung vom Minimumpol und der Summe der Drehungswinkel der Berührenden beschriebenen Kreissector.

3) Die Inhaltszunahme bleibt constant, wenn sich der Pol auf einer Ellipse bewegt, zwischen deren Halbachsen die Relation

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=-\frac{\Sigma\tau}{R}$$

stattfindet und ist dieser constante Werth

$$z=\frac{a^2b^2}{2(a^2+b^2)}\Sigma\tau,$$

also die Hälfte des mit dem das Axenkreuz halbirenden Halbmesser der Ellipse und der Summe der Drehungswinkel der Berührenden beschriebenen Kreissectors.

4) Es bestehe die Basis aus m Curvenstücken, für welche die Berührenden der Anfangspunkte einander parallel und die Winkel τ dieselben sind, so wird $R=m\sin\tau$, $\Sigma\tau=m.\tau$ und erhält man

$$\omega=\frac{\tau}{2},$$

$$4z=m\,[x'^2(\tau+\sin\tau)+y'^2(\tau-\sin\tau)].$$

Die Axen der x', y' sind also in diesem Falle parallel mit denen für ein einziges dieser Curvenstücke, und ist die Zunahme der Inhaltssumme beim Uebergange vom Minimumpole aller m Curven zu einem andern Pole gleich

der m fachen Inhaltszunahme für eines der Curvenstücke beim Uebergange von seinem Minimumpol zu einem andern, dessen Entfernung gleich und parallel ist der des vorigen Pols vom Gesammtminimumpol.

5) Seien endlich als Basis lauter Curvenstücke gegeben, deren jedes zwischen zwei parallelen Tangenten liegt — worin der Fall geschlossener Curven mit enthalten ist —, so ist jedes τ ein ganzes Vielfaches von π. Sei daher $\Sigma\tau = \mu \cdot \pi$, so folgt aus Gleichung 7)

$$4z = (x'^2 + y'^2)\,\mu\pi.$$

Der Ort des constanten Flächeninhaltes ist dann ein Kreis und die Summe der Inhaltszunahmen das $\frac{\mu}{4}$ fache der mit der Entfernung des Pols vom Minimumpol beschriebenen Kreisfläche.

6) Drückt man die Integralsumme ΣP und ΣQ durch die Coordinaten des Minimumpols aus, so erhält man

$$2\Sigma P = x\,[\Sigma\tau + \Sigma \sin\tau \cos(\tau + 2\gamma)] + y\,\Sigma \sin\tau \sin(\tau + 2\gamma),$$
$$2\Sigma Q = x\,\Sigma \sin\tau \sin(\tau + 2\gamma) + y\,[\Sigma\tau - \Sigma \sin\tau \cos(\tau + 2\gamma)];$$

woraus, wenn man $x = y = 0$ setzt, der Satz folgt:

Für die Fusspunktlinien der gegebenen Basen in Bezug auf ihren Minimumpol verschwinden die Integralsumme ΣP und ΣQ.

Im zweiten Falle

$$\Sigma\tau < R$$

geht die Gleichung 7) in die eines hyperbolischen Paraboloids

$$4z = x'^2 (R + \Sigma\tau) - y'^2 (R - \Sigma\tau)$$

über. Daher giebt es dann keinen Minimumpol, aber dem jetzigen Coordinatenanfang, d. i. dem durch die Gleichungen 2) und 3) bestimmten Pol, kommen ganz dieselben oder doch analoge Eigenschaften zu, wie dem Minimumpol im vorigen Falle. Er werde der Hauptpol genannt und der ihm entsprechende Inhalt der Hauptinhalt. Die Eigenthümlichkeit des hyperbolischen Paraboloids bedingt einige hervorzuhebende Unterschiede gegen den vorigen Fall. Der Art constanten Flächeninhaltes sind zwei Systeme von Hyperbeln (die Durchschnitte von der $x'y'$-Ebene parallelen Ebenen mit dem Paraboloid), deren gleiche Achsen bei entgegengesetzt gleicher Zunahme der Flächeninhaltssumme senkrecht auf einander stehen. Den Uebergang zwischen beiden Systemen bilden zwei durch den Hauptpol gehende Gerade, in denen das Paraboloid die Ebene der $x'y'$ schneidet, für welche der Inhalt gleich dem Hauptinhalte ist. Ferner giebt es dann zwei gegen die x'-Achse symmetrisch liegende Systeme obiger zwei Geraden paralleler Geraden (die Projectionen der auf dem Paraboloid möglichen Geraden), für welche die Inhaltszunahme proportional ist der Entfernung des Pols von dem Punkt der Geraden, dem ein Inhalt gleich dem Hauptinhalt zukommt, d. i. von ihrem Durchschnitt mit der Geraden, welcher der Hauptinhalt entspricht.

Endlich werde noch der Fall

$$\Sigma\tau = R$$

erwähnt. Alsdann geht die Gleichung 1) durch Drehung der Nulllinie um den durch Gleichung 2) bestimmten Winkel und durch parallele Verschiebung der Achse der y um

$$g = \frac{\cos\omega\,\Sigma P + \sin\omega\,\Sigma Q}{R}$$

über in

$$2(\Sigma f_1' - \Sigma f_1) = Rx'^2 - 2y'(\cos\omega\,\Sigma Q - \sin\omega\,\Sigma P) - \frac{(\cos\omega\,\Sigma P + \sin\omega\,\Sigma Q)^2}{R};$$

wo für $\cos\omega$ und $\sin\omega$ ihre durch Gleichung 2) bestimmten Werthe einzusetzen sind. Die Inhaltszunahme wird also dann durch die dritte Coordinate eines parabolischen Cylinders dargestellt, und lassen sich hieran ähnliche Folgerungen knüpfen, wie in den vorigen Fällen.

Die Formeln dieses Paragraphen reduciren sich auf die des vorigen, wenn die Basis aus verschiedenen Curven besteht, die sich berührend an einander schliessen; denn dann schliessen sich auch ihre Fusspunktlinien berührend an einander an, und ist daher die Basis als eine einzige Linie zu betrachten, für welche die Formeln des vorigen Paragraphen gelten, wenn man unter τ die Gesammtdrehung der Berührenden der Basis und unter P und Q die Summe der für die einzelnen Curven gebildeten Integrale versteht. Man überzeugt sich auch leicht davon, wenn man die Summation nach Gleichung 1) des vorigen Paragraphen bildet und dann jedes δ gleich dem folgenden γ setzt. Man kann diese Betrachtungsweise aber auch auf den Fall ausdehnen, dass die Curvenstücke unter beliebigen Winkeln an einander stossen, also Ecken bilden. Man denke sich nämlich die beiden Curvenstücke durch einen Kreis von verschwindend kleinem Halbmesser berührend verbunden, dessen Centriwinkel daher gleich dem Winkel ist, um den die Berührende ihre Richtung plötzlich ändert, so werden die entsprechenden Fusspunktlinien berührend verbunden durch einen Kreisbogen, der die Mitte der Verbindungslinie des Pols mit der Ecke als Mittelpunkt hat und durch letztere geht. Eine Basis mit Ecken kann man also hinsichtlich ihrer Fusspunktlinien auf zwei Arten betrachten. Entweder lässt man die Berührende an den Ecken ihre Richtung sprungweise ändern und unterbricht nicht die Bewegung ihres Drehpunktes, wo man dann eine aus getrennten Stücken bestehende Fusspunktlinie erhält, oder man denkt sich die Bewegung des Drehpunktes der Berührenden unterbrochen und lässt die Berührende ihre Richtung stetig ändern, wo dann die vorhin getrennten Stücke der Fusspunktlinie durch Kreisbögen, welche als Fusspunktlinien der Ecken zu betrachten sind, berührend verbunden werden. Die Lage des Minimumpols ist natürlich in beiden Fällen eine verschiedene.

(Schluss im nächsten Heft.)

II.

Ueber die Festigkeit einer am Rande aufgelötheten kreisförmigen Platte.

Von Dr. GUSTAV ZEHFUSS,
Privatdocent in Heidelberg.

Wenn man einen Körper über gewisse Grenzen ausdehnt oder zusammenpresst, so verliert er seinen Zusammenhang, und man sagt, dass die Grenzen der Festigkeit bei der Formänderung überschritten worden seien. Innerhalb gewisser Grenzen ist jeder Körper elastisch, wenn auch nahe der Festigkeitsgrenze der Elasticitätsmodul nicht mehr constant, sondern variabel ist nach der Stärke der bereits erfolgten Ausdehnung oder Zusammendrückung. Diese Veränderungen der Elasticitätsverhältnisse bei zunehmender Formänderung pflegt man in der Lehre von der Festigkeit zu vernachlässigen, weil unsere dermalige Kenntniss der Molekularwirkungen noch nicht weit genug gediehen ist. In der Ausübung pflegt man deshalb einen mittleren innerhalb der Elasticitätsgrenzen liegenden Modul anzunehmen, was von keinem erheblichen Nachtheile ist, weil man meist durch Verstärkung der sogenannten theoretischen Dimensionen der rücksichtlich ihrer Festigkeit zu verwendenden Körper eine mehrfache Sicherheit zu gewähren pflegt. Von diesem Gesichtspunkte ausgehend, soll in gegenwärtigem Aufsatze die Festigkeit einer ebenen kreisförmigen Platte ermittelt werden. Es ist jedoch nöthig, zuvor einen Satz aus der Lehre von der Elasticität anzuführen, welchen Cauchy in den *Exercices de Mathématiques* als eine Art von Hypothese aufgestellt hat.

Man denke sich aus einem elastischen Stoffe ein Parallelepiped geschnitten, dessen Seitenkanten gleich l_1, l_2, l_3. Wird auf eine Seitenfläche, z. B. $l_2 l_3$ parallel der Kante l_1 per Flächeneinheit eine kleine Zug- oder Druckkraft A_1 ausgeübt, so entsteht eine kleine Verlängerung der Kante l_1 (Verkürzungen werden als negative Dilatationen angesehen), zugleich aber eine Verminderung des Querschnittes, welche jedoch beide mit A_1 proportional sind. Es seien ε und ε' constante von der Natur der elastischen Sub-

stanz abhängige Erfahrungscoefficienten, so sind, nachdem die Kraft A_1 gewirkt hat, die Kanten l_1, l_2, l_3 der Reihe nach zu

$$l_1(1+\varepsilon A_1);\ l_2(1-\varepsilon' A_1);\ l_3(1-\varepsilon' A_1)$$

geworden, vorausgesetzt, dass der Körper ein isotropes Medium darstellt, widrigenfalls noch eine dritte Constante ε'' in Anwendung zu bringen wäre. Wird nun ebenso parallel der Kante l_2 eine Zugkraft A_2 angebracht, so werden dieselben drei Kanten, unter Vernachlässigung der kleinen Grössen zweiter Ordnung beziehungsweise zu

$$l_1(1+\varepsilon A_1-\varepsilon' A_2);\ l_2(1-\varepsilon' A_1+\varepsilon A_2);\ l_3(1-\varepsilon' A_1-\varepsilon' A_2),$$

und endlich sind deren Werthe in Folge einer gleichzeitig parallel der Kante l_3 wirkenden Kraft A_3 gleich

$$\begin{aligned}&l_1(1+\varepsilon A_1-\varepsilon A_1-\varepsilon' A_3),\\&l_2(1-\varepsilon' A_1+\varepsilon A_2-\varepsilon' A_3),\\&l_3(1-\varepsilon' A_1-\varepsilon' A_2+\varepsilon A_3).\end{aligned}$$

Die Dilationen $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ von l_1, l_2, l_3 sind demnach

$$\text{I)}\quad \begin{cases}\delta_1 = l_1[\varepsilon A_1-\varepsilon'(A_2+A_3)],\\ \delta_2 = l_2[\varepsilon A_2-\varepsilon'(A_1+A_3)],\\ \delta_3 = l_3[\varepsilon A_3-\varepsilon'(A_1+A_2)].\end{cases}$$

Wären l_1, l_2, l_3 ursprünglich gleich 1 gewesen, so würden $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ die linearen Dilatationen der Längeneinheiten der drei Kanten darstellen. Bezeichnen wir sie in diesem Falle durch $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, so entsteht

$$\text{1)}\quad \begin{cases}\lambda_1 = \varepsilon A_1-\varepsilon'(A_2+A_3),\\ \lambda_2 = \varepsilon A_2-\varepsilon'(A_1+A_3),\\ \lambda_3 = \varepsilon A_3-\varepsilon'(A_1+A_2).\end{cases}$$

Hieraus folgt, wenn wir

$$\text{II)}\quad \frac{\varepsilon^2+\varepsilon'^2}{\varepsilon^3-2\varepsilon'^3-3\varepsilon\varepsilon'^2}=K,\ \frac{\varepsilon\varepsilon'+\varepsilon'^2}{\varepsilon^3-2\varepsilon'^3-3\varepsilon\varepsilon'^2}=K'$$

setzen:

$$\text{2)}\quad \begin{cases}A_1 = K\lambda_1+K'(\lambda_2+\lambda_3),\\ A_2 = K\lambda_2+K'(\lambda_1+\lambda_3),\\ A_3 = K\lambda_3+K'(\lambda_1+\lambda_2),\end{cases}$$

welches die Cauchy'schen Formeln zur Berechnung der Kräfte mit den Dilatationen sind. Es möge dabei K der Longitudinal-, K' der Lateral-Elasticitätscoefficient genannt worden, letzteres wegen der gleichzeitigen lateralen Conpression, welche wegfällt, sobald man $\varepsilon'=0$ annimmt. Es ist mir nicht bekannt, dass Jemand eine Anwendung der lateralen Elasticitätscoefficienten, welche nach meinen Versuchen bei einigen lockeren Stoffen, z. B. bei Korkholz, gegen die longitudinalen sehr klein sind, auf die Lehre von der Festigkeit gemacht hätte. Nicht minder beschränkt sich diese Lehre nach ihrem jetzigen Standpunkte meines Wissens nur auf die Theorie der Stäbe und Stabverbindungen, die nur in einer Hauptrichtung gezogen, comprimirt, gebogen oder gewunden werden. Dagegen scheint noch Niemand eine Untersuchung über Festigkeit eigentlicher Platten angestellt zu

zu haben, welche einer gleichförmigen Belastung oder einem gleichförmigen Drucke ausgesetzt sind, wie dies z. B. bei denjenigen Platten stattfindet, welche als Theile einer Maschine einem einseitigen gleichförmigen Dampfdrucke widerstehen sollen.

Um die für einen gegebenen Dampfdruck P nöthige Festigkeit zu entwickeln, bestimme ich erst die Gestalt der demselben ausgesetzten Platte, was den weitläufigeren Theil der Untersuchung ausmacht, und suche sodann die am stärksten gekrümmte Stelle. Daselbst ist die auf die Längeneinheit reducirte stärkste Ausdehnung oder Zusammendrückung der Fasern bezüglich kleiner oder grösser zu setzen, als diejenige, welche der Grenze der Festigkeit entspricht, woraus sich die fragliche Bedingung ergiebt. Ich gehe also zur Bestimmung der Gestalt der gebogenen Platte oder Scheibe über. Die Differentialgleichung derselben ist von Poisson (*Mém. de l'Inst.* 1858, von Cauchy in den *Exercices de Mathém.* und auf die kürzeste und strengste Weise von Kirchhoff im 40. Bande von Crelle's Journal gegeben worden, jedoch erfordern alle diese verschiedenen Ableitungen einen ziemlichen mathematischen Aufwand, so dass es gerechtfertigt sein möchte, eine äusserst kurze und dabei sehr einfache Begründung dieser Differentialgleichung anzuführen.

Die Scheibe sei in natürlichem Zustande, d. h. wenn an keinem Punkte eine Verdünnung oder Verdichtung des homogenen elastischen Stoffes stattfindet, ein zwischen zwei in geringem Abstande h befindlichen zur Ebene xy parallelen Ebenen eingeschlossener elastischer Körper, welcher durch eine zu dieser Grundebene senkrechte Cylinderfläche, die sogenannte Contour, begrenzt werde, und dessen Dicke h klein sei im Vergleiche zu seiner Ausdehnung in die Länge und Breite.

Die Gleichungen des Gleichgewichts ergeben sich nun, wenn man jeden Theil einer solchen Scheibe vermöge der Kräfte, welche ihn von Aussen angreifen, in das Gleichgewicht bringt.

Als einen solchen Theil betrachten wir den Körper, welcher im natürlichen Zustande der Scheibe ein rechtwinkliges Parallelepiped von der Dicke $dx\,dy$, und dessen Seitenkanten h zur ursprünglichen Oberfläche der Scheibe senkrecht, also parallel der Achse Z laufen. Wir bedienen uns nun zweier von Jacob Bernoulli zunächst für die elastischen Stäbe gemachten und auch von Kirchhoff adoptirten Hypothesen:

1) Die Massetheilchen der Platte, welche sich in deren natürlichem Zustande in einer zur Oberfläche der Platte senkrechten Geraden befanden, liegen auch nach einer Formänderung derselben in einer Normalen zu der alsdann gekrümmten Oberfläche.

2) Die Elemente der Mittelfläche, d. h. derjenigen Fläche, welche in natürlichem Zustande der Platte eine in gleichem Abstande zwischen beiden Grundflächen befindliche Ebene ausmacht), erleiden bei der Formän-

derung keine merkliche Dilatation. Diese Mittelfläche heisst desshalb auch die neutrale Schicht.

Wir haben nun die Kräfte kennen zu lernen, welche den genannten parallelepipedischen Körper, der im gebogenen Zustande der Platte, der zweiten Hypothese zu Folge einen Obelisken darstellt, angreifen. Diese sind einerseits die auf seine inneren Massetheilchen wirkenden beschleunigenden Kräfte X, Y, Z, von welchen wir $X = Y = 0$ annehmen, andererseits die durch die Umgebung geäusserten elastischen Kräfte, welche vorzüglich unsere Aufmerksamkeit verdienen.

Da die gebogene Scheibe vermöge der äusseren Kräfte im Gleichgewichte ist, so muss ein Bestreben zur Bewegung entstehen, sobald diese aufgehoben werden, d. h. im Gleichgewichtszustande hat jedes Massetheilchen gewisse Spannungen oder Pressungen auszuhalten, welche, indem sie mit gleichen Intensitäten je zwei nach entgegengesetzten Richtungen wirken, sich gegenseitig aufheben. Betrachten wir nun zunächst die verticale, d. h. in der Richtung Z wirkende Componente dieser elastischen Kräfte, und zwar diejenigen, welche z. B. die vordere, d. h. dem Ursprunge der Coordinaten zugekehrte Seitenfläche $h\,dy$ des Obelisken angreifen, so ist klar, da diese Verticalkräfte von der Biegung der Fläche herrühren, dass sie über die ganze Ausdehnung der Fläche $h\,dy$ in einerlei Sinne wirken, also zusammen eine dieser Fläche $h\,dy$ proportionale Verticalkraft erzeugen, welche per Flächeneinheit durch P_{hdy} bezeichnet werden mag, und, wenn der Dampf von oben drückt, also die concave Seite nach Oben gerichtet ist, abwärts wirkt. Die ganze im Schwerpunkte der vorderen Fläche $h\,dy$ abwärts wirkende Kraft wäre demnach gleich $h\,dy \,.\, P_{hdy}$.

Wir betrachten ferner die Kräfte, welche den Ausdehnungen oder Zusammendrückungen der Massetheilchen parallel der Oberfläche der Scheibe ihr Dasein verdanken. Nehmen wir irgend eine im ursprünglichen Zustande der Scheibe gerade und der Ebene XY, d. h. der Oberfläche oder der Mittelfläche parallele Faser von unendlich kleinem Querschnitte an, so wird dieselbe in der gebogenen Scheibe 1) eine Biegung nach oben oder unten, 2) eine Veränderung des Querschnittes, 3) eine seitliche Biegung, 4) eine Torsion, 5) eine Dehnung oder Verkürzung nach der Länge erfahren können. Die von der Biegung nach oben oder unten herrührenden Kräfte geben die bereits betrachteten P. Die Veränderungen des Querschnittes können auf Längsänderungen der gegen die fragliche Faser senkrechten Fasern zurückgeführt werden.

Dagegen verursachen die durch seitliche Biegung und Torsion entstehenden Kräfte eine gewisse Unbequemlichkeit. Wir können jedoch dieselben ganz vermeiden, wenn wir solche Fasern betrachten, welche innerhalb des unendlich kleinen Umfanges, in welchem wir sie zu verfolgen haben, keiner seitlichen Biegung und Windung unterworfen sind. Um die Lage solcher Fasern zu finden, ziehen wir uns die Normalen zu zwei unendlich nahe liegenden

Punkten der Achse einer in der mittleren (neutralen) Schicht gelegenen Faser. Alsdann leuchtet ein, dass eine seitliche Biegung und Torsion der zwischen beiden benachbarten Normalen ausgespannten Fasern stattfinde, wenn diese Normalen auf der später gebogenen Scheibe sich nicht schneiden, sondern nach verschiedenen Richtungen des Raumes auseinandergehen. Die Richtungen aber, welche eine der neutralen Schicht parallele Faser haben muss, damit die benachbarten Normalen sich schneiden, sind bekanntlich die aufeinander senkrechten Richtungen der stärksten und schwächsten Krümmung der von der neutralen Schicht gebildeten krummen Fläche. Indem wir den Fasern diese Richtungen geben, kommen wir bezüglich der Veränderungen ihrer Querschnitte auf den oben vorausgesetzten Fall zurück, dass die Ausdehnungen nach aufeinander senkrechten Richtungen vor sich gehen.

Die Projectionen der Richtungen der stärksten und schwächsten Krümmung auf die Ebene XY bilden nun mit der Achse X die Winkel α und α', für welche

$$tg \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{Bmatrix} = \frac{(1+p^2)\,t - (1+q^2)\,r \pm \sqrt{R}}{2\,[(1+q^2)\,s - pq\,t]}$$

ist, wo R für das Polynom

$$[(1+q^2)\,t - (1+q^2)\,r]^2 + 4\,[(1+p^2)\,s - pq\,r]\,[(1+q^2)\,s - pq\,t]$$

steht, und p, q, r, s, t der Kürze halber für

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

gelten. Da aber die Neigungen der krummen Oberfläche gegen den Horizont sehr klein sind, so können wir p und q gegen 1 vernachlässigen, so dass

$$R = (r-t)^2 + 4s^2,$$

$$3)\qquad \sin\alpha = \sqrt{\left\{\frac{t - r + \sqrt{R}}{2\sqrt{R}}\right\}},\quad \cos\alpha = \sqrt{\left\{\frac{r - t + \sqrt{R}}{2\sqrt{R}}\right\}}.$$

Unter denselben Bedingungen findet man auch, dass die beiden Hauptrichtungen α und α' entsprechenden Krümmungshalbmesser durch

$$4)\qquad \begin{Bmatrix} \varrho \\ \varrho' \end{Bmatrix} = \frac{2}{r + t \pm \sqrt{R}}$$

gegeben sind.

Gehen wir nun zur Betrachtung derjenigen Kräfte über, welche aus der Verlängerung oder Verkürzung der Fasern entstehen. Denken wir uns eine unendlich dünne, der neutralen parallele Schicht, so erleidet ein kleines Stück derselben nach allen Seiten, wie auch in Richtung der Normalen Ausdehnungen oder Zusammenpressungen. Ein solches Flächenstück theilen wir uns in natürlichem Zustande der Scheibe durch zwei Systeme den Richtungen der stärksten und schwächsten Krümmung paralleler Schnitte in zwei Reihen sich rechtwinklig durchkreuzender Fasern; alsdann erleiden dieselben nach der Biegung der Fläche die genannten Dilata-

tionen, welche der geringen Ausdehnung des Flächenstückes halber für jede Faserreihe per Längeneinheit constant, für beide Reihen aber im Allgemeinen verschieden sind, und zwar messen die Längenveränderungen der einen zugleich die horizontalen Veränderungen des Querschnitts der anderen. Zugleich sind es diese Veränderungen allein, welche Dilationen in der Richtung der Normalen hervorrufen, weil im Inneren der Scheibe keine vertical spannenden Kräfte angenommen werden. Ehe wir nun weiter gehen, sollen einige Definitionen aufgestellt werden.

Es sei

λ_α die Dilatation der Längeneinheit der Fasern in der Richtung der durch den Winkel α bezeichneten Hauptkrümmungslinie. Der Abstand der Fasern von der Mittelfläche sei $= u$,

$\lambda_{\alpha'}$ diese Verlängerung der Fasern in der Richtung α',

λ_z die Dilatation der Längeneinheit in der Richtung Z,

P_{hdy} die auf die Flächeneinheit der vorderen Fläche hdy des Obelisken in der Richtung $-Z$ wirkende aus Biegung der Fasern entstandene Kraft,

P_{hdx} ebenso die auf die Fläche hdx nach $-Z$ wirkende Kraft,

A_α die in der Richtung α auf eine zu derselben senkrechte, in der Höhe u befindliche Flächeneinheit wirkende, vom Obelisken ab gerichtete Kraft, entstanden aus Dilatation der in der Richtung α laufenden Fasern,

$A_{\alpha'}$ die in der Richtung α' auf eine zu derselben senkrechte in der Höhe u befindliche Flächeneinheit wirkende Kraft,

$A_{\alpha, hdx}$ die per Flächeneinheit parallel der Richtung α auf die vordere Fläche hdx in der Höhe u über der neutralen Schicht angreifende vom Obelisken abgerichtete, aus A_α entstehende Kraft,

$A_{\alpha', hdx}$ die per Flächeneinheit auf hdx in der Höhe u abwärts vom Obelisken wirkende aus $A_{\alpha'}$ entstehende Kraft,

$A_{\alpha, hdy}$ die per Flächeneinheit auf hdy in der Höhe u abwärts vom Obelisken wirkende aus A_α entstehende Kraft.

$A_{\alpha', hdx}$ die per Flächeneinheit auf hdx in der Höhe u wirkende vom Obelisken abwirkende aus $A_{\alpha'}$ entstehende Kraft.

$A_{x, hdy}$ die in der Höhe u auf die Fläche hdy in der Richtung $-X$ per Flächeneinheit wirkende, durch Zerlegung von $A_{\alpha, hdy}$ und $A_{\alpha', hdy}$ gewonnene Kraft.

$A_{y, hdy}$ die ähnlicherweise auf hdy in der Richtung $-Y$ wirkende Zugkraft,

$A_{x, hdx}$ die analog auf hdx in der Richtung $-X$ wirkende Zugkraft,

$A_{y, hdx}$ ebenso die auf hdx in der Richtung $-Y$ wirkende Zugkraft.

Wir müssen nun die zwischen diesen verschiedenen Ausdrücken stattfindenden Beziehungen entwickeln. Wie man leicht aus einer Figur abstrahirt, ist

5) $$\lambda_\alpha = \frac{u}{\varrho}, \quad \lambda_{\alpha'} = \frac{u}{\varrho'}.$$

Sodann ergeben die Formeln 2), da auf die inneren Theile der Sch keine Druckkräfte wirken, also $A_z = 0$ ist:

$$A_\alpha = K\lambda_\alpha + K'(\lambda_{\alpha'} + \lambda_z),$$
$$A_{\alpha'} = K\lambda_{\alpha'} + K'(\lambda_\alpha + \lambda_z),$$
$$0 = K\lambda_z + K'(\lambda_\alpha + \lambda_{\alpha'}).$$

Hieraus folgt nach Elimination von λ_z und unter Berücksichtigung Werthe 5):

6) $$\begin{cases} A_\alpha = \dfrac{K^2 - K'^2}{K} \cdot \dfrac{u}{\varrho} + \dfrac{KK' - K'^2}{K} \cdot \dfrac{u}{\varrho'} \\ A_{\alpha'} = \dfrac{K^2 - K'^2}{K} \cdot \dfrac{u}{\varrho'} + \dfrac{KK' - K'^2}{K} \cdot \dfrac{u}{\varrho}. \end{cases}$$

Ebenso sieht man leicht aus einer Figur, dass

7) $$\begin{cases} A_{\alpha, hdx} = A_\alpha \cdot \sin\alpha; \quad A_{\alpha, hdy} = A_\alpha \cos\alpha, \\ A_{\alpha', hdx} = A_{\alpha'} \cdot \cos\alpha; \quad A_{\alpha', hdy} = -A_{\alpha'} \sin\alpha, \end{cases}$$

desgleichen, dass

$$A_{x, hdy} = A_{\alpha, hdy} \cdot \cos\alpha - A_{\alpha', hdy} \cdot \sin\alpha,$$
$$A_{x, hdx} = A_{\alpha, hdx} \cdot \cos\alpha - A_{\alpha', hdx} \cdot \sin\alpha,$$
$$A_{y, hdx} = A_{\alpha, hdx} \cdot \sin\alpha + A_{\alpha', hdx} \cdot \cos\alpha,$$
$$A_{y, hdy} = A_{\alpha, hdy} \cdot \sin\alpha + A_{\alpha', hdy} \cdot \cos\alpha.$$

Substituirt man hier die Werthe aus 6) und 7), so wird

$$A_{x, hdx} = u\left[\frac{K^2 - K'^2}{K}\left(\frac{\cos^2\alpha}{\varrho} + \frac{\sin^2\alpha}{\varrho'}\right) + \frac{KK' - K'^2}{K}\left(\frac{\cos^2\alpha}{\varrho'} + \frac{\sin^2\alpha}{\varrho}\right)\right.$$

$$A_{y, hdy} = u\left[\frac{K^2 - K'^2}{K}\left(\frac{\cos^2\alpha}{\varrho'} + \frac{\sin^2\alpha}{\varrho}\right) + \frac{KK' - K'^2}{K}\left(\frac{\cos^2\alpha}{\varrho} + \frac{\sin^2\alpha}{\varrho'}\right)\right.$$

$$A_{x, hdx} = A_{y, hdy} =$$
$$u\left[\frac{K^2 - K'^2}{K}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'}\right) + \frac{KK' - K'^2}{K}\left(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho}\right)\right] \sin\alpha\cos\alpha,$$

d. h. unter Berücksichtigung der Formeln 3) und 4):

8) $$\begin{cases} A_{x, hdy} = u\left[\dfrac{K^2 - K'^2}{K} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{KK' - K'^2}{K} \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right], \\ A_{y, hdx} = u\left[\dfrac{K^2 - K'^2}{K} \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{KK' - K'^2}{K} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right], \\ A_{x, hdx} = A_{y, hdy} = \\ u\left[\dfrac{K^2 - K'^2}{K} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{KK' - K'^2}{K} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right]. \end{cases}$$

Hiernach können wir zur Aufstellung der sechs Bedingungsgleich gen des Gleichgewichts des Obelisken schreiten. Diejenigen beiden, wel sich über das Verschwinden der Projectionen aller Kräfte auf die Ach X und Y aussprechen, nehmen wir als von selbst erfüllt an, weil wir geringen horizontalen Spannungen der neutralen Schicht vernachlässi und jeder Kraft A, als den Factor u enthaltend, in der Horizontalprojec

eine gleiche mit dem Factor $-u$ behaftete entgegenwirkt. Aehnliches gilt auch für diejenige Momentengleichung, welche sich auf die Projectionen aller Kräfte auf die Ebene XY bezieht.

Es bleiben also nur noch drei Gleichungen übrig, nämlich die für die Projectionen aller Kräfte auf die Achse Z, so wie die Momentengleichungen aller Kräfte auf die Richtungen der Ebenen XZ und YZ. Nehmen wir die Seitenflächen $h\,dx$ und $h\,dy$, so wie die Mittelfläche als die drei Projectionsebenen an, und bemerken wir noch überdiess, dass in der Gleichung für die Projectionen auf Z die Kräfte $-P$ und auf der entgegengesetzten Seite des Obelisken die Kräfte $P+\partial P$ vorkommen, dass also nur ∂P, ein partielles Differential, übrig bleibt; dass ebenso parallel den Achsen X, Y die Kräfte $-A$, auf der entgegengesetzten Seite des Obelisken aber die Kräfte $A+\partial A$ wirken, dass also nur ∂A, ein partielles Differential, in den Momentengleichungen eingeht; dass überdiess die Kräfte P an den Hebelarmen ∂x und ∂y, die Kräfte A an den Hebelarmen u wirken, so gewinnen wir, wenn Q den Druck des Dampfes auf die Flächeneinheit bezeichnet, unter Weglassung der Unendlichkleinen höherer Ordnung, z. B. des Momentes von Q folgende drei Bedingungsgleichungen:

$$-Q\,dx\,dy + h\,dy\frac{\partial P_{hdy}}{\partial x}dx + h\,dx\frac{\partial P_{hdx}}{\partial y}dy = 0,$$

$$h\,dy\,P_{hdy}\,dx + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u\left(\frac{\partial A_{x,hdy}}{\partial x}dx\,.\,dy\,du + \frac{\partial A_{x,hdx}}{\partial y}dy\,.\,dx\,du\right) = 0,$$

$$h\,dx\,P_{hdx}\,dy + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u\left(\frac{\partial A_{y,hdx}}{\partial y}dy\,.\,dx\,du + \frac{\partial A_{y,hdy}}{\partial x}dx\,.\,dy\,du\right) = 0$$

oder, nach einer kleinen Vereinfachung, und in Rücksicht auf die aus 8) zu entnehmenden Werthe von A:

$$\frac{Q}{h} - \frac{\partial P_{hdy}}{\partial x} - \frac{\partial P_{hdx}}{\partial y} = 0,$$

$$P_{hdy} + \frac{h^2}{12}\cdot\frac{K^2-K'^2}{K}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\right) = 0,$$

$$P_{hdx} + \frac{h^2}{12}\cdot\frac{K^2-K'^2}{K}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}\right) = 0.$$

Diese drei Gleichungen ergeben eine Differentialgleichung für z, und lehren nachher die Werthe von P kennen. Um die Differentialgleichung zu erhalten, eliminire man P_{hdy} und P_{hdx}. Es entsteht

$$9)\qquad \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = -\frac{12\,Q}{h^3}\cdot\frac{K}{K^2-K'^2},$$

welche Differentialgleichung auch genau aus der von Kirchhoff gefun-

denen abgeleitet werden kann. Die Gestalt der Scheibe ergiebt sich nun mit dem Integrale der partiellen Differentialgleichung 9), welches sich für verschiedene Zwecke unter verschiedenen Formen darstellen lässt, je nachdem die darin vorkommenden willkührlichen Functionen modificirt werden. Ist die Scheibe kreisförmig, und ihr Halbmesser gleich l, so dürfte nachstehende Form die geeignetste sein:

$$10)\quad \begin{cases} z = -\frac{3}{14}\frac{Q}{h^3}\cdot\frac{K}{K^2-K'^2}(l^2-x^2-y^2)^2 \\ \quad + (x^2+y^2)[\varphi(x+yi)+\varphi_1(x-yi)] \\ \quad + [\psi(x+yi)+\psi_1(x-yi)], \end{cases}$$

wo $i=\sqrt{-1}$, und $\varphi, \varphi_1, \psi, \psi_1$ vier willkührliche Functionen vorstellen. Ist nun das Centrum der Scheibe im Ursprunge der rechtwinkligen Coordinaten, so bestimmen sich die vier willkührlichen Functionen aus den Bedingungen, dass für $x^2+y^2=l^2$ sowohl $z=0$, als auch $\frac{\partial z}{\partial r}=0$ sein muss, wo $r=\sqrt{x^2+y^2}$, sobald die Scheibe am Rande fest aufgelöthet ist. Setzt man $x+yi=re^{ti}$, so heisst dies so viel, als dass für $r=l$ sowohl der Ausdruck

$$r^2[\varphi(re^{ti})+\varphi_1(re^{-ti})]+\psi(re^{ti})+\psi_1(re^{-ti}),$$

als auch dessen partieller Differentialquotient nach r, für jeden Werth von φ verschwinden muss. Die Ausdrücke $\varphi+\varphi_1$ und $\psi+\psi_1$ lassen sich aber, wenn man die einzelnen Functionen von re^{ti} nach Sinus und Cosinus der Vielfachen von t entwickelt, offenbar auf nachstehende Form bringen:

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1 r\cos t + a_2 r^2 \cos 2t + a_3 r^3 \cos 3t + \ldots \\ &\quad + b_1 r \sin t + b_2 r^2 \sin 2t + b_3 r^3 \sin 3t + \ldots, \end{aligned}$$

also entsteht eine Gleichung von der Form

$$\begin{aligned} 0 = {} & A_0 + A_1 r\cos t + A_2 r^2\cos 2t + A_3 r^3 \cos 3t + \ldots \\ & + B_1 r\sin t + B_2 r^2 \sin 2t + B_3 r^3 \sin 3t + \ldots \\ & + r^2 \begin{cases} a_0 + a_1 r\cos t + a_2 r^2\cos 2t + a_3 r^3\cos 3t + \ldots \\ \quad + b_1 r\sin t + b_2 r^2 \sin 2t + b_3 r^3 \sin 3t + \ldots, \end{cases} \end{aligned}$$

in welcher die Coefficienten a, b, A, B von r und t unabhängig sind. Für $r=l$ muss ausser derselben auch noch ihre Derivirte nach r bestehen, so dass weiter entsteht:

$$\begin{aligned} 0 = {} & A_1\cos t + 2A_2 r\cos 2t + 3A_3 r^2\cos 3t + \ldots \\ & + B_1 \sin t + 2B_2 r\sin 2t + 3B_3 r^2 \sin 3t + \ldots \\ & + r \begin{cases} 2a_0 + 3a_1 r\cos t + 4a_2 r^2\cos 2t + 5a_3 r^3 \cos 3t + \ldots \\ \quad + 3b_1 r\sin t + 4b_2 r^2\sin 2t + 5b_3 r^3\sin 3t + \ldots \end{cases} \end{aligned}$$

Sollen nun diese beiden Gleichungen für jeden Werth von t bei $r=l$ erfüllt sein, so müssen nach Fourier die Coefficienten von $\sin nt$ und $\cos nt$ einzeln verschwinden.*) Hieraus folgt

*) Dies leuchtet ein, sobald man nach beiderseitiger Multiplication mit $\sin nt$ oder $\cos nt$ zwischen den Grenzen 2π und 0 integrirt.

$$A_0 + l^2 a_0 = 0,\quad A_1 + l^2 a_1 = 0,\quad A_2 + l^2 a_2 = 0,\quad A_3 + l^2 a_3 = 0, \dots$$
$$2 l a_0 = 0,\quad A_1 + 3 l^2 a_1 = 0,\quad 2 A_2 + 4 l^2 a_2 = 0,\quad 3 A_3 + 5 l^2 a_3 = 0, \dots$$
$$B_1 + l^2 b_1 = 0,\quad B_2 + l^2 b_2 = 0,\quad B_3 + l^2 b_3 = 0, \dots$$
$$B_1 + 3 l^2 b_1 = 0,\quad 2 B_2 + 4 l^2 b_2 = 0,\quad 3 B_3 + 5 l^2 b_3 = 0, \dots,$$

wonach sämmtliche Coefficienten, also auch die von ihnen bestimmten Functionen φ, φ_1, ψ, ψ_1 gleich Null sind. Die Gleichung der gekrümmten Scheibe ist mithin

$$11)\qquad z = -\frac{3}{14}\frac{Q}{h^3}\frac{K}{K^2 - K'^2}(l^2 - x^2 - y^2)^2.$$

Der kleinste Werth des Krümmungshalbmessers ergiebt sich hiernach

$$\varrho = \varrho' = \frac{7}{6}\frac{h^3}{l^2 Q}\cdot\frac{K^2 - K'^2}{K}.$$

Setzt man nun die Verlängerung, bei welcher eine Faser von der Länge 1 zerreisst, gleich λ, so darf dieselbe höchstens gleich sein der dem Werthe von ϱ entsprechenden Dilatation $\frac{\frac{1}{2}h}{\varrho}$ der Längeneinheit der stärkstgespannten, d. h. auf der Oberfläche in dem Abstande $\frac{1}{2}h$ von der neutralen Schicht entfernten Faser. Hiernach ist die Festigkeitsbedingung: $\lambda = \frac{1}{2}h : \varrho$, oder

$$h = \frac{7}{3}\frac{h^3 \lambda}{l^2 Q}\cdot\frac{K^2 - K'^2}{K},$$

d. h.

$$14)\qquad h = l\sqrt{\frac{3}{7}\frac{Q}{\lambda}\cdot\frac{K}{K^2 - K'^2}}.$$

Es bezeichnet dies diejenige Dicke, welche man der Platte bei gegebenem Dampfdrucke zu geben hat, wenn kein Zerreissen stattfinden soll. Man zieht daraus folgende zwei Sätze:

Bei gleichem Dampfdrucke müssen die Dicken zweier Platten in directem Verhältnisse ihrer Durchmesser stehen.

Bei gleichen Durchmessern zweier kreisförmigen Platten müssen ihre Dicken der Quadratwurzel aus dem Dampfdrucke proportional sein, wenn sie die erforderliche Festigkeit darbieten sollen.

Die Grösse λ entspricht hier der auf Ausdehnung in Anspruch genommenen Festigkeit des Materiales. Auf der dem stärkstgespannten Punkte entgegengesetzten Seite der Scheibe findet die stärste Compression statt. Ist nun das Material für Compression empfindlicher, als für Dilatation, so hat man für λ in der Formel 14) die Grenze der Compressionslänge der Längeneinheit zu setzen.

Schliesslich werde noch bemerkt, dass in beiden Fällen die Fasern nicht nur der Länge nach, sondern auch in gleichem Sinne eine Veränderung des Querschnittes erfahren. Allein es ist klar, dass wenn die blos auf Stäbe mit freiem Querschnitte sich beziehenden Versuchswerthe von λ in die letzte Formel eingesetzt werden, die Festigkeitsbedingung um so mehr

erfüllt ist, weil z. B. eine der Länge nach gespannte und im Momente des Zerreissens befindliche Faser um so sicherer zerreisst, wenn sie bei gleichbleibender Länge auch noch eine Ausdehnung des Querschnittes erfährt. Es würde leicht sein, die Bedingung 14) durch eine andere, welche die Grösse h in noch kleinere Grenzen bannen würde, zu ersetzen, wenn man eine zwar sehr wahrscheinliche, aber doch an Sicherheit der obigen Voraussetzung nachstehende Hypothese benutzte. Diese Hypothese besteht darin, dass, wenn eine Faser mit freiem Querschnitte bei einer Dilatation λ' zerreisst, dasselbe sehr wahrscheinlich noch stattfindet, wenn laterale Kräfte eine Veränderung des Querschnittes und eine modificirte Verlängerung $\lambda < \lambda'$ hervorbringen. Der Zusammenhang zwischen λ und λ' wäre nach den eingangs dieser Abhandlung entwickelten Formeln leicht abzuleiten, und es würde h in der Formel 14) kleiner ausfallen, wenn man λ durch λ' ersetzte.

III.

Beiträge zur Theorie der Gase.

Von Dr. E. Jochmann in Berlin.

I. Das ideal permanente Gas.

Unter einem ideal permanenten Gase soll im Folgenden ein solches Gas verstanden werden, auf welches die beiden Grundgesetze der elastischen Flüssigkeiten, die man unter dem Namen des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes zusammenfassen kann, in voller Strenge anwendbar sind. Wir wollen ferner für das ideale Gas die Richtigkeit der Mayer'schen Annahme*) voraussetzen, dass die bei der Compression eines Gases freiwerdende calorimetrisch messbare Wärmemenge das volle Aequivalent der zur Compression des Gases erforderlichen äusseren Arbeit ist. Es folgt dies übrigens unmittelbar aus der Erfahrungsthatsache, dass ein Gas, welches sich ausdehnt, ohne äussere Arbeit zu leisten, seine Temperatur nicht ändert und aus dem Princip der Aequivalenz der Arbeit und Wärme.

In der That giebt es kein Gas, welches diesen Voraussetzungen vollständig genügt. Da aber alle permanenten und ein Theil der coërciblen

*) Mayer: Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur. Wöhler und Liebig's Annalen der Chemie und Pharmacie XLII. p. 240.

Gase sich denselben mit einer für alle praktischen Zwecke hinreichenden Genauigkeit annähern, so ist es von Nutzen, die Theorie der Gase zuerst so zu entwickeln, als ob dieselben jene Gesetze streng befolgten. Man hat dann bei Betrachtung der Abweichungen von den Grundgesetzen den Vortheil, dieselben als kleine Grössen behandeln zu können, deren Potenzen und Produkte vernachlässigt werden dürfen.

Das Mariotte'sche und Gay-Lussac'sche Gesetz lassen sich in der Formel zusammenfassen

$$p \, . \, v = \varkappa \, . \, (1 + \alpha\tau)$$

wo p den Druck, v das Volum, τ die Temperatur in Graden des Centesimal-Luftthermometers*), α den thermischen Ausdehnungscoëfficienten des Gases bei constantem Druck bezeichnet. Diese Formel nimmt eine noch einfachere Gestalt an, wenn man einen andern Nullpunkt für die Thermometerscala wählt. Setzt man

$$\frac{1}{\alpha} + \tau = t, \quad \varkappa\alpha = k$$

so wird

1) $$p \, . \, v = k \, . \, t$$

Die so eingeführte Grösse t nennt man die absolute Temperatur. Die Constante k steht in einem unmittelbaren Zusammenhang mit der Differenz der beiden specifischen Wärmen des Gases bei constantem Druck und bei constantem Volum. Wird der Masseneinheit des Gases bei constantem Volum eine Wärmemenge dq zugeführt**) so erfährt das Gas eine gewisse Temperaturerhöhung dt. Den Quotienten $\frac{dq}{dt}$ nennt man die specifische Wärme des Gases bei constantem Volum. Wir wollen denselben mit c bezeichnen. Um eine Gasmasse m bei constantem Volum um dt zu erwärmen, würde die Wärmemenge

$$m \, . \, c \, . \, dt$$

erforderlich sein. Will man dagegen dieselbe Temperaturerhöhung hervorbringen, indem man den Druck constant erhält, wobei das Gas also eine Ausdehnung erfährt, so ist dazu eine grössere Wärmemenge

$$m \, . \, c_1 \, . \, dt$$

erforderlich, wo c_1 die Grösse ist, welche man die specifische Wärme bei constantem Drucke zu nennen pflegt. Ist dv die Volumzunahme, so ist $p \, . \, dv$ die im letzteren Falle bei der Ausdehnung geleistete äussere Ar-

---

*) Diese Gleichung dient also vorläufig als Definition der Temperatur und die Constante α wird so bestimmt, dass die Differenz der Temperaturen des Siedepunkts und des Gefrierpunkts $= 100$ ist.

**) Will man von vorn herein mit dem „Zuführen einer Wärmemenge" einen präciseren Begriff verbinden, so heisst, einem Körper Wärme zuführen, soviel, als seine Wirkungsfunction vergrössern (siehe Art. 3, 5 und 6). Ich habe es jedoch vorgezogen, zunächst an den gewöhnlichen Sprachgebrauch, der auf der unmittelbaren physikalischen Anschauung beruht, anzuknüpfen.

beit. In Folge der Mayer'schen Annahme muss die Differenz der in beiden Fällen gebrauchten Wärmemengen

$$m\,(c_t - c)\,.\,dt$$

das genaue Aequivalent der geleisteten Arbeit sein; denn erwärmte man das Gas erst bei constantem Volum um dt und liesse dasselbe dann sich um dv ausdehnen ohne äussere Arbeit zu leisten, wobei seine Temperatur unverändert bliebe, so wären Anfangs- und Endzustand dieselben wie bei der Erwärmung unter constantem Druck, die Ueberführung wäre aber erfolgt, ohne dass dabei äussere Arbeit geleistet wurde. Die in diesem Fall weniger gebrauchte Wärmemenge $m\,(c_1 - c)\,dt$ ist also das Aequivalent der Arbeitsmenge $p\,.\,dv$. Bezeichnet man daher das mechanische Aequivalent der Wärmeeinheit durch A, so folgt daraus

$$p\,.\,dv = A\,.\,m\,.\,(c_1 - c)\,dt.$$

Die Gleichung 1) giebt aber, indem man dieselbe mit Rücksicht auf die Bedingung $p = const.$ differentiirt

$$p\,.\,dv = k\,.\,dt$$

und indem man durch Vergleichung dieser beiden Ausdrücke den Werth der Constante k bestimmt, geht 1) über in

$$2)\qquad p\,.\,v = A\,.\,m\,(c_1 - c)\,.\,t.$$

Bezeichnet man die Dichtigkeit des Gases d. h. die Masse der Volumeinheit mit ϱ, so ist

$$3)\qquad p = A\,.\,\varrho\,.\,(c_1 - c)\,.\,t.$$

Wählen wir als Einheit der Wärmemenge, wie es üblich ist, diejenige Wärmemenge, welche erforderlich ist, um 1 kgr. Wasser von 0^0 auf 1^0 *C.* zu erwärmen, so ist bekanntlich nach den zuverlässigsten Versuchen von Joule*) die Constante

$$4)\qquad A = 423{,}55 \text{ Kilogramm-Meter}$$
$$= 415500\,.\,10^{10} \text{ absol. Arbeitseinheiten,}$$

wenn man die Intensität der Schwere $= 9810$ annimmt und unter der absoluten Arbeitseinheit die Arbeit versteht, durch welche die Masse eines Milligramms um ein Millimeter der Richtung der Kraft 1 entgegenbewegt wird.

Aus der Gleichung 2) folgt zunächst, dass die Differenz der beiden specifischen Wärmen $c_1 - c$ für das ideale Gas einen constanten, von Dichtigkeit und Temperatur unabhängigen Werth hat. Dasselbe gilt daher für alle wirklichen Gase nur in dem Maasse, als sich ihre Eigenschaften denen des idealen Gases annähern. Von einem zum andern Gase ändert sich die Constante. Aus der Gleichung 3) folgt aber, dass das Product $\varrho\,(c_1 - c)$ für alle Gase denselben Werth hat oder dass die Differenz der specifischen Wärmen der Dichtigkeit umgekehrt proportional ist. Bezieht man die specifischen Wärmen auf die Volumeinheit, anstatt auf die Masseneinheit, so ist die

---

*) *J. P. Joule: On the mechanical equivalent of heat. Philosophical Transactions of the London Royal Society* 1850 *p.* 61. Pogg. Ann. Ergänzungsband IV. p. 61.

Differenz für alle Gase dieselbe. Setzt man umgekehrt diese Differenz als constant voraus, so kann man daraus, wie es Hoppe*) gethan, den Beweis der Gültigkeit des Princips der Aequivalenz von Arbeit und Wärme für alle Kreisprocesse mit Gasen herleiten. Die bei den wirklichen Gasen vorkommenden Abweichungen werden am Schluss des vierten Artikels besprochen werden. Die Versuche von Regnault**) haben übrigens ergeben, dass die specifische Wärme c_1, also auch c für atmosphärische Luft und andere permanente Gase von Druck und Temperatur nicht merklich abhängig ist. Wir werden dies für das ideale Gas um so mehr annehmen dürfen.

Wird ein Gas comprimirt, indem man ihm alle dabei erzeugte Wärme von aussen entzieht, so dass seine Temperatur constant bleibt, so ist die dabei verbrauchte Arbeit und gleichzeitig das Aequivalent der gewonnenen Wärme

$$5) \quad -\int_{v_0}^{v_1} p \,.\, dv = -Am(c_1 - c) \,.\, t \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v} = A \,.\, m(c_1 - c)\, t \log \frac{v_0}{v_1}$$

indem bei der Integration t als Constante zu betrachten ist. Daraus folgt das von Dulong***) auf empirischem Wege gefundene und mit folgenden Worten ausgesprochene Gesetz „dass alle Gase, wenn man bei gleicher Temperatur und unter gleichem Druck ein gleiches Volumen von ihnen nimmt und plötzlich um einen gleichen Bruchwerth dieses Volumens zusammendrückt oder ausdehnt, eine gleiche absolute Wärmemenge entwickeln oder verschlucken." Der Werth des Products $m(c_1 - c)$ ist nämlich, wie wir oben gesehen, für alle gleichen Gasvolumina derselbe.

Wir haben die Gleichung 2) aus der Vergleichung der beiden Processe hergeleitet, dass man einem Gase von aussen eine Wärmemenge zuführt, während entweder das Volumen oder der Druck unverändert bleibt; bei Herleitung der Gleichung 5) liessen wir Druck und Volum variiren und setzten die Temperatur constant. Wir wollen endlich noch den Fall betrachten, dass man das Gas comprimirt oder unter Ueberwindung eines Gegendruckes sich ausdehnen lässt, ohne ihm von aussen Wärme zuzusetzen oder zu entziehen.

Wenn ein ideales Gas sich vom Volum v zum Volum $v + \Delta v$ ausdehnt, ohne einen Druck zu überwinden, so bleibt die in ihm enthaltene Wärmemenge, sowie seine Temperatur ungeändert. Dehnt es sich dagegen unter Ueberwindung des Druckes p aus, so wird dabei die Arbeit $p \,.\, \Delta v$ geleistet, mithin die Wärmemenge $\frac{1}{A} \,.\, p \,.\, \Delta v$ verbraucht, und das Gas erleidet eine Temperatur-Erniedrigung, die zu bestimmen ist. Um die ursprüngliche

*) Poggendorffs Annalen XCVII. 30.

**) *Comptes rendus de l'acad. des sciences de Paris XXXVI.* 676. Pogg. Annalen LXXXIX. 335.

***) Pogg. Ann. XVI. 476. Vergl. Carnot: *Réflexions sur la puissance motrice du feu. Paris* 1824 *p.* 41, *p.* 52.

Temperatur wieder herzustellen, müsste dem Gase bei constantem Volum die Wärmemenge $\frac{1}{A} . p . \Delta v$ zugeführt werden. Da aber $m . c$ Wärmeeinheiten die Temperatur des Gases bei constantem Volum um 1° erhöhen, so beträgt der durch die Wärmemenge $\frac{1}{A} p . \Delta v$ zu ersetzende Temperaturverlust $\frac{p . \Delta v}{A . m . c}$ oder wenn wir den Temperaturzuwachs mit Δt bezeichnen, so ist

6) $$A . m . c . \Delta t = - p . \Delta v.$$

Aus 2) folgt

$$A . m . (c_1 - c) . \Delta t = p . \Delta v + v . \Delta p$$

und durch Addition dieser beiden Gleichungen

7) $$A m c_1 \Delta t = v . \Delta p.$$

Durch Combination der Gleichungen 6) und 7) mit 2) folgt leicht, indem man den Quotienten der specifischen Wärmen $\frac{c_1}{c}$ mit γ bezeichnet,

8) $$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\Delta t}{t},$$

9) $$\frac{\Delta p}{p} = - \gamma \frac{\Delta v}{v},$$

10) $$\frac{1}{\gamma - 1} . \frac{\Delta t}{t} = - \frac{\Delta v}{v}.$$

Das Symbol Δ ist anstatt d in obigen Formeln gebraucht, um Verwechselungen zu verhüten, da die Incremente in diesen Formeln eine andere Bedeutung haben als in den früheren. Durch Integration erhält man

11) $$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{t_1}{t_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{\gamma}.$$

Diese Formeln stimmen übrigens mit denjenigen vollkommen überein, welche Poisson*) auf andre Weise aus der Definition der specifischen Wärmen und unter der Voraussetzung, dass das Verhältniss derselben eine Constante ist, hergeleitet hat. Auf der Gleichung 8) beruht das Verfahren, dessen sich Clément und Désormes**), sowie nach einer nur wenig verschiedenen

---

*) *Traité de mécanique T. II.* §§. 634, 638. Der Unterschied beider Herleitungen liegt im Wesentlichen darin, dass die mechanische Wärmetheorie über den Grund Rechenschaft giebt, weshalb die specifische Wärme c_1 grösser als c ist, während man dies früher einfach als Erfahrungsthatsache hinnahm oder mit dem unklaren Ausdruck von frei oder latent werdender Wärme zu erklären suchte. Die Laplace'sche Formel für die Schallgeschwindigkeit bleibt daher auch bei der neuen Auffassungsweise ganz ungeändert. Herr Decher hat also Unrecht, wenn er meint (Dinglers polytechn. Journ. CXLVIII. 178. Mai 1858) dass das Verhältniss γ in der mechanischen Wärmetheorie gar keine Bedeutung habe.

**) *Journ. de physique Nov.* 1819; *Laplace: Mécanique céleste T. V. p.* 148.

Methode Gay-Lussac und Welter*) bedient haben, um die Constante γ zu bestimmen. Clément und Désormes fanden im Mittel $\gamma = 1{,}35$; Gay-Lussac und Welter $\gamma = 1{,}3748$. Wie bekannt, geht die Grösse γ in die von Laplace**) aufgestellte Formel für die Schallgeschwindigkeit ein und die directe Beobachtung der letzteren giebt ein Mittel zu einer sicheren Bestimmung von γ. Dulong***) leitet aus der Schallgeschwindigkeit von 333^m (genauer 332,05) wie sie sich aus den im Jahre 1823 von Moll†), von Beek und Kuytenbrouwer angestellten Versuchen ergeben, den Werth 1,421 ab, der sich mit Rücksicht auf die Correction wegen des Wasserdampfgehalts der Luft auf

12) $$\gamma = 1{,}413$$

reducirt.††) Natürlich gilt dieser Werth nur für atmosphärische Luft. Für andere Gase ergiebt sich γ durch Vergleichung der Schallgeschwindigkeit mit der in atmosphärischer Luft stattfindenden durch die Tonhöhe von Pfeifen, die mit diesen Gasen gefüllt sind. Die Formel 10) enthält den zweiten Theil des von Dulong (a. a. O.) aufgestellten Gesetzes, welches übrigens nur für kleine Compressionen gilt, „dass nämlich die bei der oben erwähnten Compression erfolgenden Temperaturänderungen sich umgekehrt wie die specifischen Wärmen bei constantem Volum (bezogen auf die Volumeinheit) verhalten.“ Es ist nämlich

$$\frac{\Delta t}{t} = -\frac{c_1 - c}{c} \cdot \frac{\Delta v}{v} = -\frac{c_1{}^1 - c^1}{c^1} \cdot \frac{\Delta v}{v},$$

wenn $c_1{}^1$ und c^1 die specifischen Wärmen, bezogen auf gleiche Volumina, bezeichnen; $c_1{}^1 - c^1$ hat, wie oben bewiesen, für alle Gase denselben constanten Werth; t, v und Δv sollen bei den verschiedenen Gasen gleichgenommen werden, also ist die Temperaturerhöhung Δt umgekehrt proportional c^1.

Das Carnot'sche Princip in der mechanischen Wärmetheorie besteht bekanntlich darin, dass, wenn in irgend einem Kreisprocess, bei welchem also der vermittelnde Körper schliesslich wieder in seinen Anfangszustand zusückkehrt, eine Quantität Wärme in Arbeit umgewandelt wird, gleichzeitig ein anderes Wärmequantum von einem Körper höherer, zu einem Körper niederer Temperatur zurückgehen muss. Ein Maximum ist für dieses Wärmequantum nicht angebbar, da ja beliebige Wärmemengen von höherer zu niederer Temperatur durch Leitung und Strahlung übergehen können, ohne dass gleichzeitig Wärme in Arbeit verwandelt wird. Wohl aber giebt das Carnot'sche Princip ein Minimum an und zwar findet

*) *Ann. de chimie et de physique* (2. *ser.*) *XX.* 266; *Laplace*: *Méc. cél. V.* 153.

**) *Ann. de chimie et de physique* (2. *ser.*) *III.* 238; *Méc. cél. V.* 123.

***) *Ann. de chimie* (2. *ser.*) *XLI.* 113; Pogg. Ann. XVI. 438.

†) Pogg. Ann. V. 351, 469.

††) Vergl. Assmann: Pogg. Ann. LXXXV. 1. Die Correction ist unter der allerdings nicht zutreffenden Voraussetzung gemacht, dass γ für Wassergas denselben Werth hat, wie für Luft. Da aber die Correction nur gering und der Werth von γ überhaupt nicht sehr sicher ist, so lassen wir obigen Werth als Annäherung gelten.

ein solches Minimum des Uebergangs statt, wenn der Kreisprocess ein umkehrbarer ist.

Wir wollen uns zunächst dazu wenden, nachzuweisen, dass für jeden Kreisprocess, in welchem Wärme in Arbeit oder Arbeit in Wärme durch Dilatation und Compression idealer Gase umgewandelt wird, das Carnotsche Princip nicht eine neue. der Erfahrung entlehnte Annahme, sondern eine nothwendige Folge der Grundgesetze, welche Druck, Volum und Temperatur der Gase mit einander verbinden und des Princips der Aequivalenz von Wärme und Arbeit ist.

Um den Beweis sogleich mit aller erforderlichen Allgemeinheit zu führen, werden wir uns eine Gasmasse m zu denken haben, welche von einem beliebigen Anfangszustand, der durch bestimmte Werthe der unabhängigen Variabeln v, t gegeben ist, in ihrem Volum, ihrem Druck und ihrer Temperatur irgendwelche mit der Gleichung 2) verträgliche Veränderungen erleidet, indem derselben in jedem Augenblick beliebige Wärmemengen von aussen zugeführt oder entzogen werden, und schliesslich wieder zu ihrem Anfangszustand zurückkehrt. In Betreff dieser Veränderungen soll nur vorausgesetzt werden, dass sie sämmtlich auch in umgekehrter Ordnung vorgenommen werden können, oder dass der Kreisprocess ein vollständig umkehrbarer sei. Dazu sind folgende Bedingungen erforderlich: 1) Das Gas muss, indem es sich ausdehnt, immer einen Druck überwinden, der dem seinigen gleich ist (ausgeschlossen ist also z. B. das Einströmen des Gases in einen luftleeren Raum). 2) Das Gas darf nur von solchen Wärmequellen Wärme aufnehmen, und an solche Körper Wärme abgeben, deren Temperatur von der seinigen unendlich wenig verschieden ist. Dass diese Bedingungen praktisch nie vollkommen erfüllt werden können, ist an sich klar. Wenn an der Hülle eines Gases Druck und Gegendruck vollkommen gleich sind, so kann eine Aenderung der Bewegung nicht eintreten, oder wenn vorher Ruhe war, überhaupt keine Bewegung erzeugt werden. Aber die Druckdifferenz, welche erforderlich ist, damit das Gas seine Hülle ausdehnt, kann unter jede gegebene Grösse sinken. Wir schreiben zwei Körpern gleiche Temperatur zu, wenn zwischen denselben bei unmittelbarer Berührung kein Wärmeaustausch stattfindet, aber die Temperaturdifferenz, welche für die Wärmeabgabe erforderlich ist, kann beliebig klein sein.*) Die Bedingungen der Umkehrbarkeit des Kreisprocesses sind also praktisch nicht streng zu erfüllen, aber man kann sich denselben beliebig annähern und je grösser diese Annäherung ist, desto besser ist die thermodynamische Maschine, weil der Verlust nutzbarer Wärme durch Uebergang von höherer zu niederer Temperatur sich in demselben Maasse dem vom Carnotschen Princip gebotenen Minimum annähert.

Sind p, v, t, Druck, Volum und Temperatur des Gases in einem belie-

*) Vergl. Carnot, a. a. O. p. 18 Note; p. 25.

bigen Zeitpunkt des Kreisprocesses, so sind diese Variabeln nur durch die Gleichung 2)

$$p \, . \, v = A \, . \, m \, (c_1 - c) \, . \, t$$

verbunden und um den Process völlig zu bestimmen, kann man noch eine zweite willkührliche Relation zwischen denselben annehmen, von deren Beschaffenheit die Wärmemenge abhängt, welche dem Gase in jedem Theile des Kreisprocesses zugeführt oder entzogen werden muss. Ist umgekehrt diese Wärmemenge gegeben, so folgt daraus die Relation zwischen den Variabeln. In jedem Fall kann man sich zwischen dieser Relation und der Gleichung 2) die Temperatur t eliminirt denken, so dass man eine Gleichung zwischen p und v

13) $$f(p, v) = 0$$

erhält. Denkt man sich den Kreisprocess durch eine Curve dargestellt, indem man v als Abscisse, p als Ordinate nimmt, so kann diese Curve algebraisch oder transcendent sein, sie kann, wie es in der Praxis immer der Fall sein wird, in ihren verschiedenen Theilen verschiedenen Gesetzen folgen, kann beliebige Einknickungen (Stetigkeitsunterbrechungen höherer Ordnung) erleiden, nur muss sie in sich geschlossen sein. Der von der Curve begrenzte Flächenraum stellt, wie schon J. Watt bemerkt, die mechanische Arbeit vor, welche in dem Kreisprocess erzeugt oder verbraucht wird, je nachdem man denselben in einer oder der andern Richtung vor sich gehen lässt. Damit die Curve in sich selbst zurücklaufe, genügt die Bedingung, dass, wenn v zu seinem ursprünglichen Werth zurückkehrt, die algebraische Summe aller dem Gase zugeführten Wärmemengen — die entzogenen als negativ gerechnet — ein vollständiges Aequivalent der geleisteten Arbeit bilde; denn wenn diese Bedingung erfüllt ist, so hat das Gas am Ende des Processes dieselbe Temperatur wie am Anfang, also ist auch der Werth von p derselbe. Wir bestimmen die positive und negative Wärmemenge, welche dem Gase in jedem Theile des Kreisprocesses zugeführt werden muss, damit zwischen p und v die gegebene Relation 13) stattfinde. Denken wir uns, dass in einem beliebigen Element des Kreisprocesses v um dv, t um dt, p um dp wächst. Nach 2) ist

$$p \, . \, v = A \, . \, m \, . \, (c_1 - c) \, . \, t$$

mithin

14) $$dt = \frac{p\,dv + v\,dp}{A \, . \, m \, \, (c_1 - c)},$$

die während dieses Elements zur Temperaturerhöhung verbrauchte Wärmemenge ist daher

$$m \, . \, c \, . \, dt = \frac{c}{c_1 - c} \, . \, \frac{1}{A} \, (p\,dv + v\,dp).$$

Die geleistete Arbeit ist $p \, . \, dv$, die dazu erforderliche Wärmemenge

$$\frac{1}{A} \, . \, p\,dv.$$

Also ist die ganze Wärmemenge, welche dem Gase während dieses Vorganges von einem Körper von der Temperatur t mitgetheilt werden muss,

$$15)\qquad \Delta Q = \frac{c_1 p\,dv + c v\,dp}{A(c_1 - c)}.$$

Die während des ganzen Kreisprocesses aufgenommene Wärmemenge ist:

$$16)\qquad Q = \frac{1}{A(c_1 - c)}\int (c_1 p\,dv + c v\,dp),$$

wobei bemerkt werden muss, dass das Integral, über den ganzen Kreisprocess ausgedehnt, nicht verschwindet. Da nämlich das Integral

$$\int (c p\,dv + c v\,dp) = c\int d(pv)$$

über den geschlossenen Kreisprocess ausgedehnt, Null ist, so reducirt sich die gesammte verbrauchte Wärmemenge auf

$$Q = \frac{1}{A}\int p\,dv$$

Die Wärmemenge Q ist also das Aequivalent der während des ganzen Kreisprocesses geleisteten Arbeit $\int p\,dv$.

Nach 2) ist

$$t = \frac{p\,.\,v}{A\,.\,m\,.\,(c_1 - c)}$$

und indem man ΔQ durch diesen Werth dividirt, erhält man

$$17)\qquad \frac{\Delta Q}{t} = m\,[c_1\,d\,(\log v) + c\,d\,(\log p)].$$

Durch Integration über den ganzen Kreisprocess verschwinden beide Theile des in Klammern stehenden Differentialausdrucks einzeln und unabhängig von der zwischen p und v bestehenden willkürlichen Relation und man hat für jeden beliebigen Kreisprocess die merkwürdige Gleichung

$$18)\qquad \int \frac{\Delta Q}{t} = 0,$$

welche den Ausdruck des Carnot'schen Princips bildet in der Form, unter welcher dasselbe zuerst von Clausius*) aufgestellt wurde.

Ist nur eine endliche Anzahl constanter Wärmequellen vorhanden, deren Temperaturen $t_1, t_2 \ldots t_n$ sind, und sind die von ihnen an das Gas abgegebenen positiven oder negativen Wärmemengen $q_1, q_2 \ldots q_n$, so verwandelt sich das Integral in eine Summe:

$$19)\qquad \frac{q_1}{t_1} + \frac{q_2}{t_2} + \ldots + \frac{q_n}{t_n} = 0.$$

Reducirt sich die Zahl der Wärmequellen auf 2, so ist

$$20)\qquad \frac{q_1}{t_1} + \frac{q_2}{t_2} = 0.$$

*) Clausius: Ueber eine veränderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie. Pogg. Ann. XCIII. 481.

Ist $t_1 > t_2$, so ist auch, abgesehen vom Vorzeichen der Wärmemenge, q_1 grösser als q_2 und zwar sind beide Wärmemengen den Temperaturen proportional. Ist bei dem Process Wärme in Arbeit umgewandelt worden, so ist die grössere Wärmemenge q_1 positiv, q_2 negativ. Die Differenz der absoluten Werthe beider Wärmemengen oder ihre algebraische Summe $q_1 + q_2$ ist in Arbeit verwandelt. Der wärmere Körper hat aber nicht nur diese Wärmequantität verloren sondern ausserdem noch die positive Wärmemenge $-q_2$, welche von der Temperatur t_1 zu der niederen Temperatur t_2 übergegangen ist. Ist umgekehrt in dem Process Arbeit in Wärme umgewandelt worden, so ist $q_1 + q_2$ negativ, und da dem absoluten Werthe nach $q_2 < q_1$ sein muss, so ist q_1 negativ, q_2 positiv, d. h. der kältere Körper hat Wärme abgegeben, der wärmere Wärme aufgenommen und zwar hat der letztere mehr aufgenommen als der erstere abgegeben hat. Der Ueberschuss von Wärme ist als Arbeit gewonnen, während gleichzeitig die Menge q_2 von der Temperatur t_2 zu der höheren Temperatur t_1 überging.

Die Gleichung 18) gilt ganz allgemein für alle umkehrbaren Kreisprocesse mit idealen Gasen. Es folgt daraus, dass man auf keine Weise eine Arbeitsmenge aus Wärme erzeugen kann, ohne dass gleichzeitig Wärme von einem wärmeren zu einem kälteren Körper übergeht. Umgekehrt kann nicht Wärme von einem kalten zu einem warmen Körper übergeführt werden, ohne dass gleichzeitig Arbeit in Wärme umgewandelt wird. So weit die Consequenzen der Eigenschaften eines idealen Gases. Die neue Annahme nun, welche im Carnot'schen Princip liegt, ist die, dass diese Ueberführung überhaupt auf keine Weise auch durch Vermittelung beliebiger anderer Körper möglich sei. Daraus folgt die Giltigkeit der Gleichung 18) für alle umkehrbaren Kreisprocesse mit beliebigen Körpern. Im entgegengesetzten Fall würde sich nämlich nachweisen lassen, dass es durch Verbindung zweier Kreisprocesse möglich wäre, Arbeit aus Wärme zu gewinnen, ohne dass gleichzeitig Wärme von einem wärmeren zu einem kälteren Körper überginge.

Die in der Gleichung 18) enthaltene Grösse t ist die durch das Volum eines idealen Gases bei constantem Druck gemessene Temperatur. Da jedoch ein solches ideales Gas eine Abstraction ist, so soll im folgenden Abschnitt eine Definition der Temperatur gegeben werden, welche mit der bisher gebrauchten identisch, aber von der Abstraction eines idealen Gases unabhängig ist und sich auf die mindestens äusserst wahrscheinliche Annahme der Giltigkeit der Gleichungen 18) und 20) für alle umkehrbaren Kreisprocesse mit beliebigen Körpern gründet.

Anmerkung. Es verdient bemerkt zu werden, dass, wenn man unter t nicht die absolute Temperatur der an das Gas Wärme abgebenden oder von demselben Wärme aufnehmenden Wärmequellen, sondern die Temperatur des Gases selbst versteht, wie es in der Ableitung der Gleichung 18) geschehen ist, diese Gleichung auch noch giltig bleibt, wenn die

oben angegebene zweite Bedingung für die Umkehrbarkeit des Kreisprocesses nicht erfüllt ist. Verstösst dagegen ein Theil des Kreisprocesses gegen die erste Bedingung, so erhält das Integral 18) einen von Null verschiedenen, immer negativen Werth, der sich in jedem speciellen Falle nach den gegebenen Gleichungen leicht berechnen lässt. Wenn z. B. das Gas sich vom Volum v_1 zum Volum v_2 ausdehnt, ohne einen äusseren Druck zu überwinden, so wird

$$\int \frac{\Delta Q}{t} = m\,(c_1 - c)\,log\,\frac{v_1}{v_2}.$$

(Vergl. die Bemerkung von Clausius in Pogg. Ann. XCVII. p. 440.)

II. Definition der absoluten Temperatur.

Seit dem Zeitalter Galilei's und der Academia del Cimento haben die Fortschritte der Physik nach und nach eine immer genauere Begriffsbestimmung des Temperaturmaasses mit sich gebracht. Bald erkannte man, dass es nicht gleichgiltig war, welche thermometrische Substanz man anwandte, indem Thermometer, mit verschiedenen Flüssigkeiten gefüllt, von einander abwichen, selbst wenn die Fundamentalpunkte in Uebereinstimmung gebracht waren. Die dadurch entstehende Verlegenheit schien beseitigt, als man in den elastischen Flüssigkeiten eine ganze Gruppe von Körpern auffand, welche in ihrer Ausdehnung durch die Wärme übereinstimmen. Man nahm daher an, dass die Ausdehnung der Gase durch die Wärme dem Temperaturzuwachs proportional sei, oder vielmehr man definirte die Temperatur dadurch, dass man einer bestimmten Volumzunahme jedesmal einen Temperaturgrad entsprechen liess. Spätere genauere Untersuchungen führten zu dem Resultat, dass auch die Gase in ihrer Ausdehnung durch die Wärme kleine Abweichungen von einander zeigen, dass somit jedes Gasthermometer nur ein einseitiges, von der individuellen Natur des angewandten Gases abhängiges Temperaturmaass liefert. Nichtsdestoweniger hat das Luftthermometer bis heute seinen Rang als Normalthermometer behauptet und gewiss mit vollem Recht, da die Abweichungen in der Ausdehnung der permanenten Gase so gering sind, dass sie für alle praktischen thermometrischen Zwecke ausser Acht gelassen werden können. Theoretisch aber stellt sich das Bedürfniss heraus, eine von den individuellen Eigenschaften jedes Körpers unabhängige Definition eines Temperaturgrades zu geben. Man wäre um nichts gebessert, wenn man die Grösse der Temperaturgrade dadurch definirte, dass man einem Körper immer gleiche Wärmemengen mittheilt und seine Temperatur der in ihm enthaltenen Wärmemenge proportional setzte — mit anderen Worten, dass man die Wärmecapacität des Körpers constant setzte — denn wir wissen, dass das Verhältniss der Wärmecapacitäten verschiedener Körper sich mit der Temperatur ändert, und wenn auch gerade wieder bei den permanenten Gasen die

Abweichungen bei den unserer Beobachtung zugänglichen Temperaturen innerhalb der Grenzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler zu liegen scheinen, so können wir doch für gewiss annehmen, dass sie vorhanden sind, und auch dieses Temperaturmaass wäre nur ein Nothbehelf für die Praxis.

Wenn wir aber das Carnot'sche Princip als ein strenges Naturgesetz annehmen, welches, wie das Newton'sche Gravitationsgesetz, seine Bestätigung oder Widerlegung nur in der Erfahrung finden kann, so giebt uns dasselbe ein Mittel an die Hand, ein allgemeines von der besondern Natur jedes einzelnen Körpers unabhängiges Maass der Temperatur aufzustellen, indem wir folgende von Thomson*) aufgestellte Definition des absoluten Temperaturmaasses annehmen:

Wenn irgend eine Substanz, die einem vollkommen umkehrbaren Kreisprocess unterworfen wird, nur von einer Wärmequelle von constanter Temperatur Wärme aufnimmt und nur an einen zweiten Körper von constanter Temperatur Wärme abgiebt, so sind die Temperaturen beider Körper proportional den während des Kreisprocesses aufgenommenen und abgegebenen Wärmemengen**).

Will man noch eine bestimmte Temperatureinheit festsetzen, so kann man die Temperaturdifferenz des schmelzenden Eises und des bei 760^{mm} Quecksilberdruck siedenden Wassers $= 100$ setzen, um die Reduction der Angaben des Centesimalluftthermometers möglichst zu erleichtern. Auf welche Weise es möglich wird, eine Vergleichung zwischen der dieser Definition entsprechenden Thermometerscala und der des Luftthermometers zu gewinnen, werden wir im vierten Abschnitt untersuchen.

III. Einige allgemeine Formeln der mechanischen Wärmetheorie.

Bevor wir zur Betrachtung der vom Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetz abweichenden Gase übergehen, ist es erforderlich, an einige allgemeine Formeln der mechanischen Wärmetheorie zu erinnern, deren wir im Folgenden bedürfen.

Der Zustand einer Flüssigkeitsmasse, welche wir gleich 1 nehmen wollen, lässt sich im Allgemeinen durch die drei Variabeln p, v, t ausdrücken, zwischen welchen eine Bedingungsgleichung stattfindet, welche

---

*) *Philosophical Transactions of the Royal Society of London.* 1854. I. p. 351.

**) Diese Definition soll also nicht etwa das Wesen der Temperatur erklären, eben so wenig als man das Wesen der Kraft erklärt, indem man die Beschleunigung als Maass für dieselbe annimmt, sondern sie soll nur die verschiedenen Temperaturen numerisch vergleichbar machen. Der Begriff der Temperatur kann nur von der Molecularmechanik erklärt, d. h. mit anderen mechanischen Begriffen in nothwendigen Zusammenhang gebracht werden. Vergl. den sechsten Abschnitt.

je nach der Natur der Flüssigkeit verschieden und von welcher die Mariotte-Gay-Lussac'sche ein specieller Fall ist. Man kann daher p als Function der beiden andern, als unabhängigen Variabeln, betrachten. Wachsen diese respective um dv und dt, so wird dabei eine gewisse Wärmemenge ΔQ aufgenommen. Man kann daher setzen

21) $$\Delta Q = M dv + N dt,$$

wo also $M dv$ die Wärmemenge ist, welche bei constanter Temperatur dem dem Volumzuwachs dv und $N dt$ die Wärmemenge, welche bei constantem Volum dem Temperaturzuwachs dt entsprechen würde. Es ist daher N die specifische Wärme bei constantem Volum oder

22) $$N = c.$$

Soll der Druck constant bleiben, so muss die Bedingung

$$\frac{\partial p}{\partial v} dv + \frac{\partial p}{\partial t} dt = 0$$

erfüllt sein, und daraus ergiebt sich der Werth für die specifische Wärme bei constantem Druck

$$c_1 = -M \cdot \frac{\frac{\partial p}{\partial t}}{\frac{\partial p}{\partial v}} + N$$

oder

23) $$c_1 - c = -M \cdot \frac{\frac{\partial p}{\partial t}}{\frac{\partial p}{\partial v}}.$$

Die Grösse M könnte man die specifische Wärme bei constanter Temperatur nennen.

Von der Wärmemenge ΔQ wird ein Theil in äussere Arbeit umgewandelt. Die geleistete äussere Arbeit ist nämlich $p \cdot dv$. Die übrige Wärmemenge

24) $$dQ = \left(M - \frac{p}{A}\right) dv + N \cdot dt$$

wird zur Temperaturerhöhung (Vermehrung der lebendigen Kraft der Molecularbewegung, welche wir Wärme nennen) und zu innerer Arbeit (Entfernung der Molecüle, Aenderung des Aggregat- oder Molecularzustandes) verbraucht. Macht die Flüssigkeit einen Kreisprocess durch, bei welchem v und t schliesslich ihre ursprünglichen Werthe wiedererhalten, auch der Molecularzustand am Ende derselbe ist, wie am Anfang, also die Summe der im ganzen Kreisprocess geleisteten innern Arbeit gleich Null, so verschwindet das über den ganzen Kreisprocess ausgedehnte Integral von dQ, welches auch die Form des Kreisprocesses sein möge, oder der Ausdruck 24)

ist ein vollständiges Differential. Ausnahmefälle, in welchen eine Umwandlung allotroper oder isomerer Zustände in einander, z. B. von Ozon in Sauerstoff, innerhalb des Kreisprocesses vorkämen, würden eine besondere Betrachtung erfordern.

Setzen wir $AdQ = dW$, so ist

25) $$dW = (AM - p)\,dv + ANdt,$$

26) $$\frac{\partial W}{\partial v} = AM - p, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = AN.$$

Die Function W ist in der mechanischen Wärmetheorie unter dem Namen der Wirkungsfunction*) oder *mechanical energy* **) bekannt. Es ist nämlich nach dem Vorhergehenden klar, dass die Summe mechanischen Effects, welche aus der Masseneinheit der Flüssigkeit gewonnen werden kann, indem sie von einem beliebigen Zustand (v, t) in einen andern (v_0, t_0) übergeht, oder umgekehrt die Arbeitsmenge, welche erforderlich ist, dieselbe aus dem letzteren in den ersteren überzuführen, durch die Differenz

$$W(v, t) - W(v_0, t_0)$$

repräsentirt wird.

Da der Differentialausdruck 25) der Bedingung der Integrabilität genügen muss, so ergiebt sich daraus die Gleichung

$$\frac{\partial (AM - p)}{\partial t} = \frac{\partial (AN)}{\partial v}$$

oder

27) $$\frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial v} = \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial p}{\partial t},$$

welche als der analytische Ausdruck des Princips der Aequivalenz der Wärme und Arbeit betrachtet zu werden pflegt.

Diese Gleichung kann dazu dienen, aus dem früher gewonnenen Ausdruck des Carnot'schen Princips 18) die analytische Form herzuleiten, in welcher dasselbe zuerst von Thomson aufgestellt wurde. Setzt man nämlich in 18) für ΔQ seinen Werth 21) und berücksichtigt, dass in Folge von 18) $\frac{\Delta Q}{t}$ ein vollständiges Differential sein muss für alle umkehrbaren Processe, so folgt

$$\frac{\partial \frac{M}{t}}{\partial t} = \frac{\partial \frac{N}{t}}{\partial v}$$

oder

$$\frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial v} = \frac{M}{t}$$

und mit Rücksicht auf 27)

*) Kirchhoff: Ueber einen Satz der mechanischen Wärmetheorie. Poggend. Ann. CIII. 177.

**) W. Thomson: *On the quantities of mechanical energy contained in a fluid. Phil. Mag.* (4. Ser.) IX. 523.

28) $$A.M = t.\frac{\partial p}{\partial t},$$

welches der von Thomson*) gegebene Ausdruck ist, wenn man in diesem die Carnot'sche Temperaturfunction $\mu = \frac{A}{t}$ setzt. Wird die Gleichung 28) in Beziehung auf t differentiirt, so erhält man mit Rücksicht auf 27):

29) $$A\frac{\partial N}{\partial v} = t.\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

Aus 26) und 28) folgt

30) $$\frac{\partial W}{\partial v} = t\frac{\partial p}{\partial t} - p,$$

31) $$W = \int_{v_0}^{v}\left(t\frac{\partial p}{\partial t} - p\right)dv + \varphi(t),$$

wo v_0 ein beliebig zu wählender Anfangswerth von v und $\varphi(t)$ diejenige noch zu bestimmende Function von t ist, auf welche sich W für $v = v_0$ reducirt. Bezeichnen wir die Function von t, auf welche sich N für $v = v_0$ reducirt, mit N_0, so wird nach 26):

$$\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = A.N_0,$$

folglich

32) $$W = \int_{v_0}^{v}\left(t\frac{\partial p}{\partial t} - p\right)dv + A\int_{t_0}^{t} N_0 dt + const.$$

Die Constante ist offenbar $W(v_0, t_0)$.

Wenden wir diese Gleichungen auf das ideal permanente Gas an, so ist nach 1)

$$p = \frac{k.t}{v}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{v}, \quad t\frac{\partial p}{\partial t} - p = 0,$$

$$W = A\int N_0 dt,$$

oder, da die specifische Wärme bei constantem Volum c für das ideale Gas von der Temperatur unabhängig ist,

33) $$W - W_0 = A.c.(t - t_0),$$

34) $$\frac{\partial W}{\partial t} = A.c, \quad \frac{\partial W}{\partial v} = 0, \quad M = \frac{p}{A}, \quad N = c.$$

Die Wirkungsfunction des idealen Gases ist also eine Function der Temperatur allein und vom Volum (der Dichtigkeit) unabhängig. Es ist dies das Wesentliche der Mayer'schen Annahme. Da nämlich ein ideales Gas, welches sich ausdehnt, ohne Arbeit zu leisten, seine Temperatur nicht ändert, oder da bei Compression des Gases das genaue Aequivalent der ge-

*) *Philosophical Magazine.* (4. S.) IV. p. 169.

leisteten Arbeit als Wärme wieder gewonnen wird, welche man demselben von aussen wieder entziehen kann, indem man es auf seine ursprüngliche Temperatur zurückbringt, so folgt daraus, dass die Wirkungsfunction in beiden Fällen ungeändert geblieben sein muss, indem die Summe der von dem Gase gewonnenen Arbeit und Wärme gleich Null ist.

(Fortsetzung folgt.)

IV.

Beiträge zur Geschichte der Fortschritte in der elektrischen Telegraphie.

Von Dr. Eduard Zetzsche.

I. Die Copirtelegraphen.

Bei den im ersten Jahrgange dieser Zeitschrift Seite 89 ff. kurz beschriebenen Telegraphenapparaten werden die verschiedenen Wirkungen, welche sich mittels elektrischer Ströme fast ohne Zeitverbrauch in beträchtlicher Ferne hervorbringen lassen, benutzt, um eine Nachricht an einen entfernten Ort zu befördern. Bei den Nadeltelegraphen dient die durch den elektrischen Strom herbeigeführte Ablenkung einer oder mehrerer Magnetnadeln oder Stabmagnete, oder zweier mit einander verbundener, um eine Axe drehbarer halbkreisförmiger Magnete (im Bain-Ekling'schen Telegraph) als telegraphisches Zeichen, aus welchem sich durch Wiederholung und Abwechselung in der Ablenkungsrichtung eine Reihe Zeichengruppen bilden lassen, um durch sie die Buchstaben des Alphabetes für die Schriftsprache auszudrücken mit einer Genauigkeit und Bestimmtheit, welche mit der Anzahl der gewählten Gruppen wächst. Bei den Zeigertelegraphen rückt durch abwechselnd hergestellte und unterbrochene elektrische Ströme (entweder in Folge der dabei eintretenden und wieder verschwindenden elektromagnetischen Anziehung allein, oder durch das Zusammenwirken derselben mit einem Uhrwerke, einem Gewichte, einer Feder u. dergl.) ein Zeiger auf einem mit den Buchstaben, Ziffern und anderen Zeichen beschriebenen Zifferblatte schrittweise fort, bleibt endlich auf dem jedesmal zu telegraphirenden Buchstaben u. s. w. stehen und buchstabirt so dem Telegraphisten die Depesche vor. Die elektromagnetischen und elektrochemischen Schreib- und Drucktelegraphen endlich lassen auf einem durch ein Räderwerk mit Gewicht in Bewegung gesetzter

Papierstreifen gewisse Zeichen (Punkte und Striche) entstehen*), aus denen ebenfalls Gruppen zur Bezeichnung der Buchstaben, Ziffern und anderer Schriftzeichen gebildet werden; und zwar erzeugt bei den elektrochemischen Telegraphen der Strom unmittelbar die Zeichen als farbige Linien auf und in dem feuchten, vorher mit Cyankalium- oder Jodkaliumlösung und Stärkekleister getränkten Papiere, da er durch das Papier selbst geleitet wird und dasselbe so oft und so lange er hindurch geht, unter Zersetzung des Jod- oder Cyankaliums violet oder braun färbt; während bei den Druckapparaten ein Hebel durch elektromagnetische Anziehung vom Strome in Bewegung gesetzt wird und durch einen rein mechanischen Vorgang die Zeichen auf dem Papiere eingräbt, oder mit einer farbigen Flüssigkeit auf dem Papiere aufträgt.

Alle diese Telegraphenapparate sind nun in ihrem Gebrauche insofern einer Beschränkung unterworfen, als man durch sie eben nur eine gewisse, wenn auch beliebig grosse Anzahl vorher verabredeter Zeichen von bestimmter Bedeutung in die Ferne senden kann; wenn man durch sie auch jede in Worten ausgedrückte Nachricht telegraphiren kann, so lassen sich doch z. B. Zeichnungen, Karten, Pläne, Copien von Handschriften und Stenographien u. s. w. durch sie nicht weiter geben. Gleichwohl kann dies unter Umständen höchst wünschenswerth sein, wäre es auch nur, um in allen Fällen in einer treuen Nachbildung der Unterschrift des Aufgebers einer einlangenden Mittheilung ein sicherers Merkmal für die Beurtheilung der Aechtheit der Mittheilung zu besitzen. Noch wichtiger aber würde es sein, wenn man durch die Anwendung eines solchen Copirtelegraphen (d. h. eines Apparates, welcher telegraphisch an einem entfernten Orte eine getreue Abbildung irgend eines Schriftstückes entstehen lässt) die Mittheilung zugleich von dem die Mittheilung vermittelnden Telegraphisten unabhängig machen könnte, weil dadurch jede sonst vielleicht mögliche Irrung unmöglich gemacht würde. Die Lösung der in Rede stehenden Aufgabe ist von verschiedenen Seiten versucht worden, ohne dass sie bis jetzt vollkommen und für die Praxis anwendbar geglückt wäre.

Wenn eine Walze sich um ihre Axe dreht und dabei gleichzeitig in ihrer Axenrichtung in einer mit der Umdrehung gleichen Schritt haltenden Weise verschoben wird, so beschreibt ein fester Punkt auf ihrer Oberfläche eine Schraubenlinie, denn es kommen nach und nach alle auf dieser Schraubenlinie liegenden Punkte an dem festen Punkte vorbei. Ist der feste Punkt irgend ein die Walze berührender Schreibstift, so wird die Schraubenlinie auf der Walze selbst sichtbar; genau dieselbe Wirkung erhält man aber auch, wenn man der Walze blos eine drehende Bewegung ertheilt und gleichzeitig den Schreibstift über die Walze hin- und herführt.

*) Dasselbe geschieht zwar auch bei dem Steinheil'schen Telegraph, welcher jedoch nach seiner sonstigen Einrichtung (vergl. Jahrg. I., S. 90) zu den Nadeltelegraphen gehört.

Die einzelnen Windungen dieser Schraubenlinie liegen um so enger aneinder, eine je kleinere Längenverschiebung der Walze während einer Umdrehung ertheilt wird, und man hat es sonach in der Hand, den Schreibstift möglichst viel Punkte der Oberfläche berühren zu lassen. Denken wir uns nun auf zwei mit einander in Verbindung gesetzten Telegraphenstationen zwei solche Walzen von Metall von gleicher Grösse, welche auch durch zwei gleiche Uhrwerke in einem völlig übereinstimmenden und gleichmässigen Gange erhalten werden, so beschreiben die beiden metallenen Schreibstifte auf den beiden Walzen genau dieselbe Schraubenlinie. Wird jetzt die telegraphisch zu copirende Zeichnung mit einem die Elektricität nicht leitenden Materiale (z. B. Harzfirniss) auf eine leitende Platte (etwa Stanniol, angefeuchtetes Goldpapier u. dergl.) aufgetragen und auf die Walze der telegraphirenden Station gelegt, so dass der mit dem einen Batteriepole verbundene Schreibstift darauf ruht, während die Walze selbst durch die Luftleitung mit dem Schreibstifte der empfangenden Station verbunden ist, steht ferner die dortige Walze ebensowohl, als der zweite Batteriepol der gebenden Station mit der Erde in leitender Verbindung, und ist endlich zwischen dem Schreibstifte und der Walze der Empfangsstation ein leitendes Zwischenmittel vorhanden, so ist der Kreis der Batterie geschlossen, so lange der Schreibstift der gebenden Station über einen Theil der leitenden Platte hinweggeht, und der demnach beständig vorhandene Strom wird nur unterbrochen, wenn der Schreibstift über einen Zug der zu copirenden Zeichnung gleitet. Ist aber auf der Empfangsstation das leitende Zwischenmittel zwischen Stift und Walze ein mit Cyankalium- oder Jodkaliumlösung und Stärkekleister getränktes feuchtes Papierblatt, so wird dieses ganze Blatt mit engen, farbigen Schraubenlinien überzogen und bleibt nur an den Stellen weiss, welche den mit der Zeichnung versehenen Stellen des Originals entsprechen. Original und Copie würden sich dann zu einander verhalten, wie es Fig. 1 u. 2 auf Taf. I. anschaulich machen. Wären dagegen in der Originaldepesche nur die Züge der Zeichnung leitend, der übrige Grund aber nicht leitend, so entstünde in der Copie die Zeichnung als ein aus lauter kleinen Strichen bestehender farbiger Zug auf weissem Grunde, wie es Fig. 3 auf Taf. I. zeigt.

Der erste Apparat dieser Art wurde von dem Amerikaner F. C. Bakewell (in Hampstead) vorgeschlagen*) und im Modell im November 1850 in London behufs der Anstellung von Versuchen ausgestellt; die Illustrated London News brachte die erste Mittheilung darüber in der Nummer vom

*) Nicht von dem englischen Mechaniker Bain, welcher sich aber am 12. December 1846 einen elektrochemischen Telegraphen hatte patentiren lassen, der gewissermaassen auch copirt; zwei Schreibstifte liegen auf einer Metallwalze auf und schreiben die Depesche in Zeichengruppen auf einen zwischen beiden durchgehenden chemisch präparirten Papierstreifen; in dieselben Zeichengruppen übersetzt wird die Originaldepesche auf einen Papierstreifen übertragen, auf welchem sie zwei Reihen (ausgeschlagener) Löcher bildet; auf der telegraphirenden Station läuft der Streifen

16. November, die Beschreibung und Abbildung in der Nummer vom 23. November 1850. Danach wurde die Depesche mit Firniss auf Zinnfolie geschrieben und auf die durch ein Gewicht in Umdrehung versetzte Walze aufgelegt; ein Zahnrad an der Walze greift in ein anderes ein und dreht durch dasselbe eine parallel zur Walze liegende, fein geschnittene Schraubenspindel um, auf welcher als Mutter eine Hülse sitzt, die den Schreibstift trägt; letzterer wird sich somit beim Umdrehen der Walze über dieselbe hinbewegen. Auf der Empfangsstation liegt auf der Walze ein mit blausauerem Kali (besser mit gelbem Blutlaugensalz) getränktes und mit verdünnter Salzsäure befeuchtetes Papier, auf welchem der Strom durch Zersetzung der Salzsäure blaue Linien von Berlinerblau entstehen lässt, welche entlang den Zeilen der Schrift laufen, wie in Fig. 2. Die Geschwindigkeit der Mittheilung hängt von der Grösse der Schrift und dem grösseren oder geringeren Abstande der Schraubenlinien von einander ab. Das Depeschengeheimniss lässt sich durch Anwendung einer Geheimschrift, oder auch dadurch gewährleisten, dass man den Papierstreifen blos mit verdünnter Salzsäure befeuchtet, wodurch die Depesche unsichtbar wird und erst auf dem Streifen sichtbar hervortritt, wenn der Empfänger den Streifen in eine Lösung von blausauerem Kali taucht. — So einfach indessen auch der von Bakewell angegebene Apparat erscheint, so sind doch die der Anwendung desselben entgegenstehenden praktischen Schwierigkeiten zu wesentlich, als dass der Apparat eine allgemeinere Verbreitung hätte finden können. Denn abgesehen davon, dass der Apparat, wie alle chemischen, wenig zuverlässig ist, wenn nicht das präparirte Papier einen durch und durch gleichen Feuchtigkeitsgrad besitzt und in ihm erhalten wird, dass beim Austrocknen des Papiers die Leitung förmlich unterbrochen und ein Telegraphiren völlig unmöglich wird, und dass er endlich auch kein hörbares Zeichen giebt und deshalb fasst unentbehrlich noch mit einer Weck- und Ruf-Vorrichtung zu verbinden wäre: so ist es durchaus nicht leicht, die Hauptbedingung zu erfüllen, nämlich zwei oder gar mehrere (obendrein wiederholt zu arretirende und an verschiedenen Orten befindliche) Apparate durch Uhrwerke in einem ganz gleichmässigen Gange zu erhalten, ohne welchen doch die Schriftzüge verzerrt erscheinen würden. Deshalb brachte schon Bakewell einen elektromagnetischen Regulator an; entweder ein Pendel auf jeder Station, welches an einer gewissen Stelle seiner Schwingungsbahn an eine Feder anstreifte und so eine Batterie schloss, in deren Kreis ein Elektromagnet eingeschaltet war und durch Einrückung

über eine Walze mit 2 gegen einander isolirten Metallringen, und auf ihm schleifen 2 mit 2 Batterien verbundene Federn, welche jedesmal einen Strom durch die Linie senden, so oft ihre Spitze durch ein Loch im Streifen hindurch den darunter liegenden Metallring berührt. 1851 liess Bain den einen Stift weg und ersetzte den präparirten Papierstreifen durch ein auf einer ebenen Metallscheibe liegendes Blatt Papier, auf welches der Schreibstift die durch Gruppen von Strichen und Punkten in einer Reihe ausgedrückten Buchstaben in einer Spirallinie niederschrieb.

einer Sperrklinke in ein Rad des Apparates dessen Gang regulirte; oder ein kleines Metallrad am gebenden Apparate, welches durch Schliessen und Oeffnen einer Batterie auf einen Elektromagnet auf der Empfangsstation wirkte und durch diesen den Gang des empfangenden Apparates regulirte.

Die Nachricht dieser Erfindung verbreitete sich bald auch in Deutschland. Die deutsche allgemeine Zeitung brachte 1851 in Nr. 181 einen Bericht über die am 3. April d. J. zwischen London und Brigston angestellten gelungenen Versuche, und die Weserzeitung theilte nach einer Correspondenz aus New-York von einer Modification des Apparates unter Anderm mit, dass „die sich drehende Walze bei jeder Umdrehung um $\frac{1}{50}$ Zoll zur Seite rücke*), so dass ein Zeitungsbogen von 20 Zoll Breite in 1300 Umdrehungen auf 1 Seite mit schraffirten Linien bedeckt worden sei. Bei einer Umdrehungsgeschwindigkeit von 6 Fuss könne man in einer Minute 86 Quadratzoll Papierfläche, oder die Seite eines mässigen Briefbogens mit telegraphischer Schrift bedecken.“ Durch die Zeitungsnachrichten veranlasst, construirte der Mechanikus Matth. Hipp in Reutlingen 1851 einen ähnlichen Copirtelegraph, dem er folgende Einrichtung gab: Die Walzen werden durch ein Uhrwerk um ihre Axe gedreht und gleichzeitig in ihrer Axenrichtung verschoben; die Depesche wird mit einer die Elektricität nicht leitenden Tinte auf Gold- oder Silberpapier geschrieben, über welchem der metallene Stift befestigt ist; auf der Empfangsstation wirkt der Strom auf einen Elektromagnet, mit welchem ein Schreibstift (eine Glasfeder) verbunden ist, welcher „innen mit Tinte gefüllt“ ist und das auf der Walze liegende gewöhnliche Papier berührt, wenn der Anker des Elektromagnetes abfällt, sich dagegen von ihm entfernt, wenn der Anker angezogen ist. Werden also die beiden gleichen Walzen gleichmässig bewegt, so lässt der Schreibstift auf dem Papiere auf weissem Grunde eine aus kleinen Strichen gebildete Nachbildung der Schriftzüge des Originals entstehen. (Vergl. Fig. 3, Taf. I.)

Auf der Londoner Ausstellung hatte auch Th. du Moncel in Paris eine Probe der mit dem Apparate von Bakewell erzeugten Schrift gesehen und construirte danach kurz darauf einen Copirtelegraph, bei welchem die Walze A (in Fig. 5, Taf. I.) durch ein Uhrwerk (mit einem conischen Pendel von Bain als Regulator) umgedreht wird; über die Walze läuft ein langer Papierstreifen CD von der Rolle B, und auf diesem liegt der Stift E, welcher von demselben Uhrwerke aus durch die excentrische Scheibe F und den um H drehbaren Hebel GE in einer zickzackförmigen Bewegung

*) Um diess zu bewerkstelligen, dürfte man nur die Walzen W und W_1 in Figur 4 (Taf. I.) auf Schraubenspindeln S und S_1 stecken, auf denen sie sich dann bei ihrer Umdrehung fortschrauben; die Schreibstifte α und α_1 liegen dann fest, und der Strom geht von der Batterie B der telegraphirenden Station durch α_1 nach W, S durch die Luftleitung L durch α_1 und W_1 und durch die Erdplatten E_1 und E nach B zurück.

über den Streifen hin- und hergeführt wird. Auf der gebenden Station ist der Streifen von Zinnfolie und die nicht leitende Schrift läuft entlang demselben, auf der empfangenden aber ist der Streifen ein mit blausauerm Kali getränktes Papier. Als Regulator dient auf jeder Station ein durch ein Relais in und ausser Thätigkeit gesetzter Elektromagnet, welcher auf die Linse des Pendels im Uhrwerk wirkt und dieselbe nach Bedarf in einer Lage ausser der Verticalen festhält. Beim Beginn des Telegraphirens lassen diese Elektromagnete auf den beiden correspondirenden Stationen die Uhrwerke los und reguliren dann deren Gang.

Am 26. Februar 1855 legte Seugraff der Academie der Wissenschaften in Paris einen Vorschlag zu einem Copirtelegraph vor, über dessen Einrichtung aber weiter Nichts bekannt geworden ist.

Im Juni 1856 (also 6 Jahre nach Bakewell) trat der Abbé Giovanni Caselli in Florenz mit einem „neuerfundenen" Copirtelegraph hervor, den er Pantelegraph taufte; aber erst im December 1858 wurde die neue Erfindung einigermaassen näher beschrieben. Die Depesche wird mit gewöhnlicher Feder und gewöhnlicher Tinte auf ein Papier geschrieben, welches durch einen dünnen Ueberzug von Zinn oder Silber metallisirt ist; dieses Papier wird in dem Apparat zum Zeichengeben zwischen zwei Metallwalzen gebracht, welche sich durch ein Uhrwerk in entgegengesetztem Sinne umdrehen, und während das Papier durch die Umdrehung der beiden Walzen gleichmässig um einen Bruchtheil eines Millimeters fortrückt, läuft eine Platinspitze in gerader Linie quer über seine Oberfläche. Gleichzeitig rückt auf der Empfangsstation ein chemisch vorbereitetes Papier zwischen zwei ähnliche Metallwalzen um einen gleichen Millimeterbruchtheil fort, und es läuft über dasselbe ebenfalls eine Eisen- oder Stahlspitze und lässt auf ihm eine getreue Abbildung der Züge der Originaldepesche entstehen, und zwar in blauer, rother oder gelber Farbe auf weissem Grunde. Die Uebereinstimmung und Gleichzeitigkeit in den mechanischen Bewegungen sucht Caselli durch zwei Pendel von gleicher Schwingungszeit auf folgende Weise zu erlangen: die beiden gleichen Pendel sind auf den beiden Stationen an einer horizontalen Axe aufgehängt, mit einem Elektromagnetstab von 20 Kilogramm Gewicht belastet, und stehen durch den telegraphischen Leitungsdraht unter einander der Art in Verbindung, dass der Strom, welcher durch die Leitung geht, auch durch die Pendelstäbe gehen muss. Wenn diese nun den Elektromagnet an ihrem Ende ein wenig aus der Verticalen heraustreten lassen, so wird jeder Elektromagnet durch eine (von der Linien- oder Telegraphirbatterie unabhängige) Localbatterie magnetisirt und von einem im Endpunkte der Schwingung aufgestellten Anker aus weichem Eisen angezogen und festgehalten. Kaum sind aber die Pendel in diese Lage gekommen, so wird der Kreis der Localbatterie durch den Linienstrom unterbrochen, die Elektromagnete entmagnetisirt und durch ihre Schwere zurückgeführt; sie vollbringen nun einen Pendelschlag, bis

sie auf der andern Seite der Vertikalen in gleichem Abstande durch einen zweiten Anker aus weichem Eisen fest gehalten werden, welcher seinerseits ebenfalls gleich darauf von dem Linienstrom durchflossen wird; die Localbatterie wird dadurch wieder unterbrochen, der Elektromagnetismus beseitigt, und das Pendel macht einen neuen Schlag u. s. f. Auf diese Weise regulirt der Linienstrom das Zusammenfallen der Pendelschwingungen und bringt durch sie Uebereinstimmung in die Bewegungen auf beiden Stationen, da sich bei jedem Pendelschlage die beiden Spitzen und Papiere ganz gleich weit bewegen. Dann bleibt der Linienstrom während des ganzen Pendelschlages selbst zur freien Verfügung und circulirt während dieser Zeit wirklich von der Platinspitze der telegraphirenden Station durch die Leitung zur Stahlspitze der Empfangsstation, durch die metallenen Walze, die Papiere u. s. w. Da nun die Tinte, mit welcher die Originaldepesche geschrieben wurde, ein schlechter Leiter ist, so wird der Linienstrom jedesmal, wenn die Platinspitze über einen Schriftzug hinweggeht, minder intensiv, und es tritt eine Aenderung in der steten Einwirkung des Stromes auf das chemische Papier der Empfangsstation ein; auf eine ganz einfache, aber von Caselli noch geheim gehaltene Weise, nämlich kehrt sich zugleich mit der Abnahme der Stromstärke plötzlich die Polarität der Stahlspitze auf der Empfangsstation aus dem positiven ins negative um, und diese Umkehrung lässt auf dem Papierstreifen die Züge der Depesche farbig hervortreten. — Caselli behauptet, dass man zwei Depeschen zugleich in entgegengesetzter Richtung auf demselben Drahte befördern könne; dabei wäre die Beförderung äusserst schnell und bei Anwendung der Stenographie könne man den absolut höchsten Grad von Schnelligkeit erreichen. Nach den Versuchen des Erfinders kann man in einer Minute eine Depesche von einem Quadratdecimeter (= 16 Quadratzoll) abtelegraphiren; auf diesen Raum gehen aber etwa 500 Buchstaben bei gewöhnlicher Schrift, oder 3000 bei Stenographien. Jenachdem die Spitzen in kleineren oder grösseren Zwischenräumen quer über das fortrückende Papier rücken und engere oder weitere Linien darauf beschreiben, wird die Depesche mehr oder weniger vollkommen, natürlich auf Kosten der Geschwindigkeit der Beförderung, welche indessen selbst bei den vollkommensten, dem Originale völlig gleiche Depeschen die Beförderung mittels sonst üblicher Telegraphen bei weitem übertreffen soll. — Während nicht telegraphirt wird, dürften die Pendel in den Endpunkten ihrer Schwingung festgehalten werden. Der Umstand, dass bei der Intensitätsveränderung des Linienstroms die Polarität der Stahlspitze in die entgegengesetzte umschlägt und dadurch eben die chemische Einwirkung erfolgt, lässt befürchten, das der Pantelegraph auch jede zufällige Schwächung des Linienstroms mit verzeichnet und niederschreibt, wodurch seine Zuverlässigkeit sehr in Frage gestellt werden würde. Ein bestimmteres Urtheil darüber ist zur Zeit nicht möglich, da eine ausführlichere Beschreibung noch fehlt.

Am 9. November 1858 endlich wurde Richard Archibald Brooman in London ein Copirtelegraph als Mittheilung patentirt, zugleich mit einem Vorschlage zur Beseitigung der Rückschläge beim Telegraphiren. Wenn nämlich ein elektrischer Strom unterbrochen wird, so durchläuft eine Reaction den ganzen Schliessungskreis, deren Dauer der Länge des Schliessungskreises proportional ist. Wurde z. B. beim Atlantischen Telegraphentau der Kreis nach dem Geben eines Zeichens unterbrochen, so musste man eine lange Zeit verfliessen lassen, bevor man ein neues Zeichen geben konnte, nämlich bis die Rückströme zur Ruhe gekommen waren und der Schliessungskreis seine normale Beschaffenheit wieder angenommen hatte. Um diesen Verzug zu umgehen und die Beförderung der Depesche mit der Schnelligkeit zu ermöglichen, welche die mechanische Handhabung der Apparate zulässt, ordnet Brooman die Linienbatterie so an, dass der Kreis beständig geschlossen bleibt und nie unterbrochen wird. Dabei wird vorausgesetzt, dass der Linienstrom auf der andern Station die Zeichen durch eine magnetische Einwirkung hervorruft. Wenn man zwei entfernte Stationen durch einen Leiter verbindet, und beide in denselben Schliessungskreis dergestalt einschaltet, dass der Linienstrom an beiden Stationen Körper umkreist, auf die er eine elektromagnetische Wirkung äussern kann, z. B. die Ablenkung einer Magnetnadel oder die magnetische Induction in den Eisenkern eines Elektromagnetes, so ist die Induction oder Ablenkung abhängig von der Stärke des elektrischen Stromes. Lässt also ein elektrischer Strom einen Elektromagnet seinen Anker in einer gewissen Entfernung etwa mit einer Kraft von 1 Pfunde anziehen, so bleibt der Anker trotz der Einwirkung des Stromes unbeweglich, wenn wir den Anker so einrichten, dass erst eine Kraft von 2 Pfund ihn in Bewegung setzen kann, und wir müssen die Batteriekraft vergrössern, wenn der Strom den Anker bewegen soll. Es würde daher der Anker zwar angezogen werden und wieder zurückgehen, aber es würden keine Rückschläge erfolgen (oder sie würden von dem beständig in der Linie beibehaltenen Strom überdeckt), wenn wir die Batteriekraft verstärken und vermindern könnten, ohne dabei den Kreis zu unterbrechen. Um diess zu erreichen, theilt Brooman die Batterie in zwei oder mehrere Gruppen, von denen die eine zwar beständig in den Kreis eingeschaltet ist, aber einen Strom in die Linie sendet, welcher auch stark genug ist, um den Anker vom Elektromagnet anziehen zu lassen, während die anderen Gruppen beim Telegraphiren durch den Zeichengeber eingeschaltet werden und dann die telegraphischen Zeichen auf der andern Station hervorrufen. — Um nun auf einer zweiten Station eine genaue Nachbildung einer geschriebenen oder gedruckten Depesche schnell und zuverlässig entstehen zu lassen, wird letztere mit einer so substantiellen (nicht leitenden) Tinte niedergeschrieben, dass sie von dem Papiere auf eine Metallfläche übertragen werden kann, nämlich auf eine Metallwalze, welche durch ein niedergehendes Gewicht an einem Uhrwerke

in Umdrehung versetzt wird. An dem Gestell der Walze ist ein Hebel befestigt, jedoch isolirt gegen die Walze; derselbe liegt mit einer kleinen Rolle an dem einen seiner Enden auf der Walze und ist am andern Ende mit dem Schliessungskreise verbunden; wenn nun die Rolle die blanke Oberfläche der Walze berührt, so ist der Kreis geschlossen, wird aber unterbrochen, sowie die Rolle über einen beschriebenen Theil der Walze hinweggeht. Der Stützpunkt des Hebels erhält eine seitliche Bewegung, durch welche der Hebel nach und nach von einem Ende der Walze bis zum andern hinbewegt wird, mit einer der Umdrehung der Walze angemessenen Geschwindigkeit, so dass die Rolle nach und nach die ganze Oberfläche der Walze überstreicht. Diess ist der Apparat zum Zeichengeben. In dem Apparate zum Aufnehmen und Niederschreiben der Depesche befindet sich eine Walze von gleichem Durchmesser und gleicher Länge mit derselben Hebelvorrichtung, nur dass der Hebel einen Schreibstift an dem einen und einen Anker aus weichem Eisen an dem andern Ende trägt. Unter dem Anker steht ein Elektromagnet, dessen Spulen in den Schliessungskreis des Linienstroms eingeschaltet sind. So oft nun auf der telegraphirenden Station die Rolle des Hebels auf einer blanken Stelle der Walze liegt, geht der Strom auf der empfangenden Station durch die Spulen des Elektromagnetes, der Anker geht nieder, und der Schreibstift legt sich auf die Walze und schreibt auf das Papier, mit dem sie überkleidet ist, ein schwarzes Zeichen, setzt aber ab, sobald die Rolle auf eine beschriebene Stelle kommt. — Dieser Copirtelegraph ist also von den oben genannten Mängeln der chemischen Telegraphen frei; da er schwarze Zeichen auf das Papier schreibt, so lässt sich vermuthen, dass es in ähnlicher Weise geschieht, wie bei dem bereits erwähnten Telegraph von Hipp, und demnach dürfte nach den vorliegenden Erfahrungen an ähnlichen Apparaten seine Leistung minder ausgezeichnet und zuverlässig sein. Bei der eben mitgetheilten Anordnung erscheint die copirte Schrift als weisse Zwischenräume auf schraffirtem Grunde. Die Schrift würde dagegen in farbiger Schraffirung auf weissem Grunde erscheinen, wenn der Schreibstift für gewöhnlich auf der Walze aufläge und durch die Stromwirkung abgezogen würde, wenn die Rolle auf eine blanke Stelle gelangt. Gleiches erlangt man, wenn man die beiden correspondirenden Stationen so mit einander verbindet, wie Fig. 6, Taf. I. zeigt; liegt hier der Hebel *ab* auf einer blanken Stelle, so ist die Batterieabtheilung *II* durch die Walze *c*, durch *b* und die Schliessungsdrähte *d* und *e* kurz geschlossen, und nur die Abtheilung *I* sendet durch *d* und *e* zugleich über *a* und die Luftleitung *L* einen Strom durch die Rollen des Elektromagnets *M* (dessen Anker daher nicht angezogen wird), und der Strom kehrt durch die Erde *E* nach *I* zurück; liegt dagegen *ab* auf einem isolirenden Schriftzuge, so senden *I* und *II* vereinigt ihren Strom durch *M*, welcher jetzt seinen Anker *A* anzieht, so dass der am andern Ende des Hebels befindliche Reibstift (vielleicht mittels eines Relais) auf c_1 schreibt.

Schliesslich haben wir noch einen von Hipp erfundenen elektrochemischen Copirtelegraph zu erwähnen, welcher von den bisher aufgeführten gänzlich abweicht. Auf jeder Station wird nämlich*) ein metallener Stift über einer Metallplatte durch ein Uhrwerk so bewegt, dass er beständig und auch gleichzeitig mit allen andern Stiften den in Fig. 7, Taf. I. abgebildeten Zug beschreibt. In diesem Zuge sind aber unter Andern die Elemente aller Buchstaben des Alphabetes enthalten. Wenn man daher auf der einen Station auf die Metallplatte einen angefeuchteten, mit der Originaldepesche beschriebenen Papierstreifen legt, und auf der andern Station einen chemisch präparirten Papierstreifen, und wenn man beide durch das Uhrwerk ganz gleichmässig, aber nicht stetig, sondern ruckweise bewegen lässt, und zwar jedesmal, nachdem der Stift seinen Zug vollendet hat; wenn ferner auf beiden Stationen der Stift auf dem Papiere aufliegt und wenn endlich der Telegraphist mittels eines beliebigen Tasters oder Schlüssels einen Strom durch die Linie nach der andern Station senden kann, so oft die Bewegung des Stiftes auf seiner Station mit einem Theile des zu telegraphirenden Schriftzuges zusammenfällt: so wird auf der andern Station ein treues Bild der Schrift entstehen. Ebenso würde man die Umrisse von Zeichnungen copiren können. — Sehr nahe ist dieser Apparat mit dem von Hipp im Jahre 1851 construirten Buchstabentelegraph verwandt, welcher die Depesche gleich in einer für den Empfänger leslichen Schrift mit lateinischen Buchstaben niederschreibt. Ein kleiner Heber reicht mit einem Ende in ein Tintengefäss und hat am andern Ende eine so feine Mündung, das aus ihr die Tinte nur ausfliesst, wenn die Mündung das Papier berührt. Dieser Heber sitzt am Ende eines Doppelhebels, welches durch zwei auf derselben Axe steckende, an ihrem Umfange verschieden gestaltete Scheiben so geführt wird, dass es beständig den Zug Fig. 8, Taf. I. beschreibt. Die Scheiben werden durch ein Gewicht in Umdrehung versetzt und dieses Gewicht bewegt zugleich das Papier unter der Schraubspitze fort, und diese liegt auf dem Papiere auf, sofern sie nicht bei Unterbrechung des Stroms durch eine Feder abgehoben wird. Das Unterbrechen des Stroms erfolgt von der telegraphirenden Station aus durch ein System von Tasten; jede Taste legt, wenn sie niedergedrückt wird, einen Hebel auf eine Walze, welche an verschiedenen Stellen ihrer Oberfläche verschieden gestaltete Erhöhungen trägt, und so lange der Hebel auf einer solchen Erhöhung liegt, ist der Strom geschlossen. Von der Länge der Erhöhungen und von ihrer Stellung hängt es also ab, welchen und einen wie langen Theil seines Wegs der Schreibstift der empfangenden Station auf dem Papiere niederschreibt; in dem Zug Fig. 8, Taf. I. sind aber ebenfalls alle lateinischen Buchstaben enthalten, und man braucht blos für jeden Buchstaben eine lesende Taste. Ein solcher Appa-

*) Nach Th. du Moncel, exposé des applications de l'électricité. II. S. 124.

rat soll 120 bis 160 Buchstaben in einer Minute schreiben, doch muss er in allen seinen Theilen sehr genau gearbeitet sein; die Gleichzeitigkeit der Bewegungen wird hier durch denselben Regulator herbeigeführt, welchen Hipp an seinem Chronoskop in Anwendung gebracht hat.

Kleinere Mittheilungen.

I. Differentialformeln der Tetraedrometrie. Von Oberschulrath Dr. J. H. F. Müller zu Wiesbaden. Die Differentialformeln für die ebenen und sphärischen Dreiecke eignen sich, abgesehen von deren praktischer Brauchbarkeit, besonders zu leichteren Uebungsaufgaben in der Differentialrechnung, wofür sie auch mehrfach verwendet worden sind. Sie bilden kleinere in sich abgeschlossene Gebiete, deren Behandlung dem Anfänger Freude an zusammenhängenden Arbeiten und jene innere Befriedigung gewährt, auf welche bei unserer heutigen Vielerleibetreiberei überall hinzuwirken ist.

Für diesen Zweck der Abrundung dürften übrigens selbst jene Gleichungen noch zu ergänzen sein, indem man mehr das praktische Bedürfniss im Auge gehabt hat. Hier aber sollen, in gleicher Absicht, die wichtigsten Differentialformeln der Tetraedrometrie abgeleitet werden, welche, wie es scheint, bisher noch nicht aufgestellt worden sind. Die Differentiirung dieser Gleichungen wird nebenbei dem Rechner dieselben wieder im Gedächtnisse anfrischen und ihn veranlassen, auch hier nicht Mitgetheiltes aus diesem Gebiete einer ähnlichen Behandlung zu unterwerfen:

1) Seien in einem beliebigen Tetraeder, dessen Inhalt $=\mathfrak{T}$,

$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ die Scheitel,

A, B, C, D deren Gegenflächen,

$A^\wedge B$, $A^\wedge C$, $A^\wedge D$, $B^\wedge C$, $B^\wedge D$, $C^\wedge D$

oder $\mathfrak{c}^\wedge\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{b}$ die sechs Keile,

bei welchen übrigens, wo keine Zweideutigkeit stattfinden kann, die Zeichen ($^\wedge$) wegbleiben werden.

Sind ferner in dem irgend eine dreiflächige Ecke messenden sphärischen Dreiecke a, b, c die Seiten und α, β, γ deren Gegenwinkel, so bezeichnet man

die Seitenfunction $1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2 \cos a \cos b \cos c$ mit $4L^2$ und

die Winkelfunction $1 - \cos \alpha^2 - \cos \beta^2 - \cos \gamma^2 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ mit $4\varDelta^2$, weil bekanntlich

$$4L^2 = +4 \sin \tfrac{1}{2}(a+b+c) \sin \tfrac{1}{2}(-a+b+c) \sin \tfrac{1}{2}(a-b+c) \sin \tfrac{1}{2}(a+b-c),$$

sowie

$$4\varDelta^2 = -4 \cos \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) \cos \tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$$

ist, und nennt jenes die L-Function, dieses die $\varDelta$-Function der betreffenden Ecke. Demnach haben wir im Tetraeder zu den vier Ecken

$$\mathfrak{a},\quad \mathfrak{b},\quad \mathfrak{c},\quad \mathfrak{d}$$

die Functionen

$$L_{\mathfrak{a}},\quad L_{\mathfrak{b}},\quad L_{\mathfrak{c}},\quad L_{\mathfrak{d}}$$

und

$$\varDelta_{\mathfrak{a}},\quad \varDelta_{\mathfrak{b}},\quad \varDelta_{\mathfrak{c}},\quad \varDelta_{\mathfrak{d}}.$$

2) Aus der Gleichung zwischen den vier Flächen und den drei je einer Fläche anliegenden Keilen

$$A = B \cos AB + C \cos AC + D \cos AD$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

erhält man unmittelbar die Differentialgleichung:

3) $$\partial A = \cos AB . \partial B + \cos AC . \partial C + \cos AD . \partial D - B \sin AB . \partial A^{\wedge}B - C \sin AC . \partial A^{\wedge}C - D \sin AD . \partial A^{\wedge}D,$$

welcher sich auch die Gestalt

4) $$\frac{\partial A}{A} = \frac{B}{A} \cos AB . \frac{\partial B}{B} + \frac{C}{A} \cos AC . \frac{\partial C}{C} + \frac{D}{A} \cos AD . \frac{\partial D}{D} - \frac{B}{A} \sin AB . \partial A^{\wedge}B - \frac{C}{A} \sin AC . \partial A^{\wedge}C - \frac{D}{A} \sin AD . \partial A^{\wedge}D$$

geben lässt.

5) Aus der Gleichung zwischen den vier Flächen und den drei je einem Scheitel anliegenden Keilen, wie

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2 - 2AB \cos AB - 2AC \cos AC - 2BC \cos BC,$$

ergiebt sich zunächst, nach Aussonderung der gemeinschaftlichen Factoren,

6) $$\begin{aligned} D . \partial D = &(A - B \cos AB - C \cos AC) . \partial A + BC \sin BC . \partial B^{\wedge}C \\ &+ (B - A \cos AB - C \cos BC) . \partial B + AC \sin AC . \partial A^{\wedge}C \\ &+ (C - A \cos AC - B \cos BC) . \partial C + AB \sin AB . \partial A^{\wedge}B \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen in 2) folgt aber, dass auch

$$\begin{aligned} D . \partial D = &D \cos AD . \partial A + D \cos BD . \partial B + D \cos CD . \partial C \\ &+ BC \sin BC . \partial B^{\wedge}C + AC \sin AC . \partial A^{\wedge}C + AB \sin AB . \partial A^{\wedge}B \end{aligned}$$

wird oder

7) $$\begin{aligned} D . \partial D = &D (\cos AD . \partial A + \cos BD . \partial B + \cos CD . \partial C) \\ &+ BC \sin BC . \partial B^{\wedge}C + AC \sin AC . \partial A^{\wedge}C + AB \sin AB . \partial A^{\wedge}B \end{aligned}$$

wird.

Nach 3) war

$$\partial D = \cos AD\,.\,\partial A + \cos BD\,.\,\partial B + \cos CD\,.\,\partial C$$
$$- A \sin AD\,.\,\partial A^\wedge D - B \sin BD\,.\,\partial B^\wedge D - C \sin CD\,.\,\partial C^\wedge D.$$

Die Verbindung dieser Gleichung mit der ersten Seite von 7) giebt, wenn man zuletzt $D.\partial D$ weglässt:

$$8)\ 0 = + AB \sin AB\,.\,\partial A^\wedge B + AC \sin AC\,.\,\partial A^\wedge C + BC \sin BC\,.\,\partial B^\wedge C$$
$$+ CD \sin CD\,.\,\partial C^\wedge D + BD \sin BD\,.\,\partial B^\wedge D + AD \sin AD\,.\,\partial A^\wedge D,$$

oder

$$0 = \Sigma(AB \sin AB\,.\,\partial A^\wedge B).$$

Da $\mathfrak{T} = \frac{2}{3}\,.\,\frac{BC \sin BC}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}$ oder in der andern Bezeichnung $= \frac{2}{3}\,.\,\frac{BC \sin \mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{d}}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}$ etc, so verwandelt sich die Gleichung 7) in

$$9)\quad D\,.\,\partial D = D\,.\,(\cos \mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{c}\,.\,\partial A + \cos \mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{c}\,.\,\partial B + \cos \mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{b}\,.\,\partial C)$$
$$+ \tfrac{3}{2}\mathfrak{T}\,.\,(\mathfrak{a}\mathfrak{d}\,.\,\partial \mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{d} + \mathfrak{b}\mathfrak{d}\,.\,\partial \mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{d} + \mathfrak{c}\mathfrak{d}\,.\,\partial \mathfrak{c}^\wedge\mathfrak{d}).$$

Wird dieselbe Substitution in 8) gemacht, so ergiebt sich:

$$10)\qquad 0 = \Sigma(\mathfrak{c}\mathfrak{d}\,.\,\partial \mathfrak{c}^\wedge\mathfrak{d})$$

11) Aus den Gleichungen zwischen den vier Flächen und je zwei Gegenkeilen, wie

$$A^2 + B^2 - 2AB \cos AB = C^2 + D^2 - 2CD \cos CD,$$

leiten sich die Differentialgleichungen, wie

$$12)\ (A - B \cos AB)\,.\,\partial A + (B - A \cos AB)\,.\,\partial B + AB \sin AB\,.\,\partial A^\wedge B$$
$$= (C - D \cos CD)\,.\,\partial C + (D - C \cos CD)\,.\,\partial D + CD \sin CD\,.\,\partial C^\wedge D$$

ab, oder mit Anwendung von 2)

$$13)\ (C \cos AC + D \cos AD).\partial A + (C \cos BC + D \cos BD).\partial B + AB \sin AB.\partial A^\wedge B$$
$$= (A \cos AC + B \cos BC).\partial C + (A \cos AD + B \cos BD).\partial D + CD \sin CD.\partial C^\wedge D,$$

welche durch eine leichte Umformung in

$$14)\ (AC \cos AC + AD \cos AD).\frac{\partial A}{A} + (BC \cos BC + BD \cos BD).\frac{\partial B}{B} + AB \sin AB.\partial A^\wedge B$$
$$= (AC \cos AC + BC \cos BC).\frac{\partial C}{C} + (AD \cos AD + BD \cos BD).\frac{\partial D}{D} + CD \sin CD.\partial C^\wedge D$$

übergeht.

Nun ist

$$AB \cos AB = AB \sin AB\,.\,\cot AB = \tfrac{3}{2}\mathfrak{T}\,.\,\mathfrak{c}\mathfrak{d}\,.\,\cot \mathfrak{c}^\wedge\mathfrak{d}.$$

Demzufolge wird aus 14), nach Wegwerfung von $\frac{3}{2}\mathfrak{T}$,

$$15)\ (\mathfrak{b}\mathfrak{d}.\cot \mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{d} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}.\cot \mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{c}).\frac{\partial A}{A} + (\mathfrak{a}\mathfrak{d}.\cot \mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{d} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}.\cot \mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{c}).\frac{\partial B}{B} + \mathfrak{c}\mathfrak{d}.\partial \mathfrak{c}^\wedge\mathfrak{d}$$
$$= (\mathfrak{b}\mathfrak{d}.\cot \mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{d} + \mathfrak{a}\mathfrak{d}.\cot \mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{d}).\frac{\partial C}{C} + (\mathfrak{b}\mathfrak{c}.\cot \mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{c} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}.\cot \mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{c}).\frac{\partial D}{D} + \mathfrak{a}\mathfrak{b}.\partial \mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{b}.$$

16) Von den Gleichungen zwischen je zwei Paaren von Gegenkeilen und irgend drei Flächen, die sich aus je zwei Gleichungen 11) ableiten lassen, möge hier eine Platz finden, z. B. die zwischen

$$\mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{b},\ \mathfrak{c}^\wedge\mathfrak{d},\ \mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{c},\ \mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{d},\ A,\ B,\ C.$$

Es ist nämlich:

$$0=(B^2-C^2-BD\cos\mathfrak{ac}+CD\cos\mathfrak{ab})^2$$
$$-(B\cos\mathfrak{cd}-C\cos\mathfrak{bd})\,.\left\{\begin{matrix}+B\cos\mathfrak{cd}\,(B^2+D^2-2BD\cos\mathfrak{ac}-C^2)\\-C\cos\mathfrak{bd}\,(C^2+B^2-2CD\cos\mathfrak{ab}-B^2)\end{matrix}\right\},$$

wo das Abhängigkeitsgesetz sich aus der Aufstellungsweise ersehen lässt.

Die hieraus abzuleitende Differentialgleichung würde hier zu viel Raum in Anspruch nehmen.

17) Die, wohl von Carnot zuerst gefundene, Gleichung zwischen den Cosinus der sechs Tetraederkeile ist

$$\begin{aligned}1=&+\cos\mathfrak{ab}^2+\cos\mathfrak{ac}^2+\cos\mathfrak{ad}^2+\cos\mathfrak{bc}^2+\cos\mathfrak{bd}^2+\cos\mathfrak{cd}^2\\&+2\cos\mathfrak{ab}\cos\mathfrak{ac}\cos\mathfrak{ad}+2\cos\mathfrak{bc}\cos\mathfrak{bd}\cos\mathfrak{ba}+2\cos\mathfrak{cd}\cos\mathfrak{ca}\cos\mathfrak{cb}\\&\qquad\qquad+2\cos\mathfrak{da}\cos\mathfrak{db}\cos\mathfrak{dc}\\&-\cos\mathfrak{ab}^2\cos\mathfrak{cd}^2-\cos\mathfrak{ac}^2\cos\mathfrak{bd}^2-\cos\mathfrak{ad}^2\cos\mathfrak{bc}^2\\&+2\cos\mathfrak{ab}\cos\mathfrak{cd}\cos\mathfrak{ac}\cos\mathfrak{bd}+2\cos\mathfrak{ab}\cos\mathfrak{cd}\cos\mathfrak{ad}\cos\mathfrak{bc}\\&\qquad\qquad+2\cos\mathfrak{ac}\cos\mathfrak{bd}\cos\mathfrak{ad}\cos\mathfrak{bc}.\end{aligned}$$

Differentiirt man diese Gleichung, so erhält man nach gehöriger Zusammenziehung sechs Producte mit den zweiten Factoren

$$\partial\,\mathfrak{a}\hat{\ }\mathfrak{b},\ \partial\,\mathfrak{a}\hat{\ }\mathfrak{c},\ \partial\,\mathfrak{a}\hat{\ }\mathfrak{d},\ \partial\,\mathfrak{b}\hat{\ }\mathfrak{c},\ \partial\,\mathfrak{b}\hat{\ }\mathfrak{d},\ \partial\,\mathfrak{c}\hat{\ }\mathfrak{d},$$

von denen es ausreicht, nur eines, z. B. das mit $\partial\,\mathfrak{a}\hat{\ }\mathfrak{b}$ behaftete aufzustellen und zu untersuchen.

Man erhält darnach, wenn durchgängig mit (—2) dividirt wird,

$$0=\sin\mathfrak{ab}\,.\,\partial\,\mathfrak{a}\hat{\ }\mathfrak{b}\,.\left\{\cos\mathfrak{ab}\begin{matrix}+\cos\mathfrak{ac}\cos\mathfrak{ad}\\+\cos\mathfrak{bc}\cos\mathfrak{bd}\end{matrix}-\cos\mathfrak{ab}\cos\mathfrak{cd}^2\begin{matrix}+\cos\mathfrak{ac}\cos\mathfrak{bd}\cos\mathfrak{cd}\\+\cos\mathfrak{ad}\cos\mathfrak{bc}\cos\mathfrak{cd}\end{matrix}\right\}+\text{etc.}$$

und hieraus entweder

$$\text{18a)}\quad 0=\sin\mathfrak{ab}\,.\,\partial\,\mathfrak{a}\hat{\ }\mathfrak{b}\,.\left\{\cos\mathfrak{ab}\sin\mathfrak{cd}^2\begin{matrix}+\cos\mathfrak{ac}\,(\cos\mathfrak{ad}+\cos\mathfrak{bd}\cos\mathfrak{cd})\\+\cos\mathfrak{bc}\,(\cos\mathfrak{bd}+\cos\mathfrak{ad}\cos\mathfrak{cd})\end{matrix}\right\}+\text{etc.}$$

oder

$$\text{18b)}\quad 0=\sin\mathfrak{ab}\,.\,\partial\,\mathfrak{a}\hat{\ }\mathfrak{b}\,.\left\{\cos\mathfrak{ab}\sin\mathfrak{cd}^2\begin{matrix}+\cos\mathfrak{ad}\,(\cos\mathfrak{ac}+\cos\mathfrak{bc}\cos\mathfrak{dc})\\+\cos\mathfrak{bd}\,(\cos\mathfrak{bc}+\cos\mathfrak{ac}\cos\mathfrak{dc})\end{matrix}\right\}+\text{etc.}$$

Da

$$\cos\mathfrak{ad}+\cos\mathfrak{bd}\cos\mathfrak{cd}=\sin\mathfrak{bd}\sin\mathfrak{cd}\cos\mathfrak{bdc},\ \text{u. s. w.}$$

so gehen diese Gleichungen in folgende über, welche aber zugleich Kantenwinkel enthalten:

$$\text{19a)}\ 0=\sin\mathfrak{ab}\sin\mathfrak{cd}\,.\,\partial\,\mathfrak{a}\hat{\ }\mathfrak{b}\,.\left\{\cos\mathfrak{ab}\sin\mathfrak{cd}\begin{matrix}+\cos\mathfrak{ac}\sin\mathfrak{bd}\cos\mathfrak{bdc}\\+\cos\mathfrak{bc}\sin\mathfrak{ad}\cos\mathfrak{adc}\end{matrix}\right\}+\text{etc.}$$

$$\text{19b)}\ 0=\sin\mathfrak{ab}\sin\mathfrak{cd}\,.\,\partial\,\mathfrak{a}\hat{\ }\mathfrak{b}\,.\left\{\cos\mathfrak{ab}\sin\mathfrak{cd}\begin{matrix}+\cos\mathfrak{ad}\sin\mathfrak{bc}\cos\mathfrak{bcd}\\+\cos\mathfrak{bd}\sin\mathfrak{ac}\cos\mathfrak{acd}\end{matrix}\right\}+\text{etc.}$$

Das Bildungsgesetz wird übrigens am anschaulichsten, wenn der anfängliche Ausdruck folgende Gestalt erhält:

$$\text{20)}\quad 0=\sin\mathfrak{ab}\,.\,\partial\,\mathfrak{ab}\,.\left\{\cos\mathfrak{ab}\sin\mathfrak{cd}^2\begin{matrix}+\cos\mathfrak{ca}\cos\mathfrak{da}\\+\cos\mathfrak{cb}\cos\mathfrak{db}\end{matrix}+\cos\mathfrak{cd}\,.\begin{pmatrix}+\cos\mathfrak{ac}\cos\mathfrak{bd}\\+\cos\mathfrak{ad}\cos\mathfrak{bc}\end{pmatrix}\right\}+\ldots$$

Mit Uebergehung anderer Tetraedergleichungen*) will der Verfasser

*) Vergl. u. a. des Verfassers Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie und der Tetraedrometrie. Halle 1851.

hier nur noch einige den Tetraederinhalt $\mathfrak{T}$ betreffende Beziehungen für den gegenwärtigen Zweck verwenden, wobei die L- und die $\varDelta$-functionen der Ecken mehrfach in Anwendung kommen.

Aus 1) erhält man durch Differentiirung

$$21)\qquad \begin{aligned} 4L\,.\,\partial L = &+ \sin a\,(\cos a - \cos b\cos c)\,.\,\partial a \\ &+ \sin b\,(\cos b - \cos a\cos c)\,.\,\partial b \\ &+ \sin c\,(\cos c - \cos a\cos b)\,.\,\partial c \end{aligned}$$

und wegen der Grundgleichung der sphärischen Trigonometrie

$$22)\qquad 4L\,.\,\partial L = \sin a\sin b\sin c\,(\cos\alpha\,.\,\partial a + \cos\beta\,.\,\partial b + \cos\gamma\,.\,\partial c).$$

Ebenso wird:

$$23)\qquad \begin{aligned} 4\varDelta\,.\,\partial\varDelta = &+ \sin\alpha\,(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma)\,.\,\partial\alpha \\ &+ \sin\beta\,(\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma)\,.\,\partial\beta \\ &+ \sin\gamma\,(\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta)\,.\,\partial\gamma \end{aligned}$$

und

$$24)\qquad 4\varDelta\,.\,\partial\varDelta = \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\,(\cos a\,.\,\partial\alpha + \cos b\,.\,\partial\beta + \cos c\,.\,\partial\gamma).$$

Da ferner

$$\sin a\sin b\sin c = \frac{2L^2}{\varDelta}$$

und

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \frac{2\varDelta^2}{L},$$

so gehen die Gleichungen 22) und 24) über in

$$25)\qquad \frac{\partial L}{L} = \frac{1}{2\varDelta}(\cos\alpha\,.\,\partial a + \cos\beta\,.\,\partial b + \cos\gamma\,.\,\partial c)$$

und

$$26)\qquad \frac{\partial\varDelta}{\varDelta} = \frac{1}{2L}(\cos a\,.\,\partial\alpha + \cos b\,.\,\partial\beta + \cos c\,.\,\partial\gamma)$$

Werden dagegen L^2 und $\varDelta^2$ beziehungsweise durch die Producte der Sinus der halben Seitentrinome und der Cosinus der halben Winkeltrinome ausgedrückt (vergl. 1) und der Kürze halber

$\frac{1}{2}(a+b+c)$, $\frac{1}{2}(-a+b+c)$,..; $\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$, $\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)$,..

mit

$$s_0,\ s_a,..;\ \sigma_0,\ \sigma_\alpha,..$$

bezeichnet, so erhält man nach einigen Vereinfachungen

$$27)\qquad \begin{aligned} 4\frac{\partial L}{L} = &(\cot s_0 - \cot s_a + \cot s_b + \cot s_c)\,.\,\partial a \\ &+ (\cot s_0 + \cot s_a - \cot s_b + \cot s_c)\,.\,\partial b \\ &+ (\cot s_0 + \cot s_a + \cot s_b - \cot s_c)\,.\,\partial c \end{aligned}$$

und

$$28)\qquad \begin{aligned} 4\frac{\partial\varDelta}{\varDelta} = &(tg\,\sigma_0 - tg\,\sigma_\alpha + tg\,\sigma_\beta + tg\,\sigma_\gamma)\,.\,\partial\alpha \\ &+ (tg\,\sigma_0 + tg\,\sigma_\alpha - tg\,\sigma_\beta + tg\,\sigma_\gamma)\,.\,\partial\beta \\ &+ (tg\,\sigma_0 + tg\,\sigma_\alpha + tg\,\sigma_\beta - tg\,\sigma_\gamma)\,.\,\partial\gamma. \end{aligned}$$

Da

$$\mathfrak{T}=\tfrac{1}{6}\,.\,\mathfrak{ab}\,.\,\mathfrak{ac}\,.\,\mathfrak{ad}\,.\,L_{\mathfrak{a}}=\tfrac{1}{6}\,.\,\mathfrak{bc}\,.\,\mathfrak{bd}\,.\,\mathfrak{ba}\,.\,L_{\mathfrak{b}}=\text{etc.}$$

so erhält man leicht

$$29)\qquad \frac{\partial\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}=\frac{\partial\mathfrak{ab}}{\mathfrak{ab}}+\frac{\partial\mathfrak{ac}}{\mathfrak{ac}}+\frac{\partial\mathfrak{ad}}{\mathfrak{ad}}+\frac{\partial L_{\mathfrak{a}}}{L_{\mathfrak{a}}};$$

. . . . .

. . . . .

Ebenso folgt aus

$$\mathfrak{T}=\tfrac{2}{3}\sqrt{BCD\Delta_{\mathfrak{a}}}=\tfrac{2}{3}\sqrt{ACD\Delta_{\mathfrak{b}}}=\text{etc.}$$

$$30)\qquad 2\,.\,\frac{\partial\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}=\frac{\partial B}{B}+\frac{\partial C}{C}+\frac{\partial D}{D}+\frac{\partial\Delta_{\mathfrak{a}}}{\Delta_{\mathfrak{a}}}$$

. . . . .

. . . . .

Bemerkenswerth sind übrigens die Tetraederconstanten, welche sich aus den Grundgleichungen zu 29) und 30) ergeben, wenn man mit jenen in das Product aller Kanten, und mit den Quadraten von diesen in das Product aller Flächen des Tetraeders dividirt. Man erhält alsdann

$$31)\qquad \frac{\mathfrak{bc}.\mathfrak{bd}.\mathfrak{cd}}{L_{\mathfrak{a}}}=\frac{\mathfrak{ac}.\mathfrak{ad}.\mathfrak{cd}}{L_{\mathfrak{b}}}=\frac{\mathfrak{ab}.\mathfrak{ad}.\mathfrak{bd}}{L_{\mathfrak{c}}}=\frac{\mathfrak{ab}.\mathfrak{ac}.\mathfrak{bc}}{L_{\mathfrak{d}}}$$

und

$$32)\qquad \frac{A}{\Delta_{\mathfrak{a}}}=\frac{B}{\Delta_{\mathfrak{b}}}=\frac{C}{\Delta_{\mathfrak{c}}}=\frac{D}{\Delta_{\mathfrak{d}}}.$$

Letztere Quotienteneinheit namentlich entspricht im geradlinigen Dreiecke der

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

vollständig.

Weil ferner

$$\mathfrak{T}=\tfrac{2}{3}\,.\,\frac{CD\sin\mathfrak{a}^{\wedge}\mathfrak{b}}{\mathfrak{ab}}=\tfrac{2}{3}\,.\,\frac{BD\sin\mathfrak{a}^{\wedge}\mathfrak{c}}{\mathfrak{ac}}=\text{etc.}$$

so wird

$$\partial\mathfrak{T}=\tfrac{2}{3}\,.\,\frac{D\sin\mathfrak{a}^{\wedge}\mathfrak{b}}{\mathfrak{ab}}\,.\,\partial C+\tfrac{2}{3}\,.\,\frac{D\sin\mathfrak{a}^{\wedge}\mathfrak{b}}{\mathfrak{ab}}\,.\,\partial D+\tfrac{2}{3}\,.\,\frac{CD\cos\mathfrak{a}^{\wedge}\mathfrak{b}}{\mathfrak{ab}}\,.\,\partial\mathfrak{a}^{\wedge}\mathfrak{b}-\tfrac{2}{3}\,.\,\frac{CD\sin\mathfrak{a}^{\wedge}\mathfrak{b}}{\mathfrak{ab}^2}\,.\,\partial\mathfrak{ab}$$

$$=\tfrac{2}{3}\,.\,\frac{CD\sin\mathfrak{a}^{\wedge}\mathfrak{b}}{\mathfrak{ab}}\,.\,\frac{\partial C}{C}+\tfrac{2}{3}\,.\,\frac{CD\sin\mathfrak{a}^{\wedge}\mathfrak{b}}{\mathfrak{ab}}\,.\,\frac{\partial D}{D}+\tfrac{2}{3}\,.\,\frac{CD\sin\mathfrak{a}^{\wedge}\mathfrak{b}}{\mathfrak{ab}}\,.\,\cot\mathfrak{a}^{\wedge}\mathfrak{b}\,.\,\partial\mathfrak{a}^{\wedge}\mathfrak{b}$$

$$-\tfrac{2}{3}\,.\,\frac{CD\sin\mathfrak{a}^{\wedge}\mathfrak{b}}{\mathfrak{ab}}\,.\,\frac{\partial\mathfrak{ab}}{\mathfrak{ab}};$$

folglich

$$33)\qquad \frac{\partial\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}=\frac{\partial C}{C}+\frac{\partial D}{D}+\frac{\partial\mathfrak{a}^{\wedge}\mathfrak{b}}{tg\,\mathfrak{ab}}-\frac{\partial\mathfrak{ab}}{\mathfrak{ab}};$$

. . . . .

. . . . .

während man für T als Flächeninhalt des geradlinigen Dreiecks

$$\frac{\partial T}{T} = \frac{\partial b}{b} + \frac{\partial c}{c} + \frac{\partial \alpha}{tg\,\alpha}$$

erhält.

Bezeichnet man im Tetraeder die Abstände der Halbirungspunkte je zweier Gegenkanten

wie $\mathfrak{bc}$ und $\mathfrak{ad}$ mit a,
„ $\mathfrak{ac}$ „ $\mathfrak{bd}$ „ b,
„ $\mathfrak{ab}$ „ $\mathfrak{cd}$ „ c,

so ist nach dem Euler'schen Satze

$$-\mathfrak{bc}^2 - \mathfrak{ad}^2 + \mathfrak{ac}^2 + \mathfrak{bd}^2 + \mathfrak{ab}^2 + \mathfrak{cd}^2 = 4a^2;$$
$$+\mathfrak{bc}^2 + \mathfrak{ad}^2 - \mathfrak{ac}^2 - \mathfrak{bd}^2 + \mathfrak{ab}^2 + \mathfrak{cd}^2 = 4b^2;$$
$$+\mathfrak{bc}^2 + \mathfrak{ad}^2 + \mathfrak{ac}^2 + \mathfrak{bd}^2 - \mathfrak{ab}^2 - \mathfrak{cd}^2 = 4c^2.$$

Werden ferner die Producte aus je drei Flächenkanten, nämlich

$$\mathfrak{bc}.\mathfrak{bd}.\mathfrak{cd};\quad \mathfrak{ac}.\mathfrak{ad}.\mathfrak{cd};\quad \mathfrak{ab}.\mathfrak{ad}.\mathfrak{bd};\quad \mathfrak{ab}.\mathfrak{ac}.\mathfrak{bc}$$

durch

$$\mathfrak{A};\qquad \mathfrak{B};\qquad \mathfrak{C};\qquad \mathfrak{D}$$

ausgedrückt, so erhält die Gleichung für den Tetraederinhalt durch alle sechs Kanten folgende Gestalt:

$$34)\quad 144.\mathfrak{T}^2 = 4a^2.\mathfrak{bc}^2.\mathfrak{ad}^2 + 4b^2.\mathfrak{ac}^2.\mathfrak{bd}^2. + 4c^2.\mathfrak{ab}^2.\mathfrak{cd}^2 - \mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2 - \mathfrak{C}^2 - \mathfrak{D}^2.$$

Die hieraus abgeleitete Differentialgleichung enthält rechts nach gehöriger Zusammenziehung sechs der Reihe nach mit

$$\mathfrak{bc}.\partial\mathfrak{bc},\ \mathfrak{ad}.\partial\mathfrak{ad},\ \mathfrak{ac}.\partial\mathfrak{ac},\ \mathfrak{bd}.\partial\mathfrak{bd},\ \mathfrak{ab}.\partial\mathfrak{ab},\ \mathfrak{cd}.\partial\mathfrak{cd}$$

behaftete Aggregate von Kantenproducten. Hier genügt es, nur zwei derselben aufzustellen.

$$35)\quad 144.\mathfrak{T}.\partial\mathfrak{T} = +\mathfrak{bc}.\partial\mathfrak{bc}.[\mathfrak{bc}^2(4a^2 - \mathfrak{ad}^2) - (\mathfrak{ba}^2 - \mathfrak{bd}^2)(\mathfrak{ca}^2 - \mathfrak{cd}^2)]$$
$$+\mathfrak{ad}.\partial\mathfrak{ad}.[\mathfrak{ad}^2(4a^2 - \mathfrak{bc}^2) - (\mathfrak{ab}^2 - \mathfrak{ac}^2)(\mathfrak{db}^2 - \mathfrak{dc}^2)]$$
$$+ \text{etc.}$$

Das Bildungsgesetz der einzelnen Glieder lässt sich hieraus vollständig erkennen.

II. Bemerkung über discontinuirliche Functionen. Man hat hier und da bezweifelt, ob es analytisch gut definirte Functionen geben könne, die sich an einer bestimmten Stelle $x = a$ discontinuirlich und zwar so ändern, dass die beiden entsprechenden Functionswerthe $f(a-0)$ und $f(a+0)$ gleichzeitig endliche Grössen sind. Vielleicht ist daher der Nachweis nicht überflüssig, dass man solcher Functionen beliebig viele bilden kann.

Wenn das Integral $\int \varphi(t^2)\,dt$, zwischen den Grenzen $t=0$ und $t=\infty$ genommen, einen endlichen Werth besitzt, etwa

$$\int_0^\infty \varphi(t^2)\,dt = k,$$

und

$$\psi(x) = \int_0^{\frac{a}{x-a}} \varphi(t^2)\,dt$$

gesetzt wird, so hat man

$$\psi(a-0) = \int_0^{-\infty} \varphi(t^2)\,dt = -k,$$

$$\psi(a+0) = \int_0^{+\infty} \varphi(t^2)\,dt = +k;$$

die Function $\psi(x)$ geht demnach an der Stelle $x=a$ sprungweis von $-k$ nach $+k$ über. Hieraus ist leicht eine neue discontinuirliche Function abzuleiten, die an der Stelle $x=a$ von b_1 nach b_2 überspringt, wo b_1 und b_2 willkührlich gewählte endliche Grössen bedeuten. Diese Function ist

$$f(x) = \frac{b_2+b_1}{2} + \frac{b_2-b_1}{2k}\int_0^{\frac{a}{x-a}} \varphi(t^2)\,dt;$$

in der That hat man

$$f(a-0) = \frac{b_2+b_1}{2} + \frac{b_2-b_1}{2k}(-k) = b_1,$$

$$f(a+0) = \frac{b_2+b_1}{2} + \frac{b_2-b_1}{2k}(+k) = b_2.$$

Das einfachste Beispiel hierzu liefert die Annahme $\varphi(t^2) = \frac{1}{1+t^2}$, nämlich

$$f(x) = \frac{b_2+b_1}{2} + \frac{b_2-b_1}{\pi}\, Arctan\, \frac{a}{x-a};$$

ein zweites ist

$$f(x) = \frac{b_2+b_1}{2} + \frac{b_2-b_1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{a}{x-a}} e^{-tt}\,dt.$$

SCHLÖMILCH.

III. Construction flächengleicher Figuren. Zwei Parallelprojectionen derselben ebenen Figur sind aus leicht erkennbaren Gründen einander affin und in affiner Lage. Sie besitzen daher auch eine Affinitätsachse d. h. es giebt eine gerade Linie, in welcher sich alle Paare von homologen geraden Linien in beiden Figuren schneiden, oder in der jeder Punkt sich

selbst homolog ist. Diese Achse ist für die Construction affiner Systeme in affiner Lage ebenso nützlich, wie die Collineationsachse für die Construction perspectivischer Systeme.

Nun besteht in affinen Figuren die Verhältnissgleichheit homologer Flächenstücke ebenso wie in collinearen Figuren die Gleichheit der Doppelschnittverhältnisse, welche man aus solchen Flächenstücken bildet und Herr Prof. Möbius hat bekanntlich die specielle Art der Affinität zweier Systeme, bei welcher zwei homologe Flächenstücke gleichen Inhalt haben, als Verwandtschaft der Gleichheit bezeichnet. Nach dieser Definition müssen Parallelprojectionen derselben ebenen Figur flächengleiche Figuren sein, wenn die Ebene der Figur gegen die Bildebene gleich geneigt ist. Die Figur (s. Fig. 9, Taf. I) zeigt dieses Verhältniss eines Grund- und Aufrisses $a'b'c'd'e'$ und $a''b''c''d''e''$ für eine auf der Ebene E gelegene Figur (E_1 E_1 sind die Spuren dieser Ebene) und die Affinitätsachse AA (jetzt Achse der Gleichheit) für diesen Fall. Sie steht auf der Projectionsachse senkrecht.

In diesem einfachen und übersichtlichen Zusammenhange ist das Mittel gegeben, solche flächengleiche Figuren zu construiren.

Ich meine aber nicht, dass diese Aufgabe der Construction flächengleicher Figuren als eine solche anzusehen sei, die der analytischen Theorie der Verwandtschaften angehört, sondern ich rechne sie unter die elementargeometrischen Constructionen; ich meine, dass sie dem Kapitel der Flächenverwandlung und Berechnung eingereiht werden müsse. Denn in der That man behandelt in der Elementargeometrie die Congruenz, die Aehnlichkeit, die Flächengleichheit der Figuren, und während bei den beiden ersten in Bezug auf die ins Auge gefassten Criterien nicht blos die Uebereinstimmung der Figuren im Ganzen, sondern in allen einzelnen Theilen gefordert wird — wie es allerdings bei der Natur dieser Criterien nicht anders sein kann — so lässt man diese Forderung der Uebereinstimmung der einzelnen homologen Theile bei der Behandlung der Flächengleichheit ohne Weiteres vollständig fallen, als wenn sie gar überhaupt nicht logisch gestellt werden könnte oder müsste, und huldigt ganz allein dem Zweck, die Verwandlungsconstructionen dem rechnenden Ausdruck der Flächeninhalte durch quadratische Einheiten entgegenzuführen.

Warum stellt und löst man nicht vorher oder wenigstens im Verlauf die Aufgabe: Man soll ein gegebenes Vieleck $ABCD$.... in ein anderes von gleicher Eckenzahl $abcd$.... so verwandeln, dass die der Seite AB entsprechende Seite ab eine vorgeschriebene Länge erhalte und dass beide Vielecke im Ganzen so wie in allen einzelnen Theilen von gleicher Fläche seien.

Die Construction zu ihrer Auflösung ergiebt sich aus der vorigen Skizze ganz von selbst, denn — im Sinne der Projectionslehre gesprochen — hat man nur zu bewirken, dass die beiden Figuren zu einander im Verhältniss

von Grund- und Aufriss in der Weise stehen, dass die Affinitätsachse zur Projectionsachse senkrecht, oder zu dem projicirenden Perpendikel parallel sei.

Man wird jedoch leicht sehen, dass die Construction, auch abgesehen von allen Vorstellungen der Projectionslehre, sehr elementar bewiesen werden kann; sie ist sicher elementar genug, um die bemerkte Stelle im System der Elementargeometrie einzunehmen. In der Figur (s. Fig. 10, Taf. I) ist $ABC\ldots$ das gegebene Vieleck, ab soll die Länge der zu AB homologen Seite des geforderten neuen Vielecks $abc\ldots$ werden. Die Zeichnung lässt die Ecken A und a beider Vielecke sich decken; in Folge dessen geht die Affinitätsachse, oder vielmehr die Achse der Gleichheit durch A. Um das neue Vieleck zu erhalten, hat man durch die Ecken des alten ein System von Parallelen so zu legen, dass ein von A aus mit ab als Halbmesser beschriebener Kreis die Parallele durch B schneidet oder berührt; der Punkt oder einer der Punkte, wo es geschieht, ist b, die Parallele durch A ist die Achse der Gleichheit und der Reihe nach ergeben sich nun aus der Eigenschaft derselben, dass sich in ihr die homologen Seiten beider Figuren schneiden müssen, die $C, D, E\ldots$ entsprechenden Ecken $c, d, e\ldots$ auf den betreffenden Parallelen.

Alle homologen Theile beider Figuren, d. h. solche, die durch homologe Linien begrenzt werden, sind flächengleich. Dass sich dasselbe Verfahren auf beliebige krummlinige Figuren anwenden lässt, ist selbstverständlich; man löst damit z. B. die allgemeine Aufgabe: Einen Kegelschnitt in einen flächengleichen andern derselben Art zu verwandeln, wenn irgend eine damit verbundene Gerade von bestimmter Länge sich in einem vorgschriebenen Verhältniss ändern soll.

Und endlich bedarf es wohl nur der Erwähnung, dass die nämlichen Betrachtungen auch zur Auflösung dieser allgemeinen Aufgabe dienen: Man soll zu einer bestimmten ebenen Figur eine gleichartige construiren, in der die Flächeninhalte aller einzelnen Theile zu denen der homologen Flächentheile der gegebenen Figur in einem vorgeschriebenen Verhältniss stehen. (Dabei darf überdies eine Seite der neuen Figur gegeben sein.) Denn das constante Verhältniss homologer Flächentheile ist eine characteristische Eigenschaft affiner Figuren. (Gleiche Figuren unterscheiden sich nur dadurch von jenen, dass bei ihnen dies Verhältniss $=1$ ist.) Man hat daher zur Lösung dieser Aufgabe nur dafür zu sorgen, dass die neue Figur zur alten in der Beziehung des Aufrisses einer ebenen Figur zu ihrem Grundrisse steht, bei einer gewissen zu bestimmenden schiefen Lage der Affinitätsachse. Die Bestimmung dieser entsprechenden Lage der Affinitätsachse ist leicht genug. Die Figur (s. Fig. 11, Taf. I) zeigt die Ausführ- ür ein constantes Flächenverhältniss 25 : 36.

Alles dies sind endlich nur besondere Formen der allgemeinen Wahrheit, dass die Achsen, die den Hauptgegenstand dieser Mittheilung bilden, von grossem Nutzen für die Construction von ebenen Systemen sind, welche in der Verwandtschaft der Affinität oder der der Gleichheit stehen.

Möge man den Inhalt dieser Mittheilung als einen bescheidenen Beitrag zur Anwendung der Projectionslehre auf die Geometrie gelten lassen.

Chemnitz. WILHELM FIEDLER.

IV. Eine Aufgabe aus der descriptiven Geometrie. Von E. BACALOGLO. Eine Ebene zu legen, welche die in einem gegebenen Kegel zweiten Grades, einer gegebenen Geraden parallel gezogenen Garaden halbirt.

Man lege durch den Scheitel O (s. Fig. 12, Taf. I) des Kegels die Gerade OP parallel der gegebenen Gerade, und durch die horizontale Spur P derselben die Tangenten PM, PN an die Basis des Kegels; die Verbindungslinie MN der Berührungspunkte wird die horizontale Spur der gesuchten Ebene sein; diese muss noch durch den Scheitel O gehen. Diese Construction ergiebt sich aus folgenden Betrachtungen:

1) Alle durch den Scheitel O, parallel der gegebenen Geraden gelegten Ebenen haben eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie OP, welche selbst // der gegebenen Geraden ist;

2) In jedem dieser ebenen Schnitte wird die Gerade PL' durch die Erzeugenden OL, OL' und die Halbirungslinie OR der Parallelen ll' harmonisch getheilt; denn es ist:

$$\frac{\sin POL}{\sin POL'} = \frac{\sin l}{\sin l'} = \frac{Ol'}{Ol},$$

$$\frac{\sin LOR}{\sin L'OR} = \frac{lr \, . \, \sin r}{Ol} : \frac{l'r \, . \, \sin r}{Ol'} = \frac{Ol'}{Ol} = \frac{\sin POL}{\sin POL'};$$

3) Daraus folgt, dass die horizontalen Spuren der successiven Halbirungslinien OR auf der Polare MN des Punktes P liegen, dass also der geometrische Ort derselben eine Ebene, und deren horizontale Spur die Gerade MN ist.

V. Ueber die Richtungsänderung der Verticale. Von E. BACALOGLO. In einer kurzen Notiz von Puiseux (*Compt. rend.* 1856, B. 42, S. 683) wird auf die Wirkung der Umdrehung der Erde und anderer Himmelserscheinungen auf die Bewegung irdischer Körper, hauptsächlich aber auf die dadurch verursachte Richtungsänderung der Verticale aufmerksam gemacht. Da der Verfasser in sehr gesuchter Weise blos auf die Resultate hindeutet, so versuchte ich, die dazu führenden Formeln aufzustellen, welche mich je-

doch auf zum Theil entgegengesetzte Resultate als die Puiseux'schen führten.

Bezeichnet nämlich M (s. Fig. 13, Taf. I) einen Punkt der Erdoberfläche AB, M_1 einen auf der Verlängerung der Normale NM dieses Punktes in der Entfernung $MM_1 = \delta$ liegenden Punkt, so meint Puiseux, dass die Verticale des letztern von der des erstern abweicht und zwar um den kleinen Winkel 0″.17 für die geographische Breite 45° und $\delta = 1000$ Meter, giebt aber, wenn man in einem Meridiane stehen bleibt, nicht auch die Richtung dieser Abweichung und scheint überhaupt von dem Umstande, dass die Gesammtwirkung des Erdellipsoïdes auf den äusseren Punkt M_1 in der Richtung der Normale $M_1 N_1$ an dem durch M_1 gelegten homofocalen Ellipsoide $A_1 B_1$ stattfindet, abgesehen zu haben.

Sieht man vorläufig von der Umdrehung der Erde ab und sucht den Winkel $\alpha_1 = A_1 N_1 M_1$, so findet man, wenn

a, b die Halbachsen des Erdellipsoides,

a_1, b_1 die des homofocalen Ellipsoides,

σ, σ_1 die respectiven Abplattungen,

c, e die gemeinschaftlichen Excentricitäten der beiden Meridianellipsen,

r, r_1 die respectiven Vectoren der Punkte M, M_1,

φ, φ_1 die Neigung derselben gegen die Achse OA bezeichnen, zunächst:

$$1) \qquad tang\,\varphi = \frac{b^2}{a^2}\,tang\,\alpha = (1-\sigma)^2\,tang\,\alpha$$

und

$$2) \qquad tang\,\varphi_1 = \frac{r\sin\varphi + \delta\sin\alpha}{r\cos\varphi + \delta\cos\alpha}.$$

Aus der Gleichung der Ellipse folgt

$$3) \quad r = \frac{a}{\cos\varphi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}tang^2\varphi}} = \frac{a}{\cos\varphi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+tng\,\alpha\,tng\,\varphi}} = a\sqrt{\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)}}$$

und wenn $r\sin\varphi\sin\psi = \delta\cos\alpha\cos\psi$ gesetzt wird, woraus

$$4) \qquad tang\,\psi = \frac{\delta\cos\alpha}{r\sin\varphi} = \frac{\delta}{a}\cdot\frac{\sqrt{\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)}}{\sin\varphi},$$

so ergiebt sich aus 2)

$$5) \qquad tang\,\varphi_1 = \frac{\sin\varphi\cos(\alpha-\psi)}{\cos\alpha\cos(\varphi-\psi)}.$$

Es ist ferner

$$tang\,\alpha_1 = \frac{a_1^2}{b_1^2}\,tang\,\varphi_1 = \frac{tang\,\varphi_1}{(1-\sigma_1)^2},$$

so dass zur Berechnung von α_1 noch nöthig ist, σ_1 zu bestimmen. Es ist aber

$$a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2 = c^2 = a^2 e^2,$$

woraus

$$e = \sqrt{\sigma(2-\sigma)}$$

und

$$(1-\sigma_1)^2 = 1 - \frac{a^2 e^2}{a_1^2} = 1 - \frac{a^2 e^2}{(a+\delta)^2},$$

indem man ohne merklichen Fehler $a_1 = a + \delta$ setzen kann.

Es ist übrigens leicht zu sehen, dass homofocale Ellipsen, bei wachsenden Dimensionen, in der Richtung der kleinen Achse stärker als in der der grossen zunehmen; denn es ist

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2}, \quad \frac{b_1}{a_1} = \sqrt{1-e_1^2}, \quad a e = a_1 e_1,$$

woraus für $a_1 > a$:

$$\frac{b}{a} < \frac{b_1}{a_1} \quad \text{oder} \quad \frac{b_1}{b} > \frac{a_1}{a},$$

und auch

$$\frac{y}{x} < \frac{y_1}{x_1} \quad \text{oder} \quad \frac{y_1}{y} > \frac{x_1}{x},$$

indem $tang\, \varphi < tang\, \varphi_1$.

Führt man nun die Umdrehung der Erde ein, so ist, wenn $\frac{v^2}{\varrho}, \frac{v_1^2}{\varrho_1}$ die den Punkten M, M_1 respective entsprechenden Centrifugalkräfte bezeichnen, noch auf die Wirkung der Kraft $\Delta = \frac{v_1^2}{\varrho_1} - \frac{v^2}{\varrho}$ Rücksicht zu nehmen. Bezeichnet α_2 die durch diese letztere Kraft bedingte Richtung der Normale $M_1 N_2$, g, G die Beschleunigung der Schwere an den Punkten M, M_1, ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde, so ergiebt sich

$$\frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin \alpha_2} = \frac{\Delta}{G}$$

oder

8) $$tang\left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1}{2}\right) = \frac{1 + \frac{\Delta}{G}}{1 - \frac{\Delta}{G}}\, tang\, \frac{\alpha_1}{2}.$$

Es ist ferner

$$\frac{\Delta}{G} = \frac{\omega^2 (r_1 \cos\varphi_1 - r \cos\varphi)}{g} \cdot \frac{r_1^2}{r^2},$$

oder approximativ

9) $$\frac{\Delta}{G} = \frac{\omega^2 a}{g} \cdot \frac{\delta \cos\varphi_1}{a}\left(1 + \frac{2\delta}{r}\right) = \frac{1}{289} \cdot \frac{\delta \cos\varphi_1}{a}\left[1 + \frac{2\delta}{a(1 - \sigma \cdot \sin^2\alpha)}\right]$$

oder auch

$$\frac{\Delta}{G} = \frac{1}{289} \cdot \frac{\delta \cos\varphi_1}{a} \cdot \frac{\sin^2(\alpha - \varphi)}{\sin^2(\alpha - \varphi_1)}$$

da $\frac{\omega^2 a}{g} = \frac{1}{289}$ (*Duh. Méc. I*, 341, 1853; oder S. 338 der deutschen Ausg.).

Wendet man diese Formeln auf ein Beispiel, z. B. wenn $\alpha = 45^0$, $\delta = 1000$ Meter, so ergiebt sich wenn $a = 6377398$ Meter, $\sigma = \frac{1}{299.153} = 0{,}003345$ angenommen wird:

$$(1 - \sigma)^2 = 0.993325,\ (1 - \sigma_1)^2 = 0.993328,\ \sigma_1 = 0.003342,$$
$$\varphi = 44^0\,48'\,29''.38,\ \psi = 0^0\,0'\,32''.51,\ \varphi_1 = 44^0\,48'\,19''.46,$$
$$\alpha_1 = 44^0\,59'\,59''.90,\ \frac{\varDelta}{G} = 0.000000385,\ \alpha_2 = 44^0\,59'\,59''.95,$$
$$\alpha - \alpha_1 = +\,0''.10,\ \alpha - \alpha_2 = +\,0''.05,$$

und zuletzt, wenn $\alpha = \alpha_1$ gesetzt, also die Betrachtung der Homofocalität vernachlässigt wird:

$$\alpha'_2 = 45^0\,0'\,0''.05 \text{ und } \alpha - \alpha'_2 = -\,0''.05.$$

Aus dem Obigen ergiebt sich, dass ein freihängender, homogener Faden eine krumme Linie bildet, welche ihre convexe Seite dem nächsten Erdpole zuwendet. Die Gleichung derselben ergiebt sich aus

$$10)\qquad y = mx + n,\ 0 = x + \frac{dn}{dm},\ n = F(x, y, m),$$

wo F eine gewisse Function bedeutet. Ob es nun Puiseux, der die Gestalt des Fadens für eine parabolische angiebt, gelungen ist, dies streng zu beweisen, lässt sich aus seiner Notiz nicht schliessen; dies wäre jedoch nur dann möglich, wenn die Funktion F unabhängig von der grösseren oder geringeren Anzahl der die Richtungsänderung der Verticale bedingenden Umstände sein sollte; es kann sogar vorkommen, dass die oben gedachte convexe Seite eine umgekehrte Lage habe.

Es ergiebt sich ferner, dass ein an seinem Schwerpunkte aufgehängter, in der Meridianebene liegender Stab sich so zu stellen strebt, dass derselbe mit der Verticale seines Schwerpunktes einen kleinen Winkel bildet, und sein unteres Ende in der nördlichen Halbkugel nach Süden zu liegt; nach Puiseux soll dieses Ende nach Norden liegen und wird in der Breite 45^0 um $6'$ abgelenkt. Es findet nämlich, wegen der Abweichung der Verticale oberhalb und unterhalb des Schwerpunktes G (s. Fig. 14, Taf. I) eine Drehung des Stabes AB in der durch den Pfeil angegebenen Richtung statt, bis die zum Stabe senkrechten Componenten der Schwere in Ga sich den in Gb wirkenden ausgeglichen haben. Bezeichnet man $m\delta^2 (\delta = Gp = Gq)$ das Trägheitsmoment jeder Hälfte des Stabes, χ die Ablenkung desselben von seiner ursprünglichen Lage, ε den Winkel (VV_1) oder (VV_2), g_1, g_2 die Intensität der Schwere bei p und q, r den zum Punkte G gehörenden Radiusvector des Erdellipsoides, so findet man

$$g_1 \sin(\chi - \varepsilon) = g_2 \sin(\chi + \varepsilon) \text{ und } g_1 : g_2 = (r + \delta)^2 : (r - \delta)^2,$$

woraus

$$11)\quad \tang \chi = \tang \varepsilon \frac{\frac{g_1}{g_2} + 1}{\frac{g_1}{g_2} - 1} = \tang \varepsilon \,.\, \frac{r^2 + \delta^2}{2r\delta} = \frac{r \tang \varepsilon}{2\delta}\left(1 + \frac{\delta^2}{r^2}\right)$$

oder auch, da δ sehr klein im Verhältniss zu r ist:

12) $$tang\,\chi = \frac{r\,tang\,\varepsilon}{2\,\delta} \quad \text{oder} \quad \chi = \frac{r}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Man kann ε für kleine Werthe von δ, diesem letztern proportional setzen; es folgt daraus, dass die Ablenkung χ, für beliebige Stäbe, unter derselben geographischen Breite, constant ist. Für die Breite 45° ist $\chi = 2'\,39''.17$.

Es folgt ferner aus rein geometrischen Betrachtungen, dass bei der abgelenkten Lage des Stabes $\varepsilon < \alpha - \alpha_2$, so dass eigentlich χ kleiner ist als der aus 12) folgende Werth. Wegen der Kleinheit dieser Abweichungen und der Mannigfaltigkeit der dieselben bedingenden Ursachen, welche sich gegenseitig ganz oder theilweise aufheben, dürfte man wohl jene Abweichungen, trotz der von Puiseux empfohlenen Strenge, fast in allen Fällen völlig vernachlässigen.

VI. Einige Eigenschaften der Kegelschnitte. Seien A und B zwei beliebige Punkte eines Kegelschnittes, $AB = c$ die sie verbindende Sehne, a und b die Berührenden des Kegelschnittes in den Punkten A und B, m und n, p und q zwei Paare von Strahlen aus A und B nach zwei beliebigen Punkten des Kegelschnittes, so bilden, nach einer bekannten Eigenschaft der Kegelschnitte, diese Geraden zwei collineare Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte A und B sind, und wo der Berührenden a als Strahl des ersten Büschels die Sehne c als Strahl des zweiten, und der Sehne c als Strahl des ersten Büschels die Berührende b als Strahl des zweiten Büschels entspricht. Diese Collineation werde bezeichnet durch

$$(a, c, m, p) = (c, b, n, q).$$

Eine beliebige Gerade l schneidet die beiden Strahlenbüschel in zwei collinearen Punktreihen, was ausgedrückt werde durch

$$(l\cdot a, l\cdot c, l\cdot m, l\cdot p) = (l\cdot c, l\cdot b, l\cdot n, l\cdot q).$$

Es sollen nun die Durchschnittspunkte bezeichnet werden, wie folgt:

$$l\cdot c = D,\ l\cdot a = F,\ l\cdot b = G,\ l\cdot m = M,\ l\cdot n = N,\ l\cdot p = P,\ l\cdot q = Q,$$

so hat man

$$(F, D, M, P) = (D, G, N, Q),$$

oder es sind die beiden Doppelschnittsverhältnisse einander gleich

$$\frac{FD\,.\,MP}{DM\,.\,PF} = \frac{DG\,.\,NQ}{GN\,.\,QD}.$$

Es werde nun die schneidende Gerade l durch den Durchschnittspunkt C der beiden Berührenden a und b gelegt, welchen bekanntlich der Pol in Bezug auf AB als Polare heisst, so hat man

$$F = G = a\cdot b = C$$

zu setzen, und geht die vorige Gleichung in die folgende über

$$\frac{CD.MP}{DM.PC} = \frac{DC.NQ}{CN.QD},$$

oder, wegen $CD = -DC$,

$$\frac{MP.CN.QD}{PC.NQ.DM} = -1.$$

Der Ausdruck links stellt aber ein sogenanntes Dreiecksschnittverhältniss dar, und da dieses den Werth -1 hat, so sind die drei Punktenpaare C und D, M und N, P und Q in Involution. Diesen Satz kann man so in Worten aussprechen:

Zieht man von zwei beliebigen Punkten eines Kegelschnittes Vectoren nach beliebigen andern Punkten desselben, so schneiden dieselben jede durch den, zur Verbindungslinie jener zwei Punkte als Polare gehörigen, Pol gehende Gerade in zwei in Involution befindlichen Punktenreihen. Ihre Doppelpunkte sind offenbar die beiden Durchschnittspunkte S und T der Geraden l mit dem Kegelschnitt, und sind daher die beiden Fälle zu unterscheiden, ob diese Durchschnittspunkte reell oder imaginär sind.

Die Gerade l schneide den Kegelschnitt in zwei reellen Punkten, S und T, so ist, weil der gemeinschaftliche Brennpunkt zweier in Involution befindlicher Punktreihen in der Mitte zwischen ihren Doppelpunkten liegt, der Halbirungspunkt O der Sehne ST dieser Brennpunkt; und weil der zwischen den beiden Doppelpunkten enthaltene Abschnitt von jedem Punktenpaar harmonisch getheilt wird, so geschieht dies mit ST durch jedes Punktenpaar M und N, P und Q, d. h.

Zieht man von zwei beliebigen Punkten A und B eines Kegelschnittes Vectoren nach beliebigen andern Punkten desselben, so theilen dieselben jede durch den, zu AB als Polare gehörigen, Pol gehende Sehne harmonisch. Dies wird auch dadurch ausgedrückt, dass das Produkt $OM.ON = OP.OQ$ eine constante positive Grösse ist.

Hierin ist als specieller Fall der bekannte Satz enthalten, dass eine durch den Pol gelegte Gerade von diesem, der Polare und dem Kegelschnitt harmonisch getheilt wird. Schneiden zwei durch A und B gelegte Parallele zu ST den Kegelschnitt in den Punkten H und J, so müssen die Geraden BH und AJ sich im Mittelpunkt O der Sehne, als dem gemeinschaftlichen Brennpunkte, schneiden.

Sind die beiden Berührenden in A und B einander parallel, d. h. ist AB ein Durchmesser des Kegelschnittes, so geht obiger Satz in folgenden über:

Zieht man von den beiden Endpunkten eines Durchmessers eines Kegelschnittes Vectoren nach einem beliebigen Punkte desselben, so theilen dieselben jede dem, zu jenem

conjugirten, Durchmesser parallele Sehne harmonisch. Der Mittelpunkt O dieser Sehne ist zugleich der Durchschnittspunkt mit dem Durchmesser AB. — Hieraus lassen sich sehr einfach die Gleichungen von Ellipse und Hyperbel in, zu zwei conjugirten Durchmessern parallelen, Coordinaten und andere damit im Zusammenhange stehende Eigenschaften derselben herleiten. Seien $2y$ und $2y'$ die Längen zweier, zu dem, zum Durchmesser AB conjugirten, Durchmesser paralleler Sehnen der Ellipse, und werden dieselben von den beiden Vectoren aus A und B eines Punktes der Ellipse in M und N, M' und N' und vom Durchmesser AB in O und O' geschnitten, so ist nach obigem Satze

$$OM \, . \, ON = y^2,$$
$$O'M' \, . \, O'N' = y'^2,$$

daher

$$\frac{OM}{O'M'} \cdot \frac{ON}{O'N'} = \frac{y^2}{y'^2}.$$

Aus der Figur folgt aber sogleich

$$\frac{OM}{O'M'} = \frac{AO}{AO'}, \quad \frac{ON}{O'N'} = \frac{BO}{BO'};$$

mithin ist

$$\frac{AO \, . \, BO}{AO' \, . \, BO'} = \frac{y^2}{y'^2}.$$

Die Producte $AO.BO$ und $AO'.BO'$ bedeuten aber die Quadrate der zu AB rechtwinkligen in O und O' errichteten Ordinaten des über AB als Durchmesser beschriebenen Kreises. Man hat daher den Satz:

Die durch Punkte eines Durchmessers der Ellipse dem conjugirten Durchmesser parallel gezogenen Sehnen sind proportional den durch dieselben Punkte zum Durchmesser rechtwinklig gelegten Sehnen des über diesen Durchmesser beschriebenen Kreises.

Legt man die Gerade l parallel einer Asymptote der Hyperbel oder der Axe der Parabel, wo daher der eine Doppelpunkt im Unendlichen liegt, so muss die Gleichung

$$\frac{MP}{PC} \cdot \frac{CN}{NQ} \cdot \frac{QD}{DM} = -1$$

auch noch gelten, wenn zwei Vectoren AP und BQ nach einem unendlich entfernten Punkte der Hyperbel, oder dem der Parabel, gehen, wo dann P und Q selbst ins Unendliche rücken. Dann geht wegen

$$\frac{MP}{PC} = \frac{QD}{NQ} = -1$$

obige Gleichung über in

$$CN = -DM,$$

oder

$$DN = -CM;$$

d. h.

Zieht man von zwei beliebigen Punkten A und B der Hyperbel (Parabel) nach einem beliebigen Punkte derselben zwei Vectoren, so schneiden dieselben die durch den, zur Sehne AB als Polare gehörigen, Pol gelegte und zur Asymptote (zur Axe) parallele Gerade in entgegengesetzt gleichen Abständen von C und vom Durchschnittspunkt D der Geraden mit der Sehne AB.

Mittelst dieses Satzes kann man die Hyperbel sehr leicht construiren, wenn zwei Tangenten, die zugehörigen Berührungspunkte A und B und die Richtung der einen Asymptote ($// CD$) gegeben sind. Trägt man alsdann von A aus auf AB die Strecke $AE = -BD$ auf, so ist CE die Richtung der andern Asymptote; denn zieht man parallel mit CE durch A und B zwei Gerade, welche CD in M und N schneiden, so ist, der Forderung gemäss, $CM = -DN$, und zwar gehen AM und BN, weil sie parallel sind, nach dem andern unendlich entfernten Punkt der Hyperbel. Liegt aber D in der Mitte zwischen A und B, so fällt E mit D zusammen, d. h. der Kegelschnitt hat nur einen unendlich entfernten Punkt, ist also eine Parabel und CD die Richtung ihrer Axe. Umgekehrt folgt daher: Eine durch den Pol zur Parabelaxe parallele Gerade halbirt die Polare.

Im zweiten Falle, wenn die Gerade l den Kegelschnitt nicht schneidet, also die beiden Doppelpunkte imaginär sind, entsprechen denselben, nach einer bekannten Eigenschaft der Involution, die beiden Punkte S und T, in denen sich die über CD, MN, PQ als Durchmessern beschriebenen Kreise schneiden. Der Durchschnittspunkt O der gemeinschaftlichen Sehne ST dieser Kreise mit den Geraden l ist der gemeinschaftliche Brennpunkt, den man auch erhalten kann, wenn man durch A und B Parallele mit CD zieht, welche den Kegelschnitt in H und J schneiden, so schneiden sich AJ und BH mit CD im Punkte O.

Zieht man von zwei beliebigen Punkten A und B eines Kegelschnittes Vectoren nach andern beliebigen Punkten desselben und legt durch den zu AB als Polare gehörigen Pol eine beliebige, den Kegelschnitt nicht schneidende Gerade, so schneiden sich alle die Kreise, welche man über den von je zwei Vectoren auf der Geraden gebildeten Abschnitten als Durchmessern beschreibt, in denselben zwei Punkten.

Ist AB ein Durchmesser des Kegelschnittes, so ist der Durchschnitt von AB mit der Geraden der gemeinschaftliche Brennpunkt.

Als specielle Fälle sind bemerkenswerth:

1) Ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, nimmt man für die Punkte A und B deren Scheitel und legt die zu AB senkrechte Gerade l durch den Mittelpunkt der Hyperbel, so müssen die Punkte S und T auf der Axe AB

liegen und zwar muss ihre Entfernung gleich sein dem Durchmesser des Kreises, der den den Asymptoten parallelen Vectoren aus A und B entspricht. Ist daher a die Haupthalbaxe, α der halbe Asymptotenwinkel, so liegen die beiden Punkte S und T vom Mittelpunkte der Hyperbel auf beiden Seiten um $a . \cot \alpha$ entfernt. Bei der gleichseitigen Hyperbel schneiden sich daher alle Kreise in den Scheiteln derselben, bei einer Hyperbel, für welche $\cos^2 \alpha = \sin \alpha$ ist, in den Brennpunkten.

2) Ist der gegebene Kegelschnitt ein Kreis, so fällt, wie leicht aus der Construction des Punktes O zu sehen, die gemeinschaftliche Sehne ST mit der aus dem Mittelpunkt des gegebenen Kreises auf die Gerade CD gefällten Senkrechten zusammen; ferner zeigt eine einfache Betrachtung, dass dann dieser Durchmesser des gegebenen Kreises in den Punkten S und T harmonisch getheilt wird, woraus weiter folgt, dass alle die Kreise sich mit dem gegebenen rechtwinklig schneiden. Dr. F. Wetzig.

VII. Einige neue Sätze über Fusspunktflächen. Von E. Bacaloglò.

I. Analog den von Wetzig und Raabe für Fusspunktcurven gefundenen Sätzen gilt für Fusspunktflächen der Satz: „Der Winkel zwischen Leitstrahl und Berührungsebene bleibt constant für alle sich entsprechenden Punkte der successiven Fusspunktflächen einer gegebenen Fläche F und die Normale an einem Punkte der Fusspunktfläche $n$ter Ordnung geht durch die Mitte des Leitstrahles des entsprechenden Punktes der Fusspunktfläche der $(n-1)$ten Ordnung. Man denke sich nämlich eine die Fläche F in der Nähe des Punktes M umhüllende Kegelfläche. Die Fusspunktcurve dieser letztern, welche bekanntlich eine sphärische Curve ist, liegt zugleich auf der Fusspunktfläche F'. Geht man zur Grenze über, so reducirt sich jene sphärische Curve zu dem gemeinschaftlichen Elemente M' der Fläche F' und der Kugel, deren Durchmesser gleich ist dem Leitstrahle des Punktes M, und giebt mithin die Richtung der gemeinschaftlichen Berührungsebene. Daraus folgt: 1) dass die Normale des Punktes M' durch die Mitte des Leitstrahles OM geht (wenn O den Pol bezeichnet), und mithin der erwähnte Winkel constant bleibt, und 2) dass die successiven Normalen der Punkte $M, M' \ldots$ in einer Ebene liegen, welche durch den Pol geht, und gegen einander gleichgeneigt sind. Ist die Fläche F bei M doppelt gekrümmt, so kann man statt einer zwei Kegelflächen sich denken, von deren Scheiteln der eine über und der andere unter der Fläche F liegt.

Analytisch lässt sich derselbe Satz durch Umkehrung der Aufgabe der Fusspunktflächen beweisen, d. i. wenn man zu der Fusspunktfläche F' die Basis F sucht. F ergiebt sich alsdann, als Umhüllungsfläche der Ebenen

$$1) \qquad xx' + yy' + zz' = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

durch Elimination von x', y', z' aus vorstehender Gleichung, der Gleichung

der Fläche F' und den aus 1) durch partielle Differentiation abgeleiteten Gleichungen

2) $$x + p'z = 2(x' + p'z'), \quad y + q'z = 2(y' + q'z').$$

Diese letztern Gleichungen zeigen, dass die Projectionen der Normalen zur Fläche F' durch die Mitte der Projectionen des Radiusvectors der Fläche F gehen, womit der Satz völlig bewiesen ist.

II. Die den Curven der gleichgeneigten Berührungsebenen der Fläche F auf F' entsprechenden Curven sind Durchschnitte von F' mit geraden Kreiskegeln, denn man findet mit Hilfe der Gleichungen

$$p^2 + q^2 = \text{einer Constanten } k^2,$$

3) $$x' = -pz', \quad y' = -qz',$$

folgende Relation

$$x'^2 + y'^2 = k^2 z'^2.$$

III. Denkt man sich eine Fläche F, das ihr entsprechende reciproke System von Flächen $F_1, F_2, F_3 \ldots$ (im Monge'schen Sinne) und die Fusspunktflächen $F_1', F_2', F_3' \ldots$ jeder derselben, so liegen die in einem Punkte M der Fläche F entsprechenden Punkte der Flächen $F_1', F_2', F_3' \ldots$ auf einer Kugel, deren Durchmesser gleich dem z des Punktes M ist. Da die Berührungsebenen an den dem Punkte M entsprechenden Punkten der Flächen $F_1, F_2, F_3 \ldots$ in einen gewissen Punkt der z-Achse zusammenlaufen, so ist der Satz von selbst einleuchtend. Der analoge Satz findet für ebene Curven statt.

IV. Werden die Gleichungen 3) nach x' und y' differenzirt, indem der Reihe nach y' und x' als constant betrachtet wird, so ergiebt sich

$$r\frac{dx}{dx'} + s\frac{dy}{dx'} = \frac{p'x' - z'}{z'^2}, \quad r\frac{dx}{dy'} + s\frac{dy}{dy'} = \frac{q'x'}{z'^2},$$

$$s\frac{dx}{dx'} + t\frac{dy}{dx'} = \frac{p'y'}{z'^2}, \quad s\frac{dx}{dy'} + t\frac{dy}{dy'} = \frac{q'y' - z'}{z'^2};$$

hieraus durch Multiplication der ersten mit der letzten dieser Gleichungen und Subtraction des Productes der beiden mittleren:

4) $$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dx'}\frac{dy}{dy'} - \frac{dx}{dy'}\frac{dy}{dx'} &= \frac{(p'x' - z')(q'y' - z') - p'q'x'y'}{z'^4(rt - s^2)} \\ &= \frac{1 + pp' + qq'}{z'^2(rt - s^2)}. \end{aligned}\right.$$

Differenzirt man auf ähnliche Weise die Gleichungen 2), so findet man:

$$(1 + pp')\frac{dx}{dx'} + qp'\frac{dy}{dx'} = 2(1 + p'^2 + r'z') - r'z,$$

$$(1 + pp')\frac{dx}{dy'} + qp'\frac{dy}{dy'} = 2(p'q' + s'z') - s'z,$$

$$pq'\frac{dx}{dx'} + (1 + qq')\frac{dy}{dx'} = 2(p'q' + s'z') - s'z,$$

$$pq'\frac{dx}{dy'} + (1 + qq')\frac{dy}{dy'} = 2(1 + q'^2 + t'z') - t'z;$$

hieraus folgt wie früher:

$$(1+pp'+qq')\left(\frac{dx}{dx'}\frac{dy}{dy'}-\frac{dx}{dy'}\frac{dy}{dx'}\right)=$$

$$=4(1+p'^2+r'z')(1+q'^2+t'z')-4(p'q'+s'z')^2+(r't'-s'^2)z^2$$
$$-2[(1+p'^2+r'z')t'+(1+q'^2+t'z')r'-2s'(p'q'+s'z')]z,$$

oder

$$\frac{dx}{dx'}\frac{dy}{dy'}-\frac{dx}{dy'}\frac{dy}{dx'}=\frac{4(r't'-s'^2)}{1+pp'+qq'}\cdot$$
$$\cdot\left[\left(\frac{z-2z'}{2}\right)^2-\frac{(1+p'^2)t'+(1+q'^2)r'-2p'q's'}{r't'-s'^2}\cdot\frac{z-2z'}{2}+\frac{1+p'^2+q'^2}{r't'-s'^2}\right].$$

Bezeichnen R_1, R_2 und R_1', R_2' die respectiven Hauptkrümmungsradien der Basis und der Fusspunktfläche, ϱ, ϱ' die entsprechenden Leitstrahlen, so kann vorstehende Gleichung, da

$$(z-2z')\sqrt{1+p'^2+q'^2}=\varrho$$

ist, wie folgt geschrieben werden:

5) $$\frac{dx}{dx'}\frac{dy}{dy'}-\frac{dx}{dy'}\frac{dy}{dx'}=\frac{4(r't'-s'^2)\left(R_1'-\frac{\varrho}{2}\right)\left(R_2'-\frac{\varrho}{2}\right)}{(1+p'^2+q'^2)(1+pp'+qq')}$$

Daraus ergiebt sich in Verbindung mit 4) und da

$$\cos\chi=\frac{1+pp'+qq'}{\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\sqrt{1+p'^2+q'^2}},$$

wenn χ den Winkel (ϱ, ϱ') oder den der entsprechenden Normalen bezeichnet, folgende bemerkenswerthe Relation:

6) $$\frac{\left(R_1'-\frac{\varrho}{2}\right)\left(R_2'-\frac{\varrho}{2}\right)}{\frac{1}{4}R_1'R_2'}=\frac{R_1R_2}{\varrho^2}.$$

Man findet ferner, wenn dF, dF' die entsprechenden Flächenelemente bezeichnen,

$$dF'=\frac{\frac{1}{4}R_1'R_2'}{\left(R_1'-\frac{\varrho}{2}\right)\left(R_2'-\frac{\varrho}{2}\right)}\cdot\frac{1+pp'+qq'}{\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\sqrt{1+p'^2+q'^2}}\,dF,$$

oder

7) $$\frac{dF'}{dF}=\frac{\varrho\varrho'}{R_1R_2}.$$

VIII. Bemerkungen über Curven und Flächen zweiten Grades. Von Dr. HEILERMANN, Director der Provinzial-Gewerbschule zu Koblenz. Auf jeder Normale eines Kegelschnittes werden sowohl durch die Achsen als durch die um den Mittelpunkt mit den Summen oder Differenz der Halbachsen beschriebenen Kreise Stücke abgeschnitten, welche mit der Entfernung der zugehörigen Berührenden vom Mittelpunkte Rechtecke von con-

stanten Grössen bilden. Von dieser Eigenschaft ausgehend, habe ich i Allgemeinen den geometrischen Ort eines Punktes, welcher auf der No male ein der obigen Bedingung genügendes Stück begränzt, untersucl und erlaube mir im Nachfolgenden einige Resultate, zu welchen ich gelan bin, den Lesern dieser Zeitschrift vorzulegen.

§. 1.

Wird vom Mittelpunkt O der Ellipse

1) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

auf die Gerade

2) $$\frac{x}{a^2}\cdot x_1+\frac{y}{b^2}\cdot y_1=1,$$

welche dieselbe im Punkte $m=(xy)$ berührt, die Senkrechte ξ gefällt, s ist bekanntlich

3) $$\cos(\xi a)=\frac{\xi x}{a^2},\ \cos(\xi b)=\frac{\xi y}{b^2},\ \frac{1}{\xi^2}=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}.$$

Trägt man nun auf der Normale desselben Punktes vom Fusspunkte au nach beiden Seiten die Strecken

$$mn=mn_1=e$$

ab, so sind

$$x_1=x\pm e\cdot\frac{\xi x}{a^2},\ y_1=y\pm e\cdot\frac{\xi y}{b^2}$$

die Coordinaten der Endpunkten n und n_1, weil $\frac{\xi x}{a^2}$ und $\frac{\xi y}{b^2}$ zugleich die C sinus der Winkel sind, welche die Normale mit den Achsen bildet.

Wenn nun die Strecke e der vom Mittelpunkte auf die Berührend des Punktes m gefällten Senkrechten ξ umgekehrt proportional ist, so stel dieselbe zugleich zu dem Durchmesser, welcher der Berührenden parall ist, in directem Verhältnisse. Wenn also $2d_1$ diesen Durchmesser und irgend eine constante Linie darstellt, so ist

$$e=\frac{k^2}{\xi}=\frac{k^2}{ab}d_1.$$

Durch Einsetzung dieses Werthes erhalten die Coordinaten der Punkte und n_1 folgende Form

4) $$x_1=\frac{a^2\pm k^2}{a^2}\cdot x,\ y_1=\frac{b^2\pm k^2}{b^2}\cdot y.$$

Mithin liegen die Punkte n und n_1 in den Ellipsen

5) $$\left(\frac{a x_1}{a^2\pm k^2}\right)^2+\left(\frac{b y_1}{b^2\pm k^2}\right)^2=1;$$

und diese sind immer confocal, denn das Quadrat ihrer Excentricität ist

6) $$\left(a\pm\frac{k^2}{a}\right)^2-\left(b\pm\frac{k^2}{b}\right)^2=(a^2-b^2)\left(1-\frac{k^4}{a^2b^2}\right).$$

Werden also auf einer Normale einer Ellipse vom Fusspunkte aus nach beiden Seiten Stücke abgeschnitten, welche mit der Entfernung der zugehörigen Berührungslinie vom Mittelpunkte Rechtecke von constanter Grösse bilden, so sind die Ortscurven dieser Schnittpunkte zwei confocale Ellipsen.

Die Punkte m, n und n_1 sind entsprechende Punkte in den Kegelschnitten 1) und 5), denn es verhält sich

$$x : \frac{a^2+k^2}{a^2} x : \frac{a^2-k^2}{a^2} x = a : \frac{a^2+k^2}{a} : \frac{a^2-k^2}{a},$$

$$y : \frac{b^2+k^2}{b^2} y : \frac{b^2-k^2}{b^2} y = b : \frac{b^2+k^2}{b} : \frac{b^2-k^2}{b}.$$

Durch Umkehrung ergiebt sich hieraus folgender Satz:

Die Linie, welche zwei entsprechende Punkte zweier confocalen Ellipsen verbindet, ist in allen Lagen Normale einer dritten Ellipse, von welcher sie halbirt wird.

Drei specielle Werthe von k^2 sind hier beachtenswerth, nämlich die beiden, für welche eine der Coordinaten 4) Null wird, und derjenige, durch welchen die Excentricität 6) verschwindet. Bezeichnet man die Punkte der Normalen, welche in den Axen der Ellipse 1) liegt mit P_0 und Q_0, so ist

$$7) \qquad m P_0 = \frac{a^2}{\xi}, \; m Q_0 = \frac{b^2}{\xi}.$$

Sind ferner r und r_1 die Punkte der Normale, für welche

$$k^2 = ab,$$

so ist

$$8) \qquad mr = mr_1 = d_1 = \frac{ab}{\xi},$$

und die Punkte selbst liegen in den Kreisen

$$9) \qquad x_1^2 + y_1^2 = (a \pm b)^2,$$

deren Gleichungen man aus 5) erhält, wenn man darin $k^2 = ab$ setzt.

Wenn $k^2 < ab$, also $e < d_1$, so liegen die Brennpunkte der Kegelschnitte 5) in der grossen Axe der Ellipse 1), und wenn dagegen $k^2 > ab$, also $e > d_1$, so liegen sie in der kleinen.

Verbindet man die Gleichungen 7) und 8), so entsteht zunächst

$$rQ_0 = \frac{a+b}{\xi} b, \quad r_1 Q_0 = \frac{a-b}{\xi} b, \quad r P_0 = \frac{a+b}{\xi} a, \quad r_1 P_0 = \frac{a-b}{\xi} a,$$

und hieraus folgt die Proportion

$$rQ_0 : rP_0 = r_1 Q_0 : r_1 P_0 = b : a.$$

Wird also das von den Achsen begrenzte Stück einer Normale einer Ellipse nach dem umgekehrten Verhältnisse der Achsen, in welchem die Endpunkte liegen, harmonisch getheilt, so liegen die Theilpunkte in den Kreisen, welche um den Mittelpunkt der Ellipse mit der Summe und Differenz der Halbachsen der Ellipse beschrieben sind.

Die vorstehende Entwicklung kann in derselben Weise auch für die Hyperbel und Parabel ausgeführt und hier also dem Leser überlassen werden.

§. 2.

Legt man durch den Punkt $m = (xy)$ ausser der Ellipse 1) auch noch eine Hyperbel

11) $$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1,$$

welche mit jener die Brennpunkte gemeinsam hat, so ist bekanntlich

$$a^2 - a_1^2 = b^2 - b_1^2 = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)$$

und es stehen die Kegelschnitte 1) und 11) im Punhte $m = (xy)$ aufeinander senkrecht. Denkt man sich ferner die Kegelschnitte, welche die im Punkte m aufeinander senkrecht stehenden Normalen der Kegelschnitte 1) und 11) als Achsen enthalten und die Achsen derselben im Mittelpunkte O berühren, so sind

12) $$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{a_1^2} = 1$$

12a) $$\frac{\xi^2}{b^2} + \frac{\eta^2}{b_1^2} = 1$$

die Gleichungen der letztern und zeigen sogleich, dass auch diese Kegelschnitte die Brennpunkte gemeinsam haben.

Das Quadrat der gemeinsamen Excentricität ist

$$a^2 - a_1^2 = b^2 - b_1^2 = d_1^2,$$

also begränzen ihre Brennpunkte auf der Normale der Ellipse 1) nach beiden Seiten vom Fusspunkt m eine Strecke

$$e = d_1$$

mithin liegen sie in den Kreisen 9).

Werden also für irgend einen Punkt einer Ellipse die Kegelschnitte gezeichnet, welche die Achsen derselben im Mittelpunkte berühren und die Normale und Tangente desselben Punktes als Achsen enthalten, so liegen die gemeinsamen Brennpunkte dieser Kegelschnitte in den Kreisen welche um den Mittelpunkt der Ellipse mit der Summe und Differenz ihrer Halbachsen beschrieben worden sind.

Die bekannten Eigenschaften der Kegelschnitte in Bezug auf ihre Brennpunkte ergeben sich hier für die Curven 8) mit besonderer Leichtigkeit.

§. 3.

Wenn von dem Mittelpunkte O des Ellipsoides

3) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

auf die Ebene

$$14)\qquad \frac{x}{a^2}\cdot x_1+\frac{y}{b^2}\cdot y_1+\frac{z}{c^2}\cdot z_1=1,$$

welche dasselbe im Punkte $m=(xyz)$ berührt, die Senkrechte ξ gefällt wird, so ist

$$15)\qquad \cos(\xi a)=\frac{\xi x}{a^2},\ \cos(\xi b)=\frac{\xi y}{b^2},\ \cos(\xi c)=\frac{\xi z}{c^2},\ \frac{1}{\xi^2}=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}.$$

Trägt man nun auf der Normale des Punktes $m=(xyz)$ vom Fusspunkte aus nach beiden Seiten die Strecken

$$mn=mn_1=e$$

ab, so sind

$$x_1=x\pm e\cdot\frac{\xi x}{a^2},\ y_1=y\pm e\cdot\frac{\xi y}{b^2},\ z_1=y\pm e\cdot\frac{\xi z}{c^2}$$

die Coordinaten der Punkte n und n_1, weil $\frac{\xi x}{a^2}, \frac{\xi y}{b^2}, \frac{\xi z}{c^2}$ zugleich die Cosinus der Winkel sind, welche die Normale mit den Achsen bildet. Wird nun die Strecke e so gewählt, dass sie der Senkrechten umgekehrt proportional ist, so steht dieselbe zugleich zur Fläche des Centralschnittes, welcher der Berührungsebene des Punktes m parallel ist, in directem Verhältnisse. Wenn also d_1 und d_2 die Halbachsen dieses Schnittes und k irgend eine constante Linie darstellt, so ist

$$e=\frac{k^2}{\xi}=\frac{k^2}{abc}\cdot d_1 d_2.$$

Durch Einsetzung dieses Werthes erhalten die Coordinaten der Punkte n und n_1 folgende Form

$$x_1=\frac{a^2\pm k^2}{a^2}\cdot x,\ y_1=\frac{b^2\pm k^2}{b^2}\cdot y,\ z_1=\frac{c^2\pm k^2}{c^2}\cdot z.$$

Mithin liegen die Punkte n und n_1 in den Flächen

$$17)\qquad \left(\frac{a x_1}{a^2\pm k^2}\right)^2+\left(\frac{b y_1}{b^2\pm k^2}\right)^2+\left(\frac{c z_1}{c^2\pm k^2}\right)^2=1,$$

und diese sind immer confocal, da die Quadrate der Excentricitäten der Achsenschnitte für beide Flächen denselben Werth haben, nämlich

$$18)\qquad \left(a\pm\frac{k^2}{a}\right)^2-\left(b\pm\frac{k^2}{b}\right)^2=(a^2-b^2)\left(1-\frac{k^4}{a^2b^2}\right),$$

$$18a)\qquad \left(b\pm\frac{k^2}{b}\right)^2-\left(c\pm\frac{k^2}{c}\right)^2=(b^2-c^2)\left(1-\frac{k^4}{b^2c^2}\right),$$

$$19b)\qquad \left(c\pm\frac{k^2}{c}\right)^2-\left(a\pm\frac{a^2}{a}\right)^2=(c^2-a^2)\left(1-\frac{k^4}{a^2c^2}\right).$$

Werden also auf einer Normale eines Ellipsoides nach beiden Seiten vom Fusspunkte aus Stücke abgeschnitten, welche mit der Entfernung der zugehörigen Berührungsebene vom Mittelpunkte Rechtecke von constanten Grössen bilden, so liegen die Endpunkte dieser Stücke in zwei confocalen Flächen.

Die Punkte m, n und n_1 in den Ellipsoiden 13) und 17) sind für alle Werthe von k^2 entsprechende Punkte, denn das Verhältniss ihrer Coordinaten ist gleich dem Verhältnisse der gleichliegenden Achsen, oder

$$x : \frac{a^2+k^2}{a^2} x : \frac{a^2-k^2}{a^2} x = a : \frac{a^2+k^2}{a} : \frac{a^2-k^2}{a},$$
$$y : \frac{b^2+k^2}{b^2} y : \frac{b^2-k^2}{b^2} y = b : \frac{b^2+k^2}{b} : \frac{b^2-k^2}{b},$$
$$z : \frac{c^2+k^2}{c^2} z : \frac{c^2-k^2}{c^2} z = c : \frac{c^2+k^2}{c} : \frac{c^2-k^2}{c}.$$

Wenn man diesen Zusammenhang umkehrt, so erhält man folgenden Satz:

Die Linie, welche zwei entsprechende Punkte zweier confocalen Ellipsoide verbindet, ist in allen Lagen Normale eines dritten Ellipsoides, von welchem sie halbirt wird.

Sechs specielle Werthe von k^2 verdienen hier beachtet zu werden, nämlich die drei, für welche eine der Coordinaten 16) Null wird, und die drei, für welche eine der Excentricitäten unter 18) verschwindet oder die confocalen Ellipsoide 17) zu Sphäroiden werden. Bezeichnet man die Punkte der Normalen, für welche die Coordinaten x_1, y_1, z_1 Null werden, der Reihe nach mit P_0, Q_0, R_0, so ist

19) $$mP_0 = \frac{a^2}{\xi}, \quad mQ_0 = \frac{b^2}{\xi}, \quad mR_0 = \frac{c^2}{\xi}.$$

Bezeichnet man ferner die Punkte der Normalen, für welche

$$k^2 = bc,$$

mit p und p_1, so ist

20) $$mp = mp_1 = \frac{bc}{\xi} = \frac{d_1 d_2}{a}$$

und die Punkte liegen in den confocalen Sphäroiden

21) $$\left(\frac{ax_1}{a^2 \pm bc}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b \pm c}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{c \pm b}\right)^2 = 1,$$

deren gemeinsame Excentricität

22) $$\sqrt{\left(a \pm \frac{bc}{a}\right)^2 - (b \pm c)^2} = \frac{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}{a}.$$

Setzt man zweitens

$$k^2 = ac$$

und bezeichnet die zugehörigen Punkte in der Normalen mit q und q_1, so ist

20a) $$mq = mq_1 = \frac{ac}{\xi} = \frac{d_1 d_2}{b}$$

und es liegen diese Punkte in den confocalen Sphäroiden

21a) $$\left(\frac{x_1}{a \pm c}\right)^2 + \left(\frac{by_1}{b^2 \pm ac}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{c \pm a}\right)^2 = 1,$$

gemeinsame Excentricität

22 a) $$\sqrt{\left(b \pm \frac{ac}{b}\right)^2 - (a \pm c)^2} = \frac{\sqrt{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}}{b}.$$

Wenn zuletzt r und r_1 diejenigen Punkte der Normalen sind, für welche $k^2 = ab$, so ist

20 b) $$mr = mr_1 = \frac{ab}{\xi} = \frac{d_1 d_2}{c}$$

und die Punkte liegen in den confocalen Sphäroiden

21 b) $$\left(\frac{x_1}{a \pm b}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b \pm a}\right)^2 + \left(\frac{c z_1}{c^2 \pm ab}\right)^2 = 1,$$

deren Excentricität

22 b) $$\sqrt{\left(c \pm \frac{ab}{c}\right)^2 - (a \pm b)^2} = \frac{\sqrt{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}}{c}.$$

Nehmen wir an, dass

$$a > b > c$$

so ist die Excentricität unter 22) und 22 b) real, dagegen die unter 22 a) imaginär, mithin sind zugleich die Flächen 21) und 21 b) verlängerte Sphäroide, während die unter 21 a) abgeplattet sind. Wenn man nun noch beachtet, dass die Brennpunkte dieser Sphäroide, sowohl die realen in den verlängerten als die imaginären in den abgeplatteten, auch die Focalpunkte des Ellipsoids 13) sind*), so ergiebt sich aus den vorstehenden Gleichungen folgender Satz:

Werden auf einer Normalen eines Ellipsoids nach beiden Seiten vom Fusspunkte aus solche Stücke abgeschnitten, dass diese mit der Hälfte einer Achse des Ellipsoides ein Rechteck, gleich dem aus den Halbachsen des zur Normale senkrechten Centralschnittes, bilden, so liegen die Endpunkte der abgeschnittenen Stücke in zwei confocalen Sphäroiden, deren gemeinsame (reale oder imaginäre) Brennpunkte die in jener Achse liegenden (realen oder imaginären) Focalpunkte des Ellipsoides sind und deren Aequator die Summe der Differenz der andern Achsen als Durchmesser enthält.

Durch Verbindung der Gleichungen 19) und 20) erhält man zunächst

$$pR_0 = \frac{b+c}{\xi} \cdot c, \quad qP_0 = \frac{a+c}{\xi} \cdot a, \quad rQ_0 = \frac{a+b}{\xi} \cdot b,$$

$$p_1R_0 = \frac{b-c}{\xi} \cdot c, \quad q_1P_0 = \frac{a-c}{\xi} \cdot a, \quad r_1Q_0 = \frac{a-b}{\xi} \cdot b,$$

$$pQ_0 = \frac{b+c}{\xi} \cdot b, \quad qR_0 = \frac{a+c}{\xi} \cdot c, \quad rP_0 = \frac{a+b}{\xi} \cdot a,$$

$$p_1Q_0 = \frac{b-c}{\xi} \cdot b, \quad q_1R_0 = \frac{a-c}{\xi} \cdot c, \quad r_1P_0 = \frac{a-b}{\xi} \cdot a,$$

und hieraus folgen die Proportionen

*) S. Crelle's Journal. Bd. 56.

23) $pR_0 : pQ_0 = p_1R_0 : p_1Q_0 = c : b,$

23 a) $qP_0 : qR_0 = q_1P_0 : q_1R_0 = a : c,$

23 b) $rQ_0 : rP_0 = r_1Q_0 : r_1P_0 = b : a.$

Wird also das Stück der Normale eines Ellipsoides, welches zwei Achsenebenen begrenzen, nach dem Verhältnisse der Achsen, welche auf den Begrenzungsebenen senkrecht stehen, harmonisch getheilt, so liegen die Theilpunkte in zwei confocalen Sphäroiden, deren Aequator die Summe oder Differenz jener zwei Achsen als Durchmesser enthält und deren gemeinsame (reale oder imaginäre) Brennpunkte die in der dritten Achse liegenden Focalpunkte des Ellipsoides sind.

§. 4.

Werden durch den Punkt $m = (xyz)$ ausser dem Ellipsoide 13) auch noch die beiden Hyperboloide

24) $$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1,$$

24 a) $$\frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} + \frac{z^2}{c_2^2} = 1$$

gelegt, so ist bekanntlich

$$a^2 - a_1^2 = b^2 - b_1^2 = c^2 - c_1^2 = d_1^2; \quad a^2 - a_2^2 = b^2 - b_2^2 = c^2 - c_2^2 = d_2^2,$$
$$d_1^2 d_2^2 = a^4 b^4 c^4 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)$$

und es stehen die Flächen 13) und 24) im Punkte $m(xyz)$ auf einander senkrecht. Denkt man sich ferner die Flächen zweiten Grades, welche die im Punkte m senkrecht stehenden Normalen der Flächen 13) und 24) als Achsen enthalten und die Achsenebenen derselben im Mittelpunkte O berühren, so sind

25) $$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{a_1^2} + \frac{\zeta^2}{a_2^2} = 1,$$

25 a) $$\frac{\xi^2}{b^2} + \frac{\eta^2}{b_1^2} + \frac{\zeta^2}{b_2^2} = 1,$$

25 b) $$\frac{\xi^2}{c^2} + \frac{\eta^2}{c_1^2} + \frac{\zeta^2}{c_2^2} = 1$$

die Gleichungen der letztern und zeigen sogleich, dass auch diese Flächen confocal sind.

Die in der Normale des Punktes m liegenden Focalpunkte dieser Flächen sind die oben erwähnten Punkte p, p_1, q, q_1 und r, r_1, denn es ist

$$mp = mp_1 = \frac{d_1 d_2}{a} = \frac{\sqrt{(a^2 - a_1^2)(a^2 - a_2^2)}}{a},$$
$$mq = mq_1 = \frac{d_1 d_2}{b} = \frac{\sqrt{(b^2 - b_1^2)(b^2 - b_2^2)}}{b},$$

$$mr = mr_1 = \frac{d_1 d_2}{c} = \frac{\sqrt{(c^2 - c_1^2)(c^2 - c_2^2)}}{c}.$$

Hieraus erhält man folgenden Satz:

Wenn man eine Normale eines Ellipsoides und die Normalen der beiden durch ihren Fusspunkt gehenden Hyperboloide, welche mit dem Ellipsoide confocal sind, als gemeinsame Achsen von drei Flächen zweiten Grades betrachtet, welche die Achsenebenen jener Flächen im Mittelpunkte berühren, so liegen die der Normale des Ellipsoides angehörigen Focalpunkte dieser Flächen in drei Paaren von confocalen Sphäroiden, von denen jedes Paar die in einer Achse des Ellipsoides gelegenen Focalpunkte als Brennpunkte und die Summe oder Differenz der andern Achsen des Ellipsoides als Durchmesser des Aequators enthält.

Die in dem Vorstehenden entwickelten Eigenschaften des Ellipsoides sind natürlich nicht auf diese Flächen beschränkt, sondern lassen sich in ähnlicher Weise für die Hyperboloide und theilweise auch für die Paraboloide herleiten.

IX. Eine Methode, das specifische Gewicht fester Körper ohne Gewichte, nur mit Hülfe eines graduirten Wagbalkens zu bestimmen. Die bisher bekannten Methoden zur Bestimmung des specifischen Gewichts fester Körper erfordern sämmtlich die Anwendung von Gewichten und sind sonach weniger bequem für den reisenden Mineralogen, welcher an Ort und Stelle das specifische Gewicht einer Mineralsubstanz bestimmen will. Letzteres ist oft wünschenswerth, wo es sich um die Unterscheidung ähnlicher Mineralspecies, z. B. der Feldspatharten handelt; für diesen Zweck ist die Methode vom russischen Gardeartilleriecapitän Gadolin (Poggend. Ann. Bd. 106, S. 213) sehr geeignet, indem dieselbe nur einen Apparat — nicht grösser als ein langer Bleistift — erfordert.

Die Theorie dieser Methode ist folgende: An einen zweiarmigen Hebel werden an Seidenfäden die beiden Körper aufgehangen, deren specifische Gewichte s und s' verglichen werden sollen. Der Hebel sei vor dem Anhängen bei horizontaler Lage im Gleichgewicht, hierauf hängt man die beiden Körper von den absoluten Gewichten P und P' so an den Wagbalken, dass wieder Gleichgewicht stattfindet, wobei ihre Entfernungen von der durch die Schneide gelegten Verticalebene resp. p und p' sein möge. Dieser zweite Gleichgewichtszustand wird durch die Gleichung:

1) $$Pp = P'p'$$

repräsentirt. Nun senkt man beide Körper in ein Gefäss mit Wasser und verschiebt den einen z. B. P so lange, bis wieder Gleichgewicht statt hat.

Hat die Grösse der Verschiebung δ betragen, so ist der Ausdruck dieses neuen Gleichgewichtes:

$$\left(P-\frac{P}{s}\right)(p+\delta)=\left(P'-\frac{P'}{s'}\right)p'.$$

Indem man 2) durch 1) dividirt, erhält man:

$$3) \qquad \left(1-\frac{1}{s}\right)\left(1+\frac{\delta}{p}\right)=\left(1-\frac{1}{s'}\right).$$

Diese letzte Gleichung dient dazu, um s zu berechnen, wenn s' gegeben ist oder umgekehrt und die Bestimmung des specifischen Gewichts nach dieser Methode erfordert nur, dass man mit einem oder einigen Körpern P' versehen sei, deren specifisches Gewicht s' man bereits genau kennt, so wie dass man die Entfernungen p und δ möglichst genau beobachte. Um sich wegen Beurtheilung des Gleichgewichtszustandes von der horizontalen Lage des Balkens zu überzeugen, braucht man nach Gadolin nur über selbigen hinweg nach einem Fenster oder nach der Kante eines Hauses zu visiren.

Der Erfinder dieser neuen Methode giebt in dem oben erwähnten Aufsatz zugleich die Discussion der Fehlerquellen und findet durch eine den Umständen gemäss längere und deswegen hier nicht mitgetheilte Rechnung, dass der möglich grösste Fehler, welcher unter ungünstigen Umständen bei sonst guter Beobachtung und guter Construction des Instrumentes, dem nach dieser Methode bestimmten specifischen Gewichte anhängen kann, höchstens 0,02 betragen kann. Demnach reicht diese Methode für die Zwecke vollkommen aus, für welche sie der Erfinder bestimmt hat.

E. Kahl.

X. Helmholtz' Versuche, die Vocale durch Mischung einfacher Töne nachzuahmen. (Aus Poggendorf's Annalen, Bd. 108, S. 280.) Es ist bekannt, dass die Elongation eines Punktes einer schwingenden Saite oder die Verdichtung und Geschwindigkeit an einer Stelle einer tönenden Luftsäule durch Rechnung gefunden werden kann, und dass für diese Elongation in den meisten Fällen ein Ausdruck erhalten wird, welcher aus einer unendlichen Anzahl von Gliedern besteht, von denen jedes die Form:

$$A \sin(2\pi m t + c)$$

besitzt. Hierbei hat m in den verschiedenen Gliedern der unendlichen Reihe die Werthe n, $2n$, $3n$ etc., wobei das Glied $A \sin(2\pi n t + c)$ das Anfangsglied der Reihe und n unabhängig von c und A ist. Die Zahl m bedeutet die Anzahl der einander völlig gleichen Schwingungsperioden, welche vermöge eines Gliedes der Reihe in einer Secunde auftreten; die unendliche Reihe entspricht daher der Uebereinanderlagerung von unendlich vielen einfachen Schwingungen, deren Schwingungsmengen n, $2n$, $3n$ etc. sind.

In Betreff der Wahrnehmung solcher über einander gelagerter Schwingungen gingen die Meinungen von Ohm und von Seebeck aus einander. Ersterer war der Ansicht, dass man bei gehörig angestrengter Aufmerksamkeit die stärksten der den einzelnen Schwingungen angehörigen Eindrücke auf das Gehör unterscheiden und aus einer solchen Uebereinanderlagerung durch das Gehör einzelne Eindrücke ebenso ausscheiden könne, als man durch Anwendung der Fourier'schen Reihen alle einzelnen Glieder mathematisch darstellen kann. Seebeck war dieser Ansicht heftig entgegen, indem er die unmittelbare Empfindung durch den Gehörnerven im Auge hatte, die meist eine einfache zu sein scheint, weil die Aufmerksamkeit des Hörenden auf den Totaleindruck aller einzelnen Schwingungen gerichtet ist, aus welchen der Klang und mithin die Natur der Tonquelle erkannt werden kann. Den verschiedenen Ansichten von Ohm und Seebeck entsprechen die Definitionen, welche die genannten Gelehrten vom Tone gegeben haben. Nach Ohm ist jede einzelne Bewegung von der Form $A \sin(2\pi n t + c)$ Ursache eines Tones, während Seebeck den Gesammteindruck Ton nennt, welcher durch Uebereinanderlagerung der Schwingungen eines Instrumentes entsteht, welche die Form $A \sin(2\pi m t + c)$ haben, wobei m die Werthe n, $2n$, $3n$ etc. besitzt.

Helmholtz bekennt sich zur Ohm'schen Definition des Tones und ist von ihm, wie es scheint, später eine vollständige Widerlegung der von Seebeck gemachten Einwürfe gegen Ohm's Definition zu erwarten (s. gen. Abh. S. 282). Ohne auf die bisherige Polemik über die Definition des Tones einzugehen, möge doch hier die bekannte für Ohm und Helmholtz sprechende Thatsache ins Gedächtniss zurückgerufen werden, dass Helmholtz bereits vor einigen Jahren Schwingungen hervorzubringen vermochte, welche einem Tone im Sinne Ohm's sehr nahe kommen. Das Mittel, welches Helmholtz anwendete, bestand in dem Zusammenwirken von Stimmgabeln und Resonanzröhren, deren Grundtöne zusammenfielen, während die Obertöne nicht übereintrafen. Wird eine solche Stimmgabel vor der zugehörigen Resonanzröhre ins Tönen gebracht, so verstärken sich die Grundtöne beider, während die Obertöne, welche nicht übereintreffen, sich nicht verstärken können und daher neben dem starken Grundtone nicht gehört werden.

Die Herstellung einfacher Töne auf die oben angegebene Weise machte für Helmholtz eine Untersuchung über das Zusammenwirken einfacher Töne möglich; bei einer früheren Arbeit der Art entdeckte er bekanntlich die Summationstöne, während er durch die vorliegende Arbeit schätzbare Beiträge zur Kenntniss von den Ursachen des Klanges geliefert hat. Für Das, was Seebeck Ton nennt, hat Helmholtz den Namen Klang vorgeschlagen und nennt Grundton des Klanges den tiefsten von denjenigen einfachen Tönen, durch deren Zusammenwirken der Klang entsteht. Während nun der *Klang des Seebeck*'schen Tones durch die verschiedene

Wellengestalt bei gleicher Periodicität zu erklären ist, kann dasselbe, d. h. die sogenannte Klangfarbe des Helmholtz'schen Klanges, durch das Zusammenwirken des Grundtones mit Obertönen verschiedener Stärke erklärt werden (das Wort Ton wird von nun an hier immer im Ohm'schen Sinne gebraucht werden). Helmholtz stellte sich, was die Klangfarbe anbetrifft, noch die Frage: Beruht die Unterscheidung der musikalischen Klangfarbe nur in der Empfindung von Obertönen verschiedener Stärke oder unterscheidet das Ohr auch die Phasenunterschiede?

Diese Frage beantwortete Helmholtz, indem er die Vocale der menschlichen Stimme, die als anhaltende musikalische Klänge und fast ganz frei von unmusikalischem Geräusch hervorgebracht werden können, durch die Combination von Tönen nachzuahmen suchte, welche durch Stimmgabeln mit Anwendung von Resonanzröhren rein erhalten wurden. Er bediente sich hierzu einer Reihe von 8 Stimmgabeln, die dem *B* in der tiefsten Octave der Männerstimmen und dessen harmonischen Obertönen b, f_1, b_1, d_2, f_2, as_2 und b_2 entsprachen. Die regelmässige schwingende Bewegung wurde den Gabeln durch einen galvanischen Apparat nach Art des Neef'schen Hammers ertheilt, die verschiedene Stärke der Töne durch das stärkere oder geringere Lüften des auf den Resonanzröhren befindlichen Deckels bewirkt. Den Phasenunterschied konnte Helmholtz willkürlich hervorbringen und beobachten, wozu er sich mehrerer Methoden bediente, deren Mittheilung die Kürze des Raumes hier nicht gestattet. Das bisher von Helmholtz gefundene Resultat ist wesentlich folgendes: Die musikalische Klangfarbe hängt nur von der Anwesenheit und Stärke der Obertöne, die in dem Klange enthalten sind, ab, nicht von ihren Phasenunterschieden.

Was nun die Vocale der männlichen Stimme anbelangt, so fand Helmholtz unter Anderem:

Das *U* erhält man am deutlichsten durch den Grundton mit ganz schwacher Begleitung des dritten Tones.

Das *O* entsteht durch kräftige Begleitung des Grundtones von der höheren Octave.

Das *E* wird namentlich durch den dritten Ton charakterisirt, bei mässiger Stärke des zweiten etc.

Es sind noch viele andere schätzbare Angaben in der eingangs erwähnten Abhandlung enthalten, in Betreff deren wir jedoch auf diese selbst verweisen müssen. E. Kahl.

V.

Von den Fusspunktlinien.

Von Dr. FRANZ WETZIG in Leipzig.

(Dritter Artikel.)

10.

Beziehungen zwischen dem Minimumpol und dem Krümmungsschwerpunkt einer Linie.

Unter dem Krümmungsschwerpunkt einer Linie versteht Steiner ihren Schwerpunkt bei einer Belastung, die umgekehrt proportional dem Krümmungshalbmesser, also direct proportional der Krümmung vertheilt ist. Um auch Curven betrachten zu können, bei denen das Vorzeichen der Krümmung wechselt, muss man diese Definition dahin erweitern: Krümmungsschwerpunkt einer Linie ist ihr Schwerpunkt, wenn jeder Punkt derselben mit einem Coefficienten versehen ist, dessen Grösse dem jedesmaligen Krümmungshalbmesser proportional ist und dessen Vorzeichen mit dem des Krümmungshalbmessers übereinstimmt; oder: er ist der Mittelpunkt paralleler an der Curve angebrachter Kräfte, deren Intensität umgekehrt proportional dem Krümmungshalbmesser und deren Richtung bei gleichem oder entgegengesetztem Vorzeichen desselben gleich oder entgegengesetzt ist.

Nennt man die Summe der Coefficienten, die auf ein Bogenstück kommen, kurzweg dessen Gewicht, so sei die Einheit des Gewichts das Gewicht des Kreisbogens von der Länge 1 und dem Halbmesser 1. Dann ist das Gewicht des Bogenelements ds_0 vom Krümmungshalbmesser ϱ_0

$$\frac{ds_0}{\varrho_0},$$

wird also durch den Contingenzwinkel gemessen, welcher nach §. 7 gleich ist dem Winkeldifferential $d\varphi_1$ der Fusspunktlinie, wenn der Coordinatenanfang der Pol ist.

Die Basis wird zunächst als eine Linie vorausgesetzt, die ihre Richtung nicht *sprungweise ändert.*

Seien nun x_0, y_0 die rechtwinkligen Coordinaten des Bogeneleme ds_0, ξ und η die des Krümmungsschwerpunktes der Basis, entspreche d Anfangspunkt der Basis $\varphi_1 = \gamma$, dem Endpunkt $\varphi_1 = \delta$, so ist der Krt mungsschwerpunkt bestimmt durch die Gleichungen

$$\xi \int_\gamma^\delta d\varphi_1 = \int_\gamma^\delta x_0 d\varphi_1,$$

$$\eta \int_\gamma^\delta d\varphi_1 = \int_\gamma^\delta y_0 d\varphi_1,$$

d. i.

$$\xi(\delta - \gamma) = \int_\gamma^\delta x_0 d\varphi_1,$$

$$\eta(\delta - \gamma) = \int_\gamma^\delta y_0 d\varphi_1.$$

Berücksichtigt man nun

$$x_0 = r_0 \cos\varphi_0, \quad y_0 = r_0 \sin\varphi_0,$$

$$r_0 = \frac{r_1}{\sin\alpha}, \quad \varphi_0 = \varphi_1 - \alpha + \frac{\pi}{2},$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{d\varphi_1},$$

so erhält man

$$\xi(\delta - \gamma) = \int_\gamma^\delta r_1 \cos\varphi_1 \, d\varphi_1 - \int_\gamma^\delta \sin\varphi_1 \, dr_1,$$

$$\eta(\delta - \gamma) = \int_\gamma^\delta r_1 \sin\varphi_1 \, d\varphi_1 - \int_\gamma^\delta \cos\varphi_1 \, dr_1.$$

Wendet man auf $\int_\gamma^\delta \cos\varphi_1 \, d\varphi_1$ und $\int_\gamma^\delta \sin\varphi_1 \, d\varphi_1$ die partielle Integration und bezeichnet mit $r_{1\delta}$ den zur Anomalie δ und mit $r_{1\gamma}$ den zur Anomali gehörigen Vector der Fusspunktlinie, d. i. die beiden Senkrechten auf Berührenden des Anfangs- und Endpunktes der Basis, so erhält man

$$1) \quad \begin{cases} \xi(\delta - \gamma) = 2\int_\gamma^\delta r_1 \cos\varphi_1 \, d\varphi_1 - (r_{1\delta}\sin\delta - r_{1\gamma}\sin\gamma), \\ \eta(\delta - \gamma) = 2\int_\gamma^\delta r_1 \sin\varphi_1 \, d\varphi_1 + (r_{1\delta}\cos\delta - r_{1\gamma}\sin\gamma). \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen sind die Coordinaten des Krümmungsschwerpunktes gegeben, wenn man die Gleichung ihrer Fusspunktlinie kennt.

Ist die Basis eine nach einem Umlauf der Berührenden geschlossene Linie, so ist einfacher

$$\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} r_1 \cos\varphi_1 \, d\varphi_1,$$

$$\eta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} r_1 \sin\varphi_1 \, d\varphi_1.$$

Nimmt man den Krümmungsschwerpunkt der Basis selbst als Pol, so gelten für die Fusspunktlinie die Relationen

$$2\int_\gamma^\delta r_1 \cos\varphi_1 \, d\varphi_1 = r_{1\delta} \sin\delta - r_{1\gamma} \sin\gamma,$$

$$2\int_\gamma^\delta r_1 \sin\varphi_1 \, d\varphi_1 = r_{1\gamma} \cos\gamma - r_{1\delta} \cos\delta.$$

Ist speciell die Basis eine nach einem Umlauf der Berührenden geschlossene Linie, so gilt für die Fusspunktlinie aus dem Krümmungsschwerpunkt

$$\int_0^{2\pi} r_1 \cos\varphi_1 \, d\varphi_1 = 0$$

und

$$\int_0^{2\pi} r_1 \sin\varphi_1 \, d\varphi_1 = 0.$$

Hat die Basis einen Wendepunkt oder lassen sich Berührende vom Coordinatenanfang (Pol) an sie legen, so gelten die S. 8 gemachten Bemerkungen. Es sind dann die beiden Integrale in 1) auf die dort angegebene Weise zu zerlegen, und ist unter $\delta - \gamma$ allgemein der Drehungswinkel τ der Berührenden der Basis zu verstehen. Der Drehungswinkel der Berührenden ist also das Maass des Gewichts. Ist derselbe gleich Null, so kann man natürlich nicht vom Krümmungsschwerpunkt reden.

Es werde daher τ statt $\delta - \gamma$ eingeführt. Ferner werde mit s die Sehne der Fusspunktlinie, welche Anfangs- mit Endpunkt verbindet, mit σ ihre Winkel gegen die Nulllinie bezeichnet, so ist

$$r_{1\delta} \sin\delta - r_{1\gamma} \sin\gamma = s \,.\, \sin\sigma,$$
$$r_{1\delta} \cos\delta - r_{1\gamma} \cos\gamma = s \,.\, \cos\sigma.$$

Endlich *sei nach der früheren* Bezeichnung

$$\int_{\gamma}^{\delta} r_1 \cos\varphi_1 \, d\varphi_1 = P,$$

$$\int_{\gamma}^{\delta} r_1 \sin\varphi_1 \, d\varphi_1 = Q,$$

so geht die Gleichung 1) über in

$$2)\quad \begin{cases} \xi \,.\, \tau = 2P - s \,.\, \sin\sigma, \\ \eta \,.\, \tau = 2Q + s \,.\, \cos\sigma. \end{cases}$$

Werden nun die hieraus sich ergebenden Werthe von P und Q in die Gleichung 5) des §. 8 eingesetzt und wird deshalb die Senkrechte auf die Berührende des Anfangspunktes der Basis als Nulllinie angenommen, so erhält man die Coordinaten des Minimumpols, ausgedrückt durch die des Krümmungsschwerpunktes, durch die Gleichungen:

$$3)\quad \begin{cases} x = \dfrac{(\tau - \sin\tau\cos\tau)(\xi\tau + s\sin\sigma) - \sin^2\tau\,(\eta\tau - s\cos\sigma)}{\tau^2 - \sin^2\tau}, \\ y = \dfrac{(\tau + \sin\tau\cos\tau)(\eta\tau - s\cos\sigma) - \sin^2\tau\,(\xi\tau + s\sin\sigma)}{\tau^2 - \sin^2\tau}. \end{cases}$$

Ebenso kann man den Minimalinhalt durch die Coordinaten des Krümmungsschwerpunktes ausdrücken, indem man die Werthe von P und Q aus Gleichung 2) in Gleichung 6) des §. 8 einsetzt.

Umgekehrt erhält man die Coordinaten des Krümmungsschwerpunktes ausgedrückt durch die des Minimumpols durch die Gleichungen

$$4)\quad \begin{cases} \xi\tau + s\sin\sigma = x(\tau + \sin\tau\cos\tau) + y\sin^2\tau, \\ \eta\tau - s\cos\sigma = x\sin^2\tau + y(\tau - \sin\tau\cos\tau). \end{cases}$$

Um hiernach die gegenseitige Lage vom Minimumpol und Krümmungsschwerpunkt zu betrachten, kann man von ersterem oder letzterem ausgehen.

I. Es werde der Minimumpol als bekannt vorausgesetzt und daher als Coordinatenanfang genommen. Dann erhält man für $x = y = 0$ aus Gleichung 4)

$$5)\quad \begin{cases} \xi\tau = -s\sin\sigma, \\ \eta\tau = s\cos\sigma, \end{cases}$$

worin s die Sehne der Fusspunktlinie vom Minimumpol aus, d. i. die Verbindungslinie der Fusspunkte der vom Minimumpol auf die Berührenden des Anfangs- und Endpunktes der Basis gefällten Lothe bezeichnet, sowie σ deren Neigung gegen die erste Senkrechte. Sei l die Entfernung des Krümmungsschwerpunktes vom Minimumpol, λ deren Anomalie, so folgt

$$l = \frac{s}{\tau},$$

$$\tan\lambda = -\cot\sigma.$$

Es liegt also der Krümmungsschwerpunkt in einer zur Sehne s senkrechten Entfernung vom Minimumpol gleich der des

Schwerpunktes des Kreisbogens, den man über der Sehne s und mit dem Centriwinkel τ beschreibt, von dessen Mittelpunkt.

Als specielle Fälle sind erwähnenswerth:

1) Liegt die Basis zu einer sie halbirenden Achse symmetrisch, so ist klar, dass Minimumpol und Krümmungsschwerpunkt auf dieser Achse liegen, und zwar erhält man den letzteren, wenn man die Entfernung des Schwerpunktes des aus dem Minimumpol beschriebenen Kreisbogens, welcher die Schenkel des Winkels τ berührt, nach der entgegengesetzten Richtung aufträgt.

2) Sei τ ein ganzes Vielfaches von π, $= m\pi$, d. h. sind die Berührenden des Anfangs- und Endpunktes der Basis einander parallel, so ist auch $\varepsilon = m\pi$ zu setzen und erhält man

$$\xi = 0,$$
$$\eta = \frac{(-1)^m s}{m\pi};$$

s bedeutet hier die senkrechte Entfernung der beiden Berührenden, und kann man daher sagen: Der Minimumpol und Krümmungsschwerpunkt einer Linie, deren Berührende sich um $m\pi$ dreht und um s fortschreitet, liegen in einer zu s senkrechten Entfernung von einander gleich dem Durchmesser eines Kreises vom Umfang $\frac{s}{m}$.

3) Dem vorigen Satz kann man einen andern Ausdruck geben im Fall die Basis eine gegen einen Punkt, ihren Mittelpunkt, symmetrisch liegende Curve ist, wo dann die Berührenden an den beiden Endpunkten jedes Durchmessers einander parallel sind. Nimmt man daher eine von einem Durchmesser abgetheilte Hälfte der Linie als Basis, so ist für dieselbe s gleich dem parallelen Durchmesser der Fusspunktlinie der gegebenen Curve aus dem Mittelpunkte. Dreht sich der Durchmesser, so ändern Krümmungsschwerpunkt und Minimumpol der von ihm begrenzten halben Linie ihre gegenseitige Lage so, dass sie sich immer in einer zu s senkrechten Entfernung $\frac{s}{\pi}$ von einander befinden. Dies kann man so ausdrücken:

Dreht sich der Durchmesser einer gegen einen Punkt symmetrischen Linie, so bewegt sich der Minimumpol der vom Durchmesser abgeschnittenen Hälfte gegen deren Krümmungsschwerpunkt auf einer der Fusspunktlinie der gegebenen Curve aus dem Mittelpunkt ähnlichen und gegen sie um 90° gewendeten Curve.

Da auch bei der logarithmischen Spirale die Berührenden an den Endpunkten jeder durch den Mittelpunkt gehenden Sehne einander parallel sind und die Fusspunktlinie aus dem Mittelpunkt eine gleiche logarithmische Spirale ist, so bewegt sich bei Drehung einer Sehne um den Mittelpunkt der Minimumpol des von der Sehne begrenzten Bogens

gegen dessen Krümmungsschwerpunkt auf einer gleichen logarithmischen Spirale.

4) Es wird $l = 0$ dann und nur dann, wenn $s = 0$ ist. Dies kann in zwei Fällen eintreten:

a) Wenn Anfangs- und Endpunkt der Linie eine gemeinsame Berührende haben. Hierin liegt der Satz: Krümmungsschwerpunkt und Minimumpol geschlossener Linien (die keine Ecken haben) fallen in einen Punkt zusammen.

b) Wenn der Coordinatenanfang, d. i. der Minimumpol, in den Durchschnittspunkt der Berührenden des Anfangs- und Endpunktes der Basis fällt. Da aber nach §. 8, 5) in Bezug auf den Minimumpol als Coordinatenanfang die Integrale P und Q verschwinden, so ist dazu nöthig, dass in Bezug auf den Durchschnittspunkt der beiden Berührenden als Coordinatenanfang $P = 0$ und $Q = 0$ werde; und umgekehrt, setzt man $P = Q = 0$, so ist sowohl $x = y = 0$, als auch, für $s = 0$, $\xi = \eta = 0$.

Krümmungsschwerpunkt und Minimumpol einer nicht gechlossenen Linie fallen dann und nur dann zusammen, und zwar in dem Durchschnittspunkte der Berührenden des Anfangs- und Endpunktes, wenn in Bezug auf denselben als Coordinatenanfang und Pol die Integrale P und Q verschwinden.

II. Es werde der Krümmungsschwerpunkt als bekannt vorausgesetzt und daher als Coordinatenanfang und Pol genommen. Dann erhält man, indem man in Gleichung 3) $\xi = \eta = 0$ setzt,

$$6)\quad \begin{cases} x = s\,\dfrac{\tau \sin\sigma + \sin\tau \sin(\tau - \sigma)}{\tau^2 - \sin^2\tau}, \\[2ex] y = -s\,\dfrac{\tau \cos\sigma + \sin\tau \cos(\tau - \sigma)}{\tau^2 - \sin^2\tau}. \end{cases}$$

Hier bedeutet s die Verbindungslinie der Fusspunkte der von dem Krümmungsschwerpunkt auf die Berührenden des Anfangs- und Endpunktes gefällten Lothe und σ deren Neigung gegen die auf der ersten Berührenden senkrechten Nulllinie.

Sei l die Entfernung des Minimumpols vom Krümmungsschwerpunkte, λ ihre Neigung gegen die Nulllinie, so folgt

$$7)\quad \begin{cases} l^2 = s^2\,\dfrac{\tau^2 + 2\tau \sin\tau \cos(2\sigma - \tau) + \sin^2\tau}{(\tau^2 - \sin^2\tau)^2}, \\[2ex] \tan\lambda = -\dfrac{\tau + \sin\tau \cos\tau + \sin^2\tau \,.\, \tan\sigma}{\sin^2\tau + (\tau - \sin\tau \cos\tau)\tan\sigma}, \end{cases}$$

wo l mit dem vorigen l identisch, λ von dem vorigen λ um π verschieden ist. Es lassen sich daher leicht Beziehungen zwischen den Grössen s, σ im einen und andern Falle aufstellen. Bemerkenswerth ist noch, dass die zweite Gleichung in Beziehung auf $\tan\lambda$ und $\tan\sigma$ symmetrisch ist, was man leicht geometrisch deuten kann, wenn man sich τ als bestimmt durch

σ und λ denkt. Aus diesen Gleichungen kann man ebenfalls die vorhin unter 2), 3) und 4) erwähnten Sätze folgern.

Reducirt man die Gleichung 6) auf $s\sin\sigma$ und $s\cos\sigma$ oder kürzer, setzt man in Gleichung 4) $\xi = \eta = 0$, so erhält man

$$s\sin\sigma = x(\tau + \sin\tau\cos\tau) + y\sin^2\tau,$$
$$-s\cos\sigma = x\sin^2\tau + y(\tau - \sin\tau\cos\tau).$$

Diese Gleichungen quadrirt und addirt giebt:

$$s^2 = x^2(\tau^2 + \sin^2\tau + 2\tau\sin\tau\cos\tau) + y^2(\tau^2 + \sin^2\tau - 2\tau\sin\tau\cos\tau) + 4xy\sin^2\tau,$$

welche Gleichung die einer Ellipse ist von den Halbachsen

$$a = \frac{s}{\tau + \sin\tau}, \quad b = \frac{s}{\tau - \sin\tau},$$

deren Achse a mit der Nulllinie den Winkel $\frac{\tau}{2}$ einschliesst, also auf der Halbirungslinie von τ senkrecht steht.

Durch partielle Differentiation des Werthes von l^2 in Gleichung 7) nach σ ergiebt sich aber, dass bei veränderlichem σ die Maximal- und Minimalwerthe von l sind

$$l = \frac{s}{\tau - \sin\tau} \quad \text{für} \quad \sigma = m\pi + \frac{\tau}{2}$$

und ist dann

$$\tan\lambda = -\cot\frac{\tau}{2},$$

also

$$l \,\#\, b,$$

ferner

$$l = \frac{s}{\tau + \sin\tau} \quad \text{für} \quad \sigma = (m + \tfrac{1}{2})\pi + \frac{\tau}{2},$$

und ist dann

$$\tan\lambda = \tan\frac{\tau}{2},$$

also

$$l \,\#\, a.$$

Dies kann man so in Worten aussprechen:

Der Minimumpol liegt auf einer Ellipse, deren Mittelpunkt der Krümmungsschwerpunkt ist, deren Halbachse $a = \frac{s}{\tau + \sin\tau}$ auf der Halbirungslinie von τ senkrecht steht, deren Halbachse $b = \frac{s}{\tau - \sin\tau}$ ihr parallel ist, deren Achsenkreuz daher parallel ist dem der Ellipsen für constanten Flächeninhalt. Diese Achsen sind zugleich Maximal- und Minimalwerth der Entfernung des Pols vom Krümmungsschwerpunkt bei unveränderlichem σ; und hat σ den Werth, welchem ein Maximum oder Minimum von l entspricht, so liegt der Minimumpol auf einem der beiden Endpunkte der beiden Ach-

sen, nämlich für $\sigma = m\pi + \frac{\tau}{2}$ auf dem einen Endpunkt der Achse b, für $\sigma = \frac{\tau}{2} + (m + \frac{1}{2})\pi$ auf dem von a.

Von diesen beiden Fällen tritt der zweite ein, wenn die Basis zu einer sie halbirenden Achse symmetrisch liegt. Dann ist nämlich $\sigma = \frac{\tau + \pi}{2}$ zu setzen und erhält man

$$x = \frac{s \cdot \cos\frac{\tau}{2}}{\tau + \sin\tau}, \quad y = \frac{s \cdot \sin\frac{\tau}{2}}{\tau - \sin\tau},$$

$$l = \frac{s}{\tau + \sin\tau},$$

$$\tan\lambda = \tan\frac{\tau}{2}.$$

Ein einfaches Beispiel hierzu giebt der Kreisbogen. Dessen Krümmungsschwerpunkt fällt offenbar mit dem gewöhnlichen Schwerpunkt zusammen und liegt daher auf der Halbirungslinie des Bogens in der Entfernung $\frac{2a\sin\frac{\tau}{2}}{\tau}$ vom Mittelpunkte, wenn a den Halbmesser des Kreises bezeichnet. Hieraus ergiebt sich leicht für s der Werth

$$s = 2a\sin\frac{\tau}{2} \cdot \frac{\tau - \sin\tau}{2},$$

und wenn man diesen einsetzt, erhält man als Entfernung des Minimumpols vom Schwerpunkt

$$l = 2a\sin\frac{\tau}{2}\,\frac{\tau - \sin\tau}{\tau(\tau + \sin\tau)}.$$

Addirt man hierzu die Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelpunkte, $\frac{2a\sin\frac{\tau}{2}}{\tau}$, so erhält man als Entfernung des Minimumpols vom Mittelpunkte den Ausdruck

$$\frac{4a\sin\frac{\tau}{2}}{\tau + \sin\tau}.$$

Für den Halbkreis ist $\tau = \pi$ zu setzen und wird $l = \frac{2a}{\pi}$; es liegt also der Schwerpunkt in der Mitte zwischen Mittelpunkt und Minimumpol. Der zugehörige Minimalinhalt ist

$$f_1'{}_{min.} = a^2\left[\frac{\tau}{2} - \frac{2(1 - \cos\tau)}{\tau + \sin\tau}\right],$$

für den Halbkreis daher

$$\frac{a^2}{2}\left(\pi - \frac{8}{\pi}\right).$$

11.

Beziehungen zwischen Krümmungsschwerpunkt und Minimumpol mehrerer Linien.

Unter dem Krümmungsschwerpunkt mehrerer Linien wird der Schwerpunkt der mit den ihnen zukommenden Gewichten versehenen Krümmungsschwerpunkte der einzelnen Linien verstanden. Seien $x, x', x'' \ldots\ldots$, $y, y', y'' \ldots$ die Coordinaten der letztern, $\tau, \tau', \tau'' \ldots$ ihre Gewichte, ξ und η die Coordinaten des gemeinsamen Schwerpunktes, so hat man demnach

$$\xi(\tau + \tau' + \tau'' + \ldots) = x\tau + x'\tau' + x''\tau'' + \ldots,$$
$$\eta(\tau + \tau' + \tau'' + \ldots) = y\tau + y'\tau' + y''\tau'' + \ldots,$$

wofür abgekürzt geschrieben werde

$$\xi \Sigma\tau = \Sigma x\tau,$$
$$\eta \Sigma\tau = \Sigma y\tau,$$

d. i. nach Gleichung 2) des vorigen Paragraphen

$$\xi \Sigma\tau = 2\Sigma P - \Sigma s \sin\sigma,$$
$$\eta \Sigma\tau = 2\Sigma Q + \Sigma s \cos\sigma.$$

Sei S die geometrische Summe der Anfangs- und Endpunkt der Fusspunktlinien verbindenden Sehnen s, T ihr Winkel gegen die Nulllinie, also

$$S.\sin T = \Sigma s \sin\sigma,$$
$$S.\cos T = \Sigma s \cos\sigma,$$

so hat man statt obiger Gleichungen

$$\xi \Sigma\tau = 2\Sigma P - S \sin T,$$
$$\eta \Sigma\tau = 2\Sigma Q + S \cos T.$$

Setzt man die hieraus sich ergebenden Werthe von $2\Sigma P$ und $2\Sigma Q$ in die Gleichung 5) des §. 9 ein, so erhält man die Coordinaten des Minimumpols ausgedrückt durch die des Krümmungsschwerpunktes, nämlich

$$1)\begin{cases} x = \dfrac{[\Sigma\tau - \Sigma \sin\tau \cos(\tau+2\gamma)]\,[\xi\Sigma\tau + S\sin T] - \Sigma\sin\tau\sin(\tau+2\gamma).[\eta\Sigma\tau - S\cos T]}{\Sigma^2\tau - R^2}, \\[2ex] y = \dfrac{\Sigma\sin\tau\sin(\tau+2\gamma).[\xi\Sigma\tau + S\sin T] - [\Sigma\tau + \Sigma\sin\tau\cos(\tau+2\gamma)]\,[\eta\Sigma\tau - S\cos T]}{\Sigma^2\tau - R^2}. \end{cases}$$

Umgekehrt werden die Coordinaten des Krümmungsschwerpunktes ausgedrückt durch die des Minimumpols in den Gleichungen

$$2)\begin{cases} \xi\Sigma\tau + S\sin T = x[\Sigma\tau + \Sigma\sin\tau\cos(\tau+2\gamma)] + y\,\Sigma\sin\tau\sin(\tau+2\gamma), \\ \eta\Sigma\tau - S\cos T = x\,\Sigma\sin\tau\sin(\tau+2\gamma) + y\,[\Sigma\tau - \Sigma\sin\tau\cos(\tau+2\gamma)]. \end{cases}$$

I. Es werde der Minimumpol resp. der Hauptpol als bekannt vorausgesetzt und daher als Coordinatenanfang genommen. Dann erhält man aus Gleichung 2) für $x = y = 0$

$$\xi\Sigma\tau = -S\sin T,$$
$$\eta\Sigma\tau = S\cos T,$$

woraus für die Entfernung l des Krümmungsschwerpunktes vom Minimumpol und deren Neigung λ folgt

$$l = \frac{S}{\Sigma\tau},$$

$$\tan\lambda = -\cot T;$$

Es liegt also der Krümmungsschwerpunkt in einer zur geometrischen Summe der Sehnen der Fusspunktlinien aus dem Minimumpol senkrechten Entfernung von diesem gleich der des Schwerpunktes des, über dieser geometrischen Summe als Sehne und mit der Summe der Drehungswinkel der Berührenden als Centriwinkel beschriebenen, Kreisbogens von dessen Mittelpunkt.

Ebenso lassen sich die übrigen Sätze des vorigen Paragraphen auf diesen Fall übertragen. Hervorgehoben werde nur noch der Fall

$S = 0$, wo dann $l = 0$ wird,

d. h.

Der Krümmungschwerpunkt und Minimumpol beliebig vieler gegebener Curven fallen zusammen:

1) wenn für jede derselben ihr Krümmungsschwerpunkt und Minimumpol zusammenfallen, die Curven also geschlossene oder solche sind, für welche beide Punkte in den Durchschnittspunkt der Berührenden des Anfangs- und Endpunktes fallen;

2) wenn die geometrische Summe der, Anfangs- und Endpunkte der Fusspunktlinien aus dem Minimumpol verbindenden, Sehnen verschwindet, d. i. wenn diese Sehnen durch parallele Verschiebung an einander gerückt, ein geschlossenes Vieleck bilden.

II. Es werde der Krümmungsschwerpunkt als Coordinatenanfang und Pol genommen und hiernach die Lage des Minimumpols bestimmt, so hat man in Gleichung 1) $\xi = \eta = 0$ zu setzen, wodurch man erhält:

$$x = S\frac{\sin T\,[\Sigma\tau - \Sigma\sin\tau\cos(\tau + 2\gamma)] + \cos T\,\Sigma\sin\tau\sin(\tau + 2\gamma)}{\Sigma^2\tau - R^2},$$

$$y = -S\frac{\cos T[\Sigma\tau + \Sigma\sin\tau\cos(\tau + 2\gamma)] + \sin T.\Sigma\sin\tau\sin(\tau + 2\gamma)}{\Sigma^2\tau - R^2};$$

wo nun S die geometrische Summe der dem Krümmungsschwerpunkt entsprechenden Sehnen und T ihre Neigung bezeichnet.

Seien wieder l und λ Vector und Anamalie des Minimumpols in Bezug auf den Krümmungsschwerpunkt, so folgt

$$l^2 = S^2\frac{\Sigma^2\tau + R^2 + 2\,\Sigma\tau\,[\cos 2T\,\Sigma\sin\tau\cos(\tau+2\gamma) + \sin 2T\,\Sigma\sin\tau\sin(\tau+2\gamma)]}{(\Sigma^2\tau - R^2)^2};$$

$$\tan\lambda = -\frac{\Sigma\tau + \Sigma\sin\tau\cos(\tau + 2\gamma) + \tan T\,\Sigma\sin\tau\sin(\tau + 2\gamma)}{\Sigma\sin\tau\sin(\tau + 2\gamma) + \tan T[\Sigma\tau - \Sigma\sin\tau\cos(\tau + 2\gamma)]},$$

wo ebenfalls $\tan\lambda$ von $\tan T$ dieselbe Function ist, als $\tan T$ von $\tan\lambda$.

Setzt man in den Gleichungen 2) $\xi = \eta = 0$, so erhält man

$$S \sin T = x\,[\Sigma\tau + \Sigma \sin\tau \cos(\tau + 2\gamma)] + y\,\Sigma \sin\tau \sin(\tau + 2\gamma);$$
$$-S \cos T = x\,\Sigma \sin\tau \sin(\tau + 2\gamma) + y\,[\Sigma\tau - \Sigma \sin\tau \cos(\tau + 2\gamma)];$$

Quadrirt und addirt man diese Gleichungen, so folgt

$$\begin{aligned} S^2 = {} & x^2\,[\Sigma^2\tau + R^2 + 2\Sigma\tau\,\Sigma \sin\tau \cos(\tau + 2\gamma)] \\ & + y^2\,[\Sigma^2\tau + R^2 - 2\Sigma\tau\,\Sigma \sin\tau \cos(\tau + 2\gamma)] \\ & + 4xy\,\Sigma\tau\,\Sigma \sin\tau \sin(\tau + 2\gamma); \end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

deren Halbachse a gegen die Nulllinie geneigt ist um einen Winkel ω, der gegeben ist durch

$$\cos 2\omega = \frac{1}{R}\,\Sigma \sin\tau \cos(\tau + 2\gamma),$$

$$\sin 2\omega = \frac{1}{R}\,\Sigma \sin\tau \sin(\tau + 2\gamma),$$

und wo die Halbachsen die Werthe haben

$$a = \frac{S}{\Sigma\tau + R},$$

$$b = \frac{S}{\Sigma\tau - R},$$

Durch partielle Differentiation des Werthes von l^2 nach T erhält man aber, dass l seinen Maximal- und Minimalwerth bei unveränderlichem T hat für

$$\tan 2T = \frac{\Sigma \sin\tau \sin(\tau + 2\gamma)}{\Sigma \sin\tau \cos(\tau + 2\gamma)},$$

nämlich:

$$1)\ l = \frac{S}{\Sigma\tau - R} \quad \text{für} \quad \begin{cases} \cos 2T = \dfrac{1}{R}\,\Sigma \sin\tau \cos(\tau + 2\gamma) = \cos 2\omega, \\ \sin 2T = \dfrac{1}{R}\,\Sigma \sin\tau \sin(\tau + 2\gamma) = \sin 2\omega, \end{cases}$$

und folgt hieraus

$$\tan T = \tan\omega = \frac{R - \Sigma \sin\tau \cos(\tau + 2\gamma)}{\Sigma \sin\tau \sin(\tau + 2\gamma)},$$

und wenn man diesen Werth in den von $\tan\lambda$ einsetzt,

$$\tan\lambda = -\cot\omega.$$

Es ist also in diesem Falle $l \,\#\, b$.

$$2) \quad \frac{S}{\Sigma\tau + R} \quad \text{für} \quad \begin{cases} \cos 2T = \dfrac{1}{R}\,\Sigma \sin\tau \cos(\tau + 2\gamma), \\ \sin 2T = \dfrac{1}{R}\,\Sigma \sin\tau \sin(\tau + 2\gamma), \end{cases}$$

woraus folgt

$$\tan T = -\cot\omega = \frac{R + \Sigma \sin\tau \cos(\tau + 2\gamma)}{\Sigma \sin\tau \sin(\tau + 2\gamma)},$$

und

$$\tan \lambda = \tan . \omega;$$

Es ist also in diesem Falle $l \# a$.

Es liegt also der Minimumpol auf einer Ellipse, deren Mittelpunkt der Krümmungsschwerpunkt ist und deren Achsenkreuz parallel ist dem der Ellipsen oder Hyperbeln für constanten Flächeninhalt. Ihre Halbaxen sind der Maximal- und der Minimalwerth der Entfernung des Minimumpols vom Krümmungsschwerpunkt bei veränderlichem T und der eine Endpunkt der grösseren oder kleineren ist Minimumpol, wenn T einen Werth hat, dem ein Maximum oder Minimum von l entspricht.

Besteht die Basis aus verschiedenen Linien, die berührend in einander übergehen, so ist sie auch hinsichtlich ihres Krümmungsschwerpunktes als eine einzige Linie zu behandeln (vergl. §. 9 am Schlusse). Dasselbe kann man auch mit einer Basis thun, die aus Curvenstücken besteht, welche unter beliebigen Winkeln an einander stossen, indem man nämlich die Berührende ihre Richtung an der Ecke nicht sprungweise, sondern stetig ändern lässt und der Ecke eine Belastung giebt gleich dem Winkel, um den sich die Berührende drehen muss, um von einer Curve auf die andere überzugehen. Denn sieht man die Ecke als einen unendlich kleinen Kreisbogen an, so kommt ihr eine Belastung gleich dem Centriwinkel dieses Kreisbogens zu, welcher gleich ist dem Drehungswinkel der Berührenden an der Ecke. Bei dieser Betrachtungsweise gelten die Resultate des vorigen Paragraphen auch für eine Basis, welche Ecken hat.

Die Formeln dieses Paragraphen gelten nicht für den Fall $\Sigma \tau = R$. Will man denselben in Betrachtung ziehen, so muss man von dem am Ende von §. 9 für diesen Fall gegebenen Formeln ausgehen.

12.

Bestimmung des Krümmungsschwerpunktes einiger Curven.

1) Die Ellipse. Ihr Mittelpunkt sei Coordinatenanfang und Pol; ihre Halbachsen seien a, welche zugleich Nulllinie sei, und $b < a$, und werde mit ε die numerische Excentricität $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ bezeichnet, so ist die Gleichung der Fusspunktlinie

$$r_1 = a\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_1}.$$

Daher hat man nach Gleichung 1) des §. 10 für die Coordinaten des Krümmungsschwerpunktes die Gleichungen

$$\xi (\delta - \gamma) = 2a \int_\gamma^\delta \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_1} \cos \varphi_1 \, d\varphi_1 - r_{1\delta} \sin \delta + r_{1\gamma} \sin \gamma,$$

$$\eta (\delta - \gamma) = 2a \int_\gamma^\delta \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_1} \sin \varphi_1 \, d\varphi_1 + r_{1\delta} \cos \delta - r_{1\gamma} \cos \gamma;$$

Führt man die Integration aus und setzt zur Abkürzung

$$\lambda = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}},$$

so erhält man

$$\xi(\delta - \gamma) = \frac{a}{\varepsilon}\left[arc\,sin\,(\varepsilon\,sin\,\delta) - arc\,sin\,(\varepsilon\,sin\,\gamma)\right],$$

$$\eta(\delta - \gamma) = \frac{a}{\lambda}\,lg\left(\frac{\lambda\,cos\,\gamma + \sqrt{1 + \lambda^2 cos^2\gamma}}{\lambda\,cos\,\delta + \sqrt{1 + \lambda^2 cos^2\delta}}\right).$$

Für die halbe durch die kleine Achse begrenzte Ellipse erhält man hieraus

$$\eta = 0$$

$$\xi = \frac{2}{\pi}\,\frac{a}{\varepsilon}\,arc\,sin\,\varepsilon,$$

d. h. der Krümmungsschwerpunkt liegt auf der grossen Achse in einer Entfernung vom Mittelpunkte gleich dem Durchmesser eines Kreises, dessen Umfang gleich dem Bogen $\frac{2a}{\pi}\,arc\,sin\,\varepsilon$ ist, der sich sehr einfach construiren lässt. Der Minimumpol liegt in diesem Falle nach §. 10, 2) in einer Entfernung vom Mittelpunkt

$$\frac{2}{\pi}\,\frac{a}{\varepsilon}\,arc\,sin\,\varepsilon + \frac{2b}{\pi} = \frac{2a}{\pi}\left\{\frac{arc\,sin\,\varepsilon}{\varepsilon} + \sqrt{1 - \varepsilon^2}\right\}$$

2) Die Coordinaten des Krümmungsschwerpunktes der Hyperbel erhält man aus denen der Ellipse, wenn man statt des dortigen λ setzt,

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}, \text{ wo } \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a},$$

nämlich

$$\xi(\delta - \gamma) = \frac{a}{\varepsilon}\left[arc\,sin\,(\varepsilon\,sin\,\delta) - arc\,sin\,(\varepsilon\,sin\,\gamma)\right]$$

$$\eta(\delta - \gamma) = \frac{b}{\lambda}\,lg\left(\frac{\lambda\,cos\,\delta + \sqrt{\lambda^2 cos^2\delta - 1}}{\lambda\,cos\,\gamma + \sqrt{\lambda^2 cos^2\gamma - 1}}\right).$$

Für den ganzen Hyperbelast ist, wenn β den Winkel der Asymptote gegen die Nebenachse bezeichnet, zu setzen

$$\gamma = -\beta,\ \delta = \beta,$$

wo

$$sin\,\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Man erhält daher

$$\eta = 0,$$

$$\xi = \frac{a\pi}{2}\,\frac{sin\,\beta}{\beta}.$$

Es ist also der mit der Entfernung des Krümmungsschwerpunktes vom Mittelpunkt und dem Centriwinkel β beschriebene Kreisbogen gleich dem mit der Projection der Haupthalbachse auf die Asymptote beschriebenen Viertelkreis. *Mit wachsendem Asymptotenwinkel* (abnehmendem β) nähert sich

ξ immer mehr der Grenze $\frac{a\pi}{2}$, also dem Umfange des mit a beschriebenen Viertelkreises*); mit abnehmendem Asymptotenwinkel nähert sich der Krümmungsschwerpunkt immer mehr dem Scheitel der Hyperbel, indem für $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\xi = a$ wird. Für $\beta = \frac{\pi}{6}$, wo das Verhältniss der Hauptachse zur Nebenachse $= 1 : \sqrt{3}$ ist, wird

$$\xi = \tfrac{3}{2}\, a.$$

Für die gleichseitige Hyperbel ist $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ zu setzen, und ist daher

$$\xi = a\sqrt{2},$$

d. h.

der Krümmungsschwerpunkt eines Astes der gleichseitigen Hyperbel fällt mit dessen Brennpunkt zusammen.

Die Lage des Minimumpols und die Grösse des zugehörigen Inhalts bestimmen sich für die gleichseitige Hyperbel sehr einfach. Man nehme den Mittelpunkt als Coordinatenanfang, die Asymptote als Nulllinie, so hat man zu setzen

$$\tau = \frac{\pi}{2}, \quad s = 0, \quad \xi = a, \quad \eta = a$$

und erhält aus Gleichung 3) des §. 10

$$x = y = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} + 1}\, a;$$

der Minimumpol liegt also auf der Achse in einer Entfernung vom Mittelpunkt

$$\frac{\pi \,.\, a}{\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)},$$

Für den zugehörigen Minimalinhalt erhält man nach Gleichung 6) des §. 8, indem man statt P und Q die Coordinaten des Krümmungsschwerpunktes einführt und $2f_1 = a^2$ als Inhalt der Lemniscate einsetzt,

$$f_1'{}_{min.} = \frac{a^2}{2}\left[1 - \frac{\pi^2}{4\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)}\right].$$

3) Der Kreis wurde schon in §. 10 betrachtet.

---

*) Dieses scheinbar paradoxe Resultat erklärt sich einfach dadurch, dass für $\beta = 0$ die Hyperbel nicht zur Geraden degenerirt, sondern ihre zum Punkte von der Abscisse x gehörige Berührende die Axe immer in einer Entfernung $\frac{a^2}{x}$ vom Mittelpunkt schneidet.

4) Für die Parabel, deren Brennpunkt Pol und Coordinatenanfang und deren Achse Nulllinie ist, ist die Gleichung der Fusspunktlinie

$$r_1 = \frac{a}{\cos \varphi_1},$$

wo a die Entfernung des Brennpunktes vom Scheitel bedeutet. Demnach erhält man

$$\xi(\delta - \gamma) = 2a(\delta - \gamma) - a(\tan \delta - \tan \gamma),$$
$$\eta(\delta - \gamma) = 2a(\lg \cos \gamma - \lg \cos \delta).$$

Rechnet man den Bogen vom Scheitel aus, setzt also $\gamma = 0$, so folgt

$$\xi = 2a\left(1 - \frac{\tan \delta}{2\delta}\right),$$
$$\eta = -\frac{2a \lg \cos \delta}{\delta}.$$

Die ganze Parabel hat nicht, wie der Hyperbelast, einen im Endlichen gelegenen Krümmungsschwerpunkt.

5) Der Krümmungsschwerpunkt der logarithmischen Spirale wird am einfachsten direct bestimmt. Sei ihre Gleichung

$$r = a \cdot e^{\varphi \cdot \cot \alpha},$$

wo α den constanten Winkel des Vectors mit der Berührenden bezeichnet, so ist in den Gleichungen

$$\xi(\delta - \gamma) = \int_\gamma^\delta x \frac{ds}{\varrho},$$
$$\eta(\delta - \gamma) = \int_\gamma^\delta y \frac{ds}{\varrho}$$

einzusetzen

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$
$$\varrho = \frac{r}{\sin \alpha},$$
$$ds = \frac{r\, d\varphi}{\sin \alpha},$$

wodurch man erhält

$$\xi(\delta - \gamma) = a \int_\gamma^\delta e^{\varphi \cdot \cot \alpha} \cos \varphi \, d\varphi,$$
$$\eta(\delta - \gamma) = a \int_\gamma^\delta e^{\varphi \cdot \cot \alpha} \sin \varphi \, d\varphi;$$

Führt man die Integration aus und bezeichnet mit $\sigma = \gamma - \delta$ den Centriwinkel des Bogens der logarithmischen Spirale, mit s die Anfangs- und Endpunkt verbindende Sehne, mit t ihren Winkel gegen die Nulllinie, so erhält man

$$\xi \,.\, \sigma = s \,.\, \sin\alpha \cos(t-\alpha)$$
$$\eta \,.\, \sigma = s \,.\, \sin\alpha \sin(t-\alpha);$$

Sei ζ und ψ Vector und Anomalie des Krümmungsschwerpunktes, so folgt hieraus

$$\zeta = \frac{s \,.\, \sin\alpha}{\sigma},$$
$$\tan\psi = \tan(t-\alpha).$$

Trägt man also vom Mittelpunkt aus an den Vector des Anfangspunktes des Anfangspunktes den Winkel der zugehörigen Berührenden mit der Sehne und auf dessen Schenkel eine Entfernung auf gleich der Sehne dividirt durch Centriwinkel und multiplicirt mit dem constanten Werth $\sin\alpha$, so erhält man den Krümmungsschwerpunkt. Bemerkenswerth ist die Analogie mit dem Schwerpunkt des Kreisbogens, indem für diesen der Winkel der Berührenden gegen die Sehne gleich dem halben Centriwinkel und, wegen $\sin\alpha = 1$, ζ der Quotient aus Winkel in Sehne ist.

VI.

Beiträge zur Theorie der Gase.

Von Dr. E. Jochmann in Berlin.

(Schluss.)

IV. Die Gase, welche nur wenig vom Mariotte'schen Gesetz abweichen. Vergleichung der Scala des Luftthermometers mit der absoluten Temperaturscala.

Für die ideal permanenten Gase gilt die Gleichung

$$p \,.\, v = k \,.\, t \qquad 35)$$

in welcher k eine Constante bezeichnet. Dieselbe Gleichung wird genügen, die Gesetze der wirklichen Gase darzustellen, sofern wir uns unter k nicht mehr eine Constante, sondern eine aus den empirischen Daten zu bestimmende Function der unabhängig Variablen v, t denken, welche sich aber mit v und t sehr langsam ändert, deren Differentialquotienten $\frac{\partial k}{\partial v}$, $\frac{\partial k}{\partial t}$ also sehr kleine Grössen sind, so dass ihre Producte und Potenzen höherer Ordnungen gegen k selbst vernachlässigt werden können. Durch successive Differentiation der Gleichung 35) in Beziehung auf v und t ergiebt sich

$$p + v\frac{\partial p}{\partial v} = t \cdot \frac{\partial k}{\partial v}$$

$$v\frac{\partial p}{\partial t} = k + t \cdot \frac{\partial k}{\partial t}$$

mithin

36) $$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial v} = \dfrac{t}{v}\dfrac{\partial k}{\partial v} - \dfrac{p}{v}, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} = \dfrac{t}{v}\dfrac{\partial k}{\partial t} + \dfrac{p}{t} \end{cases}$$

und aus 32) respective aus 28) die Wirkungsfunction

37) $$W = \int_{v_0}^{v} \frac{t^2}{v}\frac{\partial k}{\partial t} \cdot dv + A\int_{t_0}^{t} N_0\, dt,$$

38) $$\frac{\partial W}{\partial v} = \frac{t^2}{v}\frac{\partial k}{\partial t},\quad A \cdot M = p + \frac{t^2}{v}\frac{\partial k}{\partial t}.$$

Geben wir, um die Bedeutung dieser Formeln mit einigen Worten zu erläutern, auf die Bedeutung der Grössen M und N zurück. Wenn die Temperatur der Masseneinheit des Gases bei dem constantem Volum v_0 um dt wächst, so muss dem Gase die Wärmemenge $N_0\,dt$ zugeführt werden. N_0 ist also die specifische Wärme der Masseneinheit des Gases bei constantem Volum v_0. Man kann sich diese Wärmemenge in zwei Theile zerlegt denken, deren einer den Zuwachs der lebendigen Kraft der Molekularbewegung ausdrückt, während der andere zu den mit der Temperaturerhöhung verbundenen Aenderungen des Molekularzustandes oder zur inneren Arbeit verwendet wird. Da man jedoch beide Theile in der Beobachtung niemals trennen kann, so ist die Trennung auch in der Rechnung zwecklos. Anders verhält es sich mit der Grösse M. Die Wärmemenge, welche der Masseneinheit des Gases bei constanter Temperatur zugeführt werden muss, um das Volum v um dv zu vergrössern, ist $M dv$, ihr Aequivalent $AM dv$. Dasselbe zerfällt aber in zwei Theile. Der eine Theil $p \cdot dv$ drückt die bei der Volumzunahme geleistete äussere Arbeit aus, der andere aber $\frac{\partial W}{\partial v} \cdot dv$ ist die gleichzeitige Zunahme der Wirkungsfunction, d. h. eine Arbeitsmenge, welche in Form von äusserer Arbeit oder Wärme wiedergewonnen werden kann, indem man das Gas auf sein ursprüngliches Volum zurückbringt, wobei etwas mehr Wärme entwickelt wird, als der geleisteten Arbeit entspricht; wir werden auf diese Abweichung von der Mayer'schen Annahme weiter unten zurückkommen. Man pflegt nun diese Arbeitsmenge in der Regel mit der zur Ausdehnung eines Gases erforderlichen inneren Arbeit zu verwechseln, und auch das Mayer'sche Princip in der Form auszusprechen, dass die innere Arbeit bei der Ausdehnung eines Gases Null sei. Ich glaube aber und werde diese Ansicht im fünften Artikel genauer motiviren, dass eine solche Auffassungsweise im Allgemeinen ungerecht-

fertigt ist, insofern dieselbe nicht als eine nothwendige Folge der Principien der mechanischen Wärmetheorie erscheint, sondern nur unter gewissen speciellen Annahmen über die Molekularconstitution der Gase zulässig und erforderlich ist, für deren Richtigkeit man umgekehrt darin einen Beweis finden wollte, dass die zur Ausdehnung der Gase erforderliche innere Arbeit Null oder sehr klein sei.*)

Wollen wir, wie oben bei den idealen Gasen, die beiden specifischen Wärmen bei constantem Volum und bei constantem Druck in die Rechnung einführen, so ist zuvörderst für die Masseneinheit des Gases $N = c$ und aus 23) folgt mit Berücksichtigung der Werthe 36) für $\frac{\partial p}{\partial t}$ und $\frac{\partial p}{\partial v}$ und 38) für M

$$A(c_1 - c) = -\left(p + \frac{t^2}{v}\frac{\partial k}{\partial t}\right) \cdot \frac{\frac{t}{v}\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{p}{t}}{\frac{t}{v}\frac{\partial k}{\partial v} - \frac{p}{v}}$$

und nach einigen kleinen Reductionen, mit Vernachlässigung der Quadrate und Producte von $\frac{\partial k}{\partial v}$ und $\frac{\partial k}{\partial t}$, erhält man

$$39) \qquad A(c_1 - c) = k + 2t\frac{\partial k}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial k}{\partial v},$$

$$40) \qquad p \cdot v = A(c_1 - c) \cdot t - 2t^2\frac{\partial k}{\partial t} - vt\frac{\partial k}{\partial v}.$$

Hätte man die Formeln nicht auf die Masseneinheit, sondern auf die Masse m bezogen, so erhielte das erste Glied rechts noch den Factor m. Aus der Gleichung 40), welche das Analogon der Gleichung 2) für die idealen Gase bildet, ist ersichtlich, dass die Differenz der auf gleiche Volumina bezogenen specifischen Wärmen nicht mehr genau constant für alle Gase sein wird, sondern dass eine von der Abweichung vom Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetz abhängige Correction erforderlich ist.

Wenden wir uns nun zur Betrachtung der experimentellen Data, welche zur Bestimmung der wirklichen Relation zwischen p, v und t dienen können. Die Herren J. Prescott Joule und William Thomson haben bei Gelegenheit ihrer fortgesetzten Versuche über die Abkühlung, welche Gase bei ihrer Ausdehnung erleiden, indem sie durch enge Ausströmungsöffnungen oder poröse Körper gepresst werden,**) aus den vorliegenden empirischen Daten eine empirische Formel abgeleitet, welche die Relation zwischen p, v und t für atmosphärische Luft darstellen soll. In dieser Formel soll t die (oben Art. 2 definirte) absolute Temperatur bezeichnen und dieselbe wird

*) Vergl. C. F. Eisenlohr, in der Heidelberger krit. Zeitschr. f. Chemie, Physik und Mathematik I. p. 56, u. Pogg. Ann. CIV. p. 653, und Clausius: Pogg. Ann. CV. p. 255.

**) Joule und Thomson: *On the thermal effects of fluids in motion. Philosophical Transactions of the Royal Society of London for* 1854 p. 321 *seqq.*

dann zur Vergleichung der absoluten Temperaturscala mit der Scala des Luftthermometers benutzt. Die hypothetische Form, welche Joule und Thomson der zu bestimmenden Relation geben, ist folgende:

$$p \cdot v = A \cdot t + B + \left(C + \frac{D}{t} + \frac{G}{t^2}\right)\frac{V}{v}$$

wo V das Volum der Masseneinheit Luft unter dem Druck einer 760 Millimeter hohen Quecksilbersäule, A, B, C, D, G aber fünf zu bestimmende Zahlencoefficienten sind. Aus den Versuchen von Regnault über die Compressibilität der Luft, über den thermischen Ausdehnungscoefficienten derselben bei verschiedenen Drucken und aus den eigenen Versuchen der Herren Joule und Thomson bestimmen sich die Constanten so, dass man erhält

$$41) \qquad p \cdot v = K\left\{t - \left(0{,}0012811 - \frac{1{,}3918}{t} + \frac{353{,}2}{t^2}\right)\frac{V}{v}\right\}.$$

Abgesehen davon, dass schon die Form dieser Formel nicht geeignet ist, z. B. für irgend einen constanten Werth von t, wo also der Ausdruck für $p \cdot v$ die Form $A + B \cdot \frac{V}{v}$ annimmt, die Beobachtungsresultate von Regnault über die Abweichungen vom Mariotte'schen Gesetz auch nur mit einigermassen befriedigender Annäherung darzustellen, behaupte ich jedoch, dass die Formel von Joule und Thomson illusorisch ist, und zwar aus folgenden Gründen:

Erstens glauben dieselben in den Gleichungen, welche zur Bestimmung der Constanten A, B ..... dienen, mit absoluten Temperaturen zu rechnen. Bei Aufstellung dieser Gleichungen ist aber die von Herrn Thomson selbst gegebene Definition der absoluten Temperatur in keiner Weise benutzt und kommt bei der ganzen Rechnung gar nicht in Betracht. Daraus folgt schon, dass die aus den Gleichungen gezogenen Resultate nothwendig illusorisch sein müssen, sofern man unter t die absolute Temperatur versteht. Insbesondere gilt dies von der daraus abgeleiteten Vergleichung der absoluten Temperaturscala mit der des Luftthermometers. In der Rechnung, welche gerade dazu dienen soll, die Abweichungen beider Scalen zu ermitteln, werden die absoluten Temperaturen, welche den Temperaturen 4,75° C. und 17° C. entsprechen, gleich $t_0 + 4{,}75$ und $t_0 + 17$ gesetzt. Die Bestimmung der absoluten Temperatur des Gefrierpunkts $t_0 = 263{,}72$ beruht, wie aus der Rechnung hervorgeht, lediglich auf der hypothetischen Form, welche Joule und Thomson der gesuchten Function $p \cdot v$ gegeben haben. Der obige Werth ist der reciproke Werth des Coefficienten 0,00365343, welcher die Zunahme des Drucks mit der Temperatur für 1° C. bei constanter und sehr geringer Dichtigkeit ausdrücken soll. Dieser Coefficient, welcher bei 760 Millimeter Druck = 0,003665 ist, nimmt bekanntlich nach Regnaults Versuchen mit der Dichtigkeit ab. Den reciproken Werth der Grenze, welcher sich derselbe bei sehr geringen Dich-

tigkeiten annähert, kann man allerdings als einen Annäherungswerth der absoluten Temperatur des Gefrierpunktes betrachten. Bei abnehmender Dichtigkeit nähert sich nämlich das Verhalten der atmosphärischen Luft, wie die Erfahrung lehrt, mehr und mehr dem Mariotte'schen Gesetz, also dem Zustand eines idealen Gases an. Der von Joule und Thomson angenommene Werth ist aber jedenfalls ungenau, denn

Zweitens benutzen dieselben bei Bestimmung des Coefficienten die aus den Beobachtungen von Regnault abgeleitete Formel

$$\alpha = 0{,}003665 + \frac{0{,}0000441}{3{,}81}\left(\frac{V}{v} - 1\right),$$

aus welcher sich für $v = \infty$ der oben angegebene Grenzwerth von α ergiebt. Diese Formel schliesst sich aber den Versuchen nur für Drucke, welche grösser als eine Atmosphäre sind, mit leidlicher Genauigkeit an, weicht dagegen von denselben bei geringeren Drucken so bedeutend ab, dass z. B. schon für $\frac{V}{v} = 0{,}1444$ der von Regnault beobachtete Werth $\alpha = 0{,}0036382$ also kleiner als der von Joule und Thomson angenommene Grenzwerth ist. Wir werden unten auf eine wahrscheinlichere Bestimmung des Grenzwerthes zurückkommen.*)

Wenn ich es daher unternommen habe, das Problem in einer andern Weise anzugreifen, so lege ich keineswegs grossen Werth auf die Genauigkeit der gewonnenen numerischen Resultate, denn je mehr man die Ergebnisse der verschiedenen vorliegenden Beobachtungen mit einander vergleicht, desto mehr wird man inne, dass zwischen denselben durchaus nicht die wünschenswerthe Uebereinstimmung herrscht. Man muss zu empirischen Formeln seine Zuflucht nehmen, welche sich an die directen Beobachtungen nur sehr unvollkommen anschmiegen. Es hat dies seinen Grund ohne Zweifel in der delicaten Natur der Beobachtungen selbst, in der Kleinheit der zu beobachtenden Abweichungen, in der unvermeidlichen Complication der Versuche und den dadurch auch bei der umsichtigsten Anordnung der Apparate herbeigeführten Fehlerquellen. Doch ist die Aufstellung von Interpolationsformeln keineswegs unnütz, da sie gerade dazu dienen können, auf die Fehlerquellen aufmerksam zu machen. Hauptsächlich ist es aber mein Zweck, den Weg anzudeuten, auf welchem man mit Hülfe der empirischen Data zur Kenntniss der allgemeinen Relation zwischen Druck, Volum und absoluter Temperatur gelangen kann.

Setzen wir zuerst, als den einfacheren Fall, die eine Veränderlichkeit t constant voraus, so handelt es sich darum, das Gesetz der Abhängigkeit

*) Jedenfalls in Folge eines Schreibfehlers ist in den Rechnungen der Herren J. und Th. der Werth des Coefficienten 0,0008163, welcher die Abweichung der Luft vom Mariotte'schen Gesetz ausdrücken soll, in den Gleichungen 19), 31) und 37) zehnmal zu gross angegeben. Bei der numerischen Rechnung ist aber, wie auch weiter oben (p. 340), der richtige Werth benutzt.

von p und v zu bestimmen. Zu diesem Zweck sind von Regnault*) umfangreiche Beobachtungsreihen mit verschiedenen Gasen angestellt worden, von welchen wir zunächst diejenigen in Betracht ziehen wollen, welche sich auf atmosphärische Luft beziehen. Die Versuche reichen bis auf etwa 30 Atmosphären. Die Compression geschah in den meisten Versuchsreihen im Verhältniss von 1 : 2. Sind p_0, v_0 Druck und Volum vor, und p_1, v_1 nach der Compression, so müsste der Quotient $\frac{p_1 v_1}{q_0 v_0}$ nach dem Mariotte'schen Gesetz genau gleich 1 sein. Derselbe ist aber immer kleiner als 1, wenn $p_1 > p_0$ ist. Bezeichnen wir mit π den Druck einer Quecksilbersäule von 1000 Millimeter Höhe, mit Φ das Volum der Masseneinheit (eines Milligrammes) atmosphärischer Luft bei diesem Druck, mit p und v zwei beliebige zusammengehörige Werthe von Druck und Volum, so wird auch der Quotient $\frac{pv}{\pi\Phi} >$ oder < 1 sein, je nachdem $p >$ oder $< \pi$ ist. Die durch experimentelle Rücksichten gebotene Form der Beobachtungen ist nicht für die directe Entwickelung einer Interpolationsformel geeignet, da die einzelnen Beobachtungsreihen nicht auf den constanten Normaldruck π bezogene Werthe des Quotienten geben, sondern immer zwei verschiedene Drucke, welche nahe im Verhältniss 2 : 1 stehen, im übrigen aber willkührlich gewählt sind, mit einander verglichen werden. Regnault hat daher zuerst durch ein graphisches Interpolationsverfahren die Mittelwerthe des Quotienten $\frac{p_1 v_1}{p_0 v_0}$ bestimmt, welche den genauen Druckverhältnissen 1:2:4:8:16 Meter entsprechen und aus diesen Zahlen durch Multiplication die Werthe von $\frac{pv}{\pi\Phi}$ für 4 verschiedene Werthe von p bestimmt, nämlich

		beobachtet	berechnet
42)	für $\frac{p}{\pi} = 2$, $\frac{pv}{\pi\Phi} =$	0,998782	0,998914
	für $\frac{p}{\pi} = 4$, $\frac{pv}{\pi\Phi} =$	0,996490	0,996858
	für $\frac{p}{\pi} = 8$, $\frac{pv}{\pi\Phi} =$	0,993212	0,993212
	für $\frac{p}{\pi} = 16$, $\frac{pv}{\pi\Phi} =$	0,987780	0,987780

(reducirt auf die mittlere Temperatur von 4,75° C.).

Da für $p = \pi$ der Quotient $\frac{pv}{\pi\Phi}$ genau $= 1$ werden muss, so kann man diese Werthe durch eine Formel von der Form

*) *Rélation des expériences entreprises pour déterminer les principales lois et données numériques, qui entrent dans le calcul des machines à vapeur. Mém. de l'acad. des sciences de Paris* 1847. *T. XXI; 6me mém.: Sur la compressibilité des fluides elastiques* I. l. p. 329.

43) $$\frac{pv}{\pi\Phi} = 1 - A\left(\frac{p}{\pi} - 1\right) + B\left(\frac{p}{\pi} - 1\right)^2$$

darstellen. Aus den beiden letzten Werthen 42) bestimmt Regnault den Werth der Constanten A und B, nämlich

44) $$A = 0{,}00110538, \quad \log A = 0{,}0435120 - 3$$
$$B = 0{,}000019381, \quad \log B = 0{,}2873751 - 5.$$

Nach dieser Formel sind oben die nebenstehenden Werthe berechnet. Es ist nicht zu verkennen, dass die Abweichungen ziemlich beträchtlich sind und dies stellt sich noch mehr heraus, wenn man die Mittel aus den wirklichen Beobachtungsreihen mit den aus der Formel 45) berechneten Werthen vergleicht. Man erhält jedoch eine wenig bessere Uebereinstimmung, wenn man die Constanten A und B aus den 4 Werthen 42) oder aus den Mitteln der Beobachtungsreihen selbst nach der Methode der kleinsten Quadratsummen bestimmt. Zwingt man ferner, indem man bis zur vierten Potenz von $\left(\frac{p}{\pi} - 1\right)$ geht, die gesuchte Function, durch Bestimmung von 4 Constanten, den vier Mittelwerthen 42) zu genügen, so erhält die Curve, welche die Function darstellt, innerhalb des Beobachtungsintervalls zwei Inflexionspunkte, was wenig wahrscheinlich ist. Ich behalte daher die von Regnault gegebene und auch schon von Anderen benutzte Formel bei. In dieser Form ist dieselbe geeignet, um v aus p zu berechnen. Wollte man umgekehrt p aus v finden, so würde die analoge Form zweckmässiger sein

45) $$\frac{pv}{\pi\Phi} = 1 - A\left(\frac{\Phi}{v} - 1\right) + B\left(\frac{\Phi}{v} - 1\right)^2.$$

Aus den beiden letzten Werthen 42) ergiebt sich dann:

$$\text{für } \frac{\Phi}{v} = 8{,}05467, \quad \frac{pv}{\pi\Phi} = 0{,}993212$$

$$\text{für } \frac{\Phi}{\pi} = 16{,}19794, \quad \frac{pv}{\pi\Phi} = 0{,}987780$$

und daraus

$$A = 0{,}0010992, \quad B = 0{,}00001942.$$

Auch über die Abhängigkeit des Drucks und Volums von der Temperatur verdanken wir die zahlreichsten Beobachtungen Herrn Regnault.*) Derselbe hat die Ausdehnungscoefficienten einer grossen Anzahl von Gasen nach verschiedenen Methoden bestimmt. Man kann nämlich, wie schon Rudberg**) gethan, zwei wesentlich verschiedene Methoden anwenden. Entweder bestimmt man bei constantem Druck die durch eine gegebene Temperaturerhöhung bewirkte Volumzunahme, oder bei constantem Volum die Zunahme des Drucks. Letztere Methode lässt eine grössere Schärfe der Bestimmung zu. Wenn das Gas bei allen Temperaturen das Mariotte'sche Gesetz genau befolgte, so ist es klar, dass man nach beiden Methoden

*) A. a. O. p. 15 seqq.
**) Pogg. Ann. XLI. 271 und XLIV. 119.

denselben Coefficienten erhalten müsste. In der That erhielt aber Regnault nach beiden Methoden verschiedene Werthe. Bei atmosphärischer Luft betrug nämlich die Volumzunahme bei constantem Druck zwischen 0 und 100° C. 0,3670 des ursprünglichen Volums oder es war

46) $$\text{für } p = const., \; E = \frac{v_{100} - v_0}{v_0} = 0{,}3670.$$

Dagegen wurde in Uebereinstimmung mit Magnus*) die Zunahme des Drucks bei constantem Volum = 0,3665 gefunden, oder es war

47) $$\text{für } v = const., \; E = \frac{p_{100} - p_0}{p_0} = 0{,}3665.$$

Die Verschiedenheit beider Coefficienten lässt sich mit Rücksicht auf die Abweichung der atmosphärischen Luft vom Mariotte'schen Gesetz voraussehen. Doch scheint der von Regnault gefundene Unterschied zu gross zu sein. Es wäre nämlich nach Regnaults Beobachtungen

$$p_{100} \cdot v_0 = 1{,}3665\, p_0 v_0 \text{ und } p_0 \cdot v_{100} = 1{,}3670\, p_0 v_0$$

und daraus würde folgen, dass die Luft bei 100° C. noch beträchtlich vom Mariotte'schen Gesetze abwiche, indem nämlich eine Compression im Volumverhältniss 1,3670 : 1 bei der Temperatur 100° den Quotienten $\frac{p_{100} v_0}{p_0 \cdot v_{100}} = 0{,}99064$ ergeben, während andere Versuche von Regnault es wahrscheinlich machen, dass die Abweichung vom Mariotte'schen Gesetz bei 100° beträchtlich kleiner ist, als bei 0°.

Regnault hat ferner Versuche angestellt über den Ausdehnungscoefficienten der Luft bei verschiedenen Dichtigkeiten, indem er sich der beiden oben bezeichneten Methoden bediente. Die Resultate, welche nach der Methode der constanten Volumina gewonnen und als die sichersten zu betrachten sind, sind in folgender Tabelle enthalten:

p_0	p_{100}	$\frac{V}{v}$	100 α beobachtet	100 α berechnet
109,72	149,31	0,1444	0,36482	0,36482
174,36	237,17	0,2294	0,36513	0,36508
266,06	395,07	0,3501	0,36542	0,36542
374,67	510,35	0,4930	0,36587	0,36576
375,23	510,97	0,4937	0,36572	0,36577
760,00	1038,54	1,0000	0,36650	0,36650
1678,40	2286,09	2,2084	0,36760	0,36790
1692,53	2306,23	2,2270	0,36800	0,36792
2144,18	2924,04	2,8213	0,36894	0,36861
3655,56	4992,09	4,8100	0,37091	0,37092

*) Pogg. Ann. LI. I.

Die erste Spalte enthält den beobachteten Druck bei 0° C., die zweite den Druck bei 100°, die dritte die Dichtigkeit, die vierte den aus den beiden ersten abgeleiteten Werth $100\,\alpha = \frac{p_{100}}{p_0} - 1$. Für Drucke, welche grösser sind, als eine Atmosphäre, werden die Beobachtungen ziemlich annähernd durch die von Thomson benutzte Formel

$$\alpha_v = 0{,}003665 + 0{,}0000116\left(\frac{V}{v} - 1\right)$$

dargestellt, in welcher V das Volum der Masseneinheit Luft bei 0° und 760 Millimeter Quecksilberdruck bezeichnet. Für Dichtigkeiten hingegen, welche kleiner als 1 sind, ist man genöthigt, eine andere Formel anzuwenden und noch ein quadratisches Glied hinzuzunehmen. Die Formel

$$49)\quad \alpha_v = 0.003665 - 0{,}00000703\left(1 - \frac{V}{v}\right) - 0{,}00001474\left(1 - \frac{V}{v}\right)^2$$

gewährt eine befriedigende Uebereinstimmung. Nach diesen beiden Formeln sind die Werthe in der fünften Spalte obiger Tabelle berechnet.*) Für $v = \infty$ giebt die Formel 49)

$$\alpha_\infty = 0{,}00364323$$

$$\frac{1}{\alpha_\infty} = 247{,}48$$

einen Annäherungswerth für die absolute Temperatur des Gefrierpunktes, der wenigstens mehr Wahrscheinlichkeit für sich hat, als der von Joule und Thomson angenommene.**)

Mit Hülfe dieser Data lässt sich nun, wie man leicht einsieht, ganz allgemein die Relation zwischen p und v bei jeder beliebigen Temperatur angeben, während die Versuche von Regnault sich direct nur auf die mittlere Temperatur 4,75 C. beziehen. Wir bemerken dabei vorher, dass im Folgenden mit τ immer die an dem Centesimal-Luftthermometer mit constantem Volum gemessene Temperatur, im Gegensatz zu der in Art. 2 definirten absoluten Temperatur t bezeichnet werden soll. Um die folgenden Entwickelungen in einfacherer Form zu erhalten, suchen wir zuerst die Relation zwischen p und v für $\tau = 0$ und legen anstatt π den Normaldruck P einer Atmosphäre (oder 760 Millimeter Quecksilberdruck) zu Grunde. Das diesem Druck entsprechende Volum der Masseneinheit Luft bei der Temperatur τ bezeichnen wir mit $V(\tau)$. Dann ist nach 43)

---

*) Rankine giebt für α_v die empirische Formel $\alpha_v = a \cdot \frac{p_0 v}{V}\left[1 + b\left(\frac{V}{v}\right)^{0,6}\right]$, wo a und b Constanten sind. Die nach dieser Formel berechneten Resultate stimmen mit den beobachteten etwa mit derselben Genauigkeit, wie die obigen, aber die Form ist für die Rechnung sehr unbequem. Siehe Phil. Mag. (4) II. p. 529.

**) Rankine berechnet aus Regnault's Beobachtungen an verschiedenen Gasen den wahrscheinlichsten Grenzwerth $\alpha_x = 0{,}00364166$ und daraus die Temperatur des absoluten Nullpunktes $= -274{,}6°$ C. Vergl. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh.* 1853. XX. p. 561 und Phil. Mag. (4. ser.) II. p. 525.

$$\frac{P \cdot V_{(4,75)}}{\pi \cdot \Phi} = 1 - 0{,}00110538 \cdot (-0{,}24) + 0{,}0000194\,(-0{,}24)^2 = 1{,}0002664.$$

Die Beobachtungen, aus denen Formel 43) abgeleitet ist, geben bei 4,75°

$$\text{für } \frac{p}{\pi} = 8,\ \frac{p\,v}{\pi\,\Phi} = 0{,}993212$$

$$\text{für } \frac{p}{\pi} = 16,\ \frac{p\,v}{\pi\,\Phi} = 0{,}987780$$

oder in unserer neuen Bezeichnungsweise für

$$\frac{p}{P} = \frac{8}{0{,}76};\ \frac{p \cdot v}{P \cdot V_{(4,75)}} = \frac{0{,}993212}{1{,}0002664},$$

daraus

$$\frac{V_{(4,75)}}{v} = 10{,}60108,\ \alpha_v = 0{,}003776,$$

für

$$\frac{p}{P} = \frac{16}{0{,}75};\ \frac{p \cdot v}{P \cdot V_{(4,75)}} = \frac{0{,}987780}{1{,}0002664},$$

daraus

$$\frac{V_{(4,75)}}{v} = 21{,}31876,\ \alpha_v = 0{,}003901,$$

Ist p_0 der Druck, welcher dem Volum v bei 0° entspricht, so ist

$$p = p_0 (1 + \alpha\ \ . 4{,}75),$$

ferner

$$V_{(4,75)} = V_0 \cdot 1{,}017432.$$

Mit Hülfe dieser Werthe lassen sich obige Data für $\frac{p\,v}{P\,V}$ und für $\frac{V}{v}$ auf die Temperatur 0° reduciren; man erhält nämlich für $\tau = 0°$

$$\text{für } \frac{p_0\,v}{P V_0} = \frac{0{,}993212}{1{,}0002664} \cdot \frac{1{,}017432}{1{,}017934} \text{ und } \frac{V_0}{v} = \frac{10{,}60108}{1{,}017432},$$

$$\text{für } \frac{p_0\,v}{P V_0} = \frac{0{,}987780}{1{,}0002664} \cdot \frac{1{,}017432}{1{,}018534} \text{ und } \frac{V_0}{v} = \frac{21{,}31876}{1{,}017432}.$$

Setzt man daher bei der Temperatur 0°

$$51)\qquad \frac{p_0\,v}{P\,V} = 1 - a_0\left(\frac{V}{v} - 1\right) + b_0\left(\frac{V}{v} - 1\right)^2$$

in welcher Formel V das Volum eines Milligrames Luft bei 0° und unter dem Druck P (= 760 Millimeter Quecksilber), p_0 aber den Druck bezeichnet, welcher bei 0° dem Volum v entspricht, so erhält man

$$52)\qquad \begin{cases} a_0 = 0{,}00090935 \\ b_0 = 0{,}00001154. \end{cases}$$

Es sei $P(\tau)$ der Druck der Masseneinheit Luft bei dem Normalvolum V und der Temperatur τ, $p(\tau)$ der Druck bei dem Volum v und der Temperatur τ, so kann man für eine beliebige Temperatur setzen

$$53)\qquad \frac{p(\tau) \cdot v}{P(\tau) \cdot V} = 1 - a_\tau\left(\frac{V}{v} - 1\right) + b_\tau\left(\frac{V}{v} - 1\right)^2$$

Für $v = V$ wird nämlich $p(\tau) = P(\tau)$.*) Nun ist aber nach der Definition der Temperatur τ**):

$$p(\tau) = p(0) \,.\, (1 + \alpha_v \,.\, \tau),$$
$$P(\tau) = P(1 + 0{,}0036650\, \tau)$$

mithin

$$\frac{p(\tau) \,.\, v}{P(\tau) \,.\, V} = \frac{p(0) \,.\, v}{P \,.\, V} \,.\, \frac{1 + \alpha_v \,.\, \tau}{1 + 0{,}003665\, \tau}$$

oder, indem man 51) und 53) vergleicht:

$$(1 + 0{,}003665\,\tau) \,.\, \left[1 - a_\tau\left(\frac{V}{v} - 1\right) + b_\tau\left(\frac{V}{v} - 1\right)^2\right]$$
$$= (1 + \alpha_v \,.\, \tau) \,.\, \left[1 - a_0\left(\frac{V}{v} - 1\right) + b_0\left(\frac{V}{v} - 1\right)^2\right].$$

Setzt man für α_v seinen Werth 48) und entwickelt die Producte rechts und links nach Potenzen von $\left(\frac{V}{v} - 1\right)$, so steigt die Entwickelung rechts bis auf die dritte Potenz, deren Coefficient $b_0 \,.\, 0{,}0000116\,\tau$ jedoch in Folge der beiden sehr kleinen Factoren gegen die Coefficienten der andern Potenzen verschwindet und indem man die Coefficienten gleicher Potenzen auf beiden Seiten gleich setzt, da die Gleichung für jedes beliebige v bestehen soll, erhält man

1) identisch $1 + 0{,}003665\,\tau = 1 + 0{,}003665\,\tau$

2) $(a_\tau - a_0)(1 + 0{,}003665\,\tau) = -0{,}0000116\,\tau$

3) $(b_\tau - b_0)(1 + 0{,}003665\,\tau) = -a_0 \,.\, 0{,}0000116\,\tau$

oder endlich, indem man in 53) P anstatt $P(\tau)$ einführt und a_τ und b_τ mit Rücksicht auf 52) berechnet, erhält man die allgemeine Relation zwischen p, v und τ

$$54)\quad \frac{pv}{PV} = -0{,}00090935\left(\frac{V}{v} - 1\right) + 0{,}00001154\left(\frac{V}{v} - 1\right)^2$$
$$+ \left\{0{,}003665 + 0{,}00000827\left(\frac{V}{v} - 1\right) + 0{,}000000032\left(\frac{V}{v} - 1\right)^2\right\} \,.\, \tau.$$

Natürlich gilt dieselbe nur innerhalb der Grenzen der Beobachtungen, aus welchen sie hergeleitet ist. Das quadratische Glied in der mit τ multiplicirten Klammer ist nur bei Temperaturen nahe an 100° von Einfluss. Für $\tau = 100$ wird nach dieser Formel

$$\frac{pv}{PV} = 1{,}3665 - 0{,}000082\left(\frac{V}{v} - 1\right) + 0{,}00001474\left(\frac{V}{v} - 1\right)^2$$

Für diese Temperatur liegen die Abweichungen vom Mariotte'schen Gesetz bei nicht zu starken Compressionen innerhalb der Grenzen der Beobacht-

*) Auf dieselbe Form reducirt sich die von Rankine Phil Mag. (4) II. p. 527 gegebene Formel, in welcher α und β ebenfalls Functionen der Temperatur sind.

**) Nach den Versuchen von Regnault weichen zwei Luftthermometer, mit Luft von verschiedenen Dichtigkeiten gefüllt, in ihrem Gange zwischen 0 und 100° nicht merklich von einander ab, wenn die fixen Punkte in Uebereinstimmung gebracht [werd]en, oder α_v ändert sich innerhalb dieser Grenzen nicht merklich.

ungsfehler. Die Formel giebt daher auch für die beiden **mittleren** Ausdehnungscoefficienten zwischen 0 und 100°, E und *E* den gemeinschaftlichen Werth 0,3665,*) dagegen sind die beiden **wahren** Ausdehnungscoefficienten ε und e bei 0° verschieden. Es ist nämlich

$$\varepsilon = \frac{1}{P}\frac{\partial p}{\partial \tau} \text{ für } v = V,\ e = \frac{1}{V}\cdot\frac{dv}{d\tau} \text{ für } p = P$$

wo der Quotient $\frac{dv}{d\tau}$ aus der Bedingung

$$dP = \frac{\partial p}{\partial \tau}\cdot d\tau + \frac{\partial p}{\partial v}.dv = 0$$

zu bestimmen ist, oder

$$e = -\frac{1}{V}\cdot\frac{\frac{\partial p}{\partial \tau}}{\frac{\partial p}{\partial v}} \text{ für } p = P.$$

Man erhält

$$\varepsilon = 0{,}0036650,\ e = 0036683.$$

Die Formel 54) kann dazu dienen, die Scalen der Luftthermometer mit constantem Druck und mit constantem Volum zu vergleichen, wie in folgender Tabelle geschehen ist:

Luftthermometer mit const. Volum, τ	m. const. Druck $100\,.\,\frac{v_\tau - V}{v_{100} - V}$	Diff.	Diff. nach Thomson und Joule **)
0°	0	0,0000	
10	10,0074	.0074	
20	20,0127	.0127	.0106
30	30,0162	.0162	
40	40,0178	.0178	.0074
50	50,0180	.0180	
60	60,0166	.0166	.0101
70	70,0141	.0141	
80	80,0105	.0105	.0054
90	90,0058	.0058	
100	100	0,0000	

Ich habe dieselben Rechnungen für Kohlensäure durchgeführt, weil einerseits die Abweichungen von den Gesetzen der idealen Gase bei derselben grösser und darum verhältnissmässig schärfer zu beobachten sind, als bei

*) Die Formel von Joule und Thomson giebt den beträchtlich von der Erfahrung abweichenden Werth E = *E* = 0,36534,

**) Siehe a. a. O. p. 353.

atmosphärischer Luft, was sich auch in besserer Uebereinstimmung der Formeln mit den Beobachtungen ausspricht, andrerseits aber die später zu benutzenden Resultate der Versuche von Joule und Thomson für Kohlensäure bei verschiedenen Temperaturen zu Gebote stehen, was bei atmosphärischer Luft nicht der Fall ist. Ich gebe nur kurz die Resultate. Regnault leitet aus seinen Beobachtungen über die Compressibilität der Kohlensäure folgende Mittelwerthe her

		beobachtet	berechnet
42b)	für $\frac{p}{\pi} = 2$, $\frac{pv}{\pi\Phi} =$	0,99147	0,99157,
	für $\frac{p}{\pi} = 4$, $\frac{pv}{\pi\Phi} =$	0,97423	0,97447,
	für $\frac{p}{\pi} = 8$, $\frac{pv}{\pi\Phi} =$	0,93992	0,93992,
	für $\frac{p}{\pi} = 16$, $\frac{pv}{\pi\Phi} =$	0,87038	0,87038.

Aus den beiden letzten Werthen bestimmen sich die Constanten der Formel

43b) $$\frac{pv}{\pi\Phi} = 1 - 0{,}0085318\left(\frac{p}{\pi} - 1\right) + 0{,}000007286\left(\frac{p}{\pi} - 1\right)^2$$

für die mittlere Temperatur $\tau = 3{,}26$. Aus denselben Werthen erhält man

45b) $$\frac{pv}{\pi\Phi} = 1 - 0{,}0084637\left(\frac{\Phi}{v} - 1\right) + 0{,}00003077\left(\frac{\Phi}{v} - 1\right)^2$$

Die Beobachtungen über die Abhängigkeit des Volums und des Druckes von der Temperatur ergeben

46b) $$\text{für } p = P,\ E = \frac{v_{100} - v_0}{v_0} = 0{,}37099,$$

47b) $$\text{für } v = V,\ E = \frac{p_{100} - p_0}{p_0} = 0{,}36856.$$

Die beobachteten Werthe von α_v sind in folgender Tabelle enthalten:

p_0	p_{100}	$\frac{V}{v}$	100 α beobachtet	100 α berechnet
758,47	1034,54	1,0000	0,36856	0,36856
901,09	1230,37	1,1879	0,36943	0,36944
1742,73	2387,72	2,2976	0,37523	0,37462
3589,07	4759,03	4,7318	0,38598	0,38598

Sie werden befriedigend durch die Formel dargestellt:

48b) $$\alpha_v = 0{,}0036856 + 0{,}00004668\left(\frac{V}{v} - 1\right).$$

Ferner findet man durch Reduction auf 0°

52b) $$\begin{cases} a_0 = 0{,}0065144, \\ b_0 = 0{,}0000331, \end{cases}$$

$$54\text{b)}\quad \frac{pv}{PV} = 1 - 0{,}0065144\left(\frac{V}{v}-1\right) + 0{,}0000331\left(\frac{V}{v}-1\right)^2$$
$$+ \left\{0{,}0036856 + 0{,}00002267\left(\frac{V}{v}-1\right) - 0{,}000000182\left(\frac{V}{v}-1\right)^2\right\}.\tau$$

$$\varepsilon = 0{,}0036856,\quad e = 0{,}0037098$$
$$\mathrm{E} = 0{,}30851,\quad E = 0{,}36971$$

Letzterer Werth weicht von dem beobachteten 46b) nicht bedeutend ab.

Die Temperatur τ in den Formeln 54) und 54b) ist die am Luftthermometer mit constantem Druck beobachtete. Wie Regnault nachgewiesen, weicht das Kohlensäurethermometer von dem Luftthermometer zwischen 0 und 100° nicht merklich ab, wenn diese beiden Punkte in Uebereinstimmung gebracht werden. Fänden sich Abweichungen, die ausserhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler liegen, so wäre für τ in 54b) die Angabe des Kohlensäurethermometers zu nehmen.

Um die Temperatur τ mit der absoluten Temperatur t zu vergleichen, müssen wir nothwendig auf die Definition der letzteren zurückgehen. Um die Vergleichung durchzuführen, ist es aber nöthig, dass wir vorher die Aenderung der Wirkungsfunction kennen, welche mit einer Volumänderung des Gases bei constanter Temperatur verbunden ist.

Bei den Versuchen von Joule und Thomson werden die Gase aus einem Gefäss, wo sie unter hohem Druck stehen, durch eine enge Oeffnung oder eine poröse Scheidewand in ein zweites gepresst, das mit der Atmosphäre communicirt. Der Versuch ist so eingerichtet, dass weder Wärme von Aussen aufgenommen, noch abgegeben wird. Es findet sich nun, dass das Gas, sobald es in einiger Entfernung von der Ausströmungsöffnung aus dem tumultuarischen Bewegungszustand wieder zu einer ruhigen, gleichmässigen Bewegung zurückgekehrt ist, oder bei Anwendung poröser Scheidewände, durch welche die Ausströmung ruhig und mit constanter Geschwindigkeit vor sich geht, sogleich, eine nur sehr wenig von der ursprünglichen verschiedene Temperatur zeigt. Die geringe Abkühlung δ ist der Druckdifferenz in beiden Gefässen proportional. Um den Gastheilen die Geschwindigkeit zu ertheilen, mit welcher sie durch die Oeffnung hindurchströmen, ist jedenfalls eine Arbeitsmenge erforderlich und in der That zeigt das Thermometer, wenn es von dem stürmischen Gasstrom getroffen wird, eine merklich niedrigere Temperatur. Sobald sich aber der ruhige Bewegungszustand wieder hergestellt hat, ist auch das aufgewendete Arbeitsquantum wieder in Wärme verwandelt und die Temperatur ist wieder die ursprüngliche. Auf welche Weise diese Umwandlung vorgeht, ob durch Reibung an den Gefässwänden, durch innere Reibung des Gases oder in Folge der bekannten eigenthümlichen Druckverhältnisse, welche bei der Ausbreitung eines aus enger Oeffnung ausströmenden Flüssigkeitsstrahls stattfinden, darüber sind mehrfache Discussionen geführt worden, auf welche wir hier um so weniger eingehen wollen, als einerseits die Beantwortung

der Frage wesentlich von den Ansichten abhängt, welche man sich von der Constitution der Gase bildet, und in Betreff deren an dieser Stelle absichtlich keine specielle Annahme gemacht werden soll, andererseits aber unsere Betrachtungsweise Resultate liefert, welche nur vom Anfangs- und Endzustande abhängen, von der speciellen Natur der Zwischenprocesse aber unabhängig sind.

Der Druck im ersten Gefäss sei p', im zweiten Gefäss p. Wir können uns denken, dass das Gas mittelst eines Stempels durch die Oeffnung gepresst wird, der sich mit constanter Geschwindigkeit bewegt und ebenso im zweiten Gefäss einen Stempel vor sich hertreibt. Ist v' das Volum der Masseneinheit des Gases unter dem Druck p' und bei der Temperatur τ' des ersten Gefässes, v das Volum beim Druck p und bei der Temperatur τ des zweiten Gefässes, so ist die äussere Arbeit, welche geleistet wird, während die Masseneinheit des Gases durch die Oeffnung strömt, $pv - p'v'$. Dazu käme noch die Arbeitsmenge, welche erforderlich ist, um den Gastheilen im zweiten Gefäss die constante grössere Geschwindigkeit zu ertheilen, welche sie z. B. besitzen, wenn beide Gefässe Cylinder von gleichem Querschnitt sind. Diese Arbeitsmenge ist indess in den Versuchen von Joule und Thomson von verschwindend kleinem Einfluss. Die Differenz der Temperaturen $\tau' - \tau$ ist die beobachtete Abkühlung, die wir mit δ bezeichnen. Die Zunahme der Wirkungsfunction der Masseneinheit des Gases ist

$$W(v, \tau) - W(v', \tau').$$

Da nun von aussen dem Gase weder Wärme zugeführt noch entzogen worden ist, so muss die Zunahme der Wirkungsfunction mit der geleisteten äusseren Arbeit die Summe Null geben oder es ist

55) $$W(v, t) - W(v', \tau') + pv - p'v' = 0.$$

Wegen der geringen Grösse der Abkühlung δ kann man setzen

$$W(v', \tau') = W(v', \tau) + \delta \cdot \frac{\partial W}{\partial \tau} = W(v', \tau) + A N . \delta,$$

wo N die Wärmecapacität bei dem constanten Volum v' bezeichnet. Nach den Versuchen von Regnault sind übrigens die Aenderungen der Wärmecapacität N mit der Dichtigkeit jedenfalls so klein, dass sie mit Rücksicht auf die Unsicherheiten, mit welchen die Beobachtung der Grösse δ behaftet ist, gar nicht in Betracht kommen. Daraus erhält man die Zunahme der Wirkungsfunction bei der Ausdehnung vom Volum v' zum Volum v und constant bleibender Temperatur (oder die Grösse, welche in der Regel schlechthin mit der zur Ausdehnung erforderlichen inneren Arbeit verwechselt wird)

56) $$W(v, \tau) - W(v', \tau) = A . N . \delta - (pv - p'v'). *)$$

*) Herr Waterston sucht in einer Notiz im *Philosophical Mag.* 1857 (Ser. 4.) XIV. 279 nachzuweisen, dass die Abkühlung δ nur das Aequivalent der äusseren Arbeit $pv - p'v'$ sei, welche das Gas bei seiner Ausdehnung in Folge der Abweichung

Bei einem idealen Gase müsste die Zunahme der Wirkungsfunction nach der Mayer'schen Annahme Null sein und dies wäre der Fall, wenn $\delta = 0$ wäre, denn es würde dann auch das zweite Glied der rechten Seite in Folge des Mariotte'schen Gesetzes verschwinden. Bei den wirklichen Gasen aber sind beide Glieder der rechten Seite von Null verschiedene, wiewohl nur kleine Grössen. Die Grösse δ finden Joule und Thomson der Druckdifferenz $p' - p$ proportional und zwar für atmosphärische Luft bei $\tau = 17^0\,C.$:

57) $$\delta = 0{,}26^0 \,.\, \frac{p' - p}{P},$$

wo P der früher bezeichnete Normaldruck ist. Die specifische Wärme eines Milligramms Luft bei constantem Druck können wir nach den Bestimmungen von Regnault *) $= 0{,}2377 \,.\, 10^{-6}$ Wärmeeinheiten annehmen und indem wir für das Verhältniss der beiden specifischen Wärmen den früher bezeichneten wahrscheinlichsten Werth 1,413 annehmen, ergiebt sich die specifische Wärme bei constantem Volum

58) $$N = 0{,}1682 \,.\, 10^{-6}.$$

Setzen wir beispielsweise $v = V$, $v' = \frac{1}{2} V$, so wird $\delta = 0{,}26$ und nach 54) mit Rücksicht auf die Verschiedenheit der Temperatur

$$\frac{pv}{PV} = 1{,}06230, \quad \frac{p'v'}{PV} = 1{,}06250,$$

mithin die geleistete äussere Arbeit.

59) $$pv - p'v' = -0{,}00020\, PV.$$

P ist der Druck einer Quecksilbersäule von 760 Millimeter Höhe unter dem Einfluss der Schwere $g = 9810$ oder, das specifische Gewicht des Quecksilbers $= 13{,}597$ angenommen,

60) $$P = 760 \,.\, 13{,}596 \,.\, 9810 = 101366 \,.\, 10^3.$$

Das Gewicht eines Liters Luft bei 0^0 und dem Druck P ist zu Paris nach

---

vom Mariotte'schen Gesetz leistet. Es scheint Herrn Waterston entgangen zu sein, dass in der Abhandlung von Joule und Thomson ausdrücklich nachgewiesen ist, dass die Abweichung vom Mariotte'schen Gesetz nicht hinreicht, die Abkühlung zu erklären. Die obige Formel 56) ist von der von Joule und Thomson (*Phil. Trans.* 1854) gegebenen in der Form insofern verschieden, als Joule und Thomson die specifische Wärme bei constantem Druck einführen. In Folge dessen bleibt aber die Ableitung der Formel an dieser Stelle mit einer erheblichen Unklarheit behaftet. Die Differenz $pv - p'v'$ in ihrer Formel ist nämlich gar nicht die wirklich geleistete äussere Arbeit, da beide Producte pv und $p'v'$ bei Joule und Thomson auf dieselbe Temperatur bezogen werden, während in der That die Temperatur im zweiten Gefäss niedriger ist und die durch die Abkühlung δ bewirkte Contraction sogar die Wirkung der Abweichung vom Mariotte'schen Gesetz überwiegen kann, so dass die wirklich geleistete äussere Arbeit negativ ist, wie wir sogleich an einem numerischen Beispiel sehen werden. Ein (negativer) Theil der wirklich geleisteten äusseren Arbeit, nämlich $-A(c_1 - c)\,\delta$, ist also bei Joule und Thomson mit in dem die Abkühlung ausdrückenden Gliede enthalten. Die von Thomson an einem anderen Orte (im *Phil. Mag.*, Ser. 4, IX. p. 530) gegebene Gleichung 17) ist mit unserer Gleichung 55) völlig identisch.

*) *Comptes rendus de l'academie de sciences de Paris.* XXXVI. p. 676.

Regnault (I. I. p. 157) = 1293,187 Milligramm. Daraus ergiebt sich das Volum eines Milligramms Luft

61) $$V = 772{,}875 \text{ Cubik-Millimeter},$$

mithin

62) $$P \, . \, V = 78343 \, . \, 10^6$$

und $pv - p'v' = -157 \, . \, 10^5$ absolute Arbeitseinheiten. Ferner ist nach 4)

$$A = 423{,}55 \text{ Kilogramm-Meter}$$
$$= 4155 \, . \, 10^{12} \text{ absolute Arbeitseinheiten},$$
$$AN\delta = 1817 \, . \, 10^5,$$

mithin

$$W(v, \tau) - W(v', \tau) = 1974 \, . \, 10^5 \text{ absolute Arbeitseinheiten}$$
$$= 0{,}00002012 \text{ Kilogramm-Meter},$$

oder dies ist die Zunahme der Wirkungsfunction bei Ausdehnung eines Milligramms Luft von 2 auf 1 Atmosphäre Druck bei 17° *C.* Wird umgekehrt ein Kilogramm Luft von der Dichtigkeit der Atmosphäre auf die Hälfte seines Volums comprimirt, so werden über 20 Kilogramm-Meter an Wärme mehr gewonnen, als das Aequivalent der zur Compression erforderlichen Arbeit.

Leider fehlen uns einigermaassen zuverlässige Angaben über die Grösse δ für atmosphärische Luft bei anderen Temperaturen. Es scheint nur aus den Versuchen von Joule und Thomson hervorzugehen, dass diese Grösse bei höheren Temperaturen geringer ist, was sich auch *a priori* erwarten liess. Etwas sicherer scheinen die Angaben für Kohlensäure. Joule und Thomson finden nämlich bei diesem Gase:

	beobachtet	berechnet
bei $\tau = 12^0{,}844$,	$\delta = 1{,}225 \dfrac{p' - p}{p}$,	$\delta = 1{,}215 \dfrac{p' - p}{p}$,
bei $\tau = 10{,}077$,	$\delta = 1{,}160 \dfrac{p' - p}{p}$,	$\delta = 1{,}164 \dfrac{p' - p}{p}$,
bei $\tau = 91{,}516$,	$\delta = 0{,}7037 \dfrac{p' - p}{p}$,	$\delta = 0{,}749 \dfrac{p' - p}{p}$.

Rankine hat eine empirische Formel aufgestellt, welche diese Beobachtungen darstellt, und indem wir die Form derselben mit einer kleinen Vereinfachung beibehalten und nur die Constanten der andern Einheiten wegen ändern, wird

57b) $$\delta = \frac{100650}{(275 + \tau)^2} \cdot \frac{p' - p}{p}.$$

Die specifische Wärme eines Milligramms Kohlensäure bei constantem Druck ist nach Regnault $= 0{,}2164 \, . \, 10^{-6}$. Für das Verhältniss der beiden specifischen Wärmen $\dfrac{c_1}{c}$ leitete Dulong aus seinen Versuchen die Zahl 1,33 her. Er fand nämlich die Schallgeschwindigkeit in Kohlensäure = 0,787, die Geschwindigkeit in atmosphärischer Luft = 1 gesetzt. In neuester Zeit

hat Masson*) die Schallgeschwindigkeit in einer grossen Reihe von Gasen und Dämpfen bestimmt. Er findet für Kohlensäure einen etwas kleineren Werth als Dulong, nämlich 0,77126. Die Dichtigkeit der Kohlensäure ist 1,529. Daraus ergiebt sich $\frac{c_1}{c} = 1,413 \,.\, 1,529 \,.\, 0,77126^2 = 1,285$, welche Zahl aus später zu erörternden Gründen wahrscheinlicher ist, als die von Dulong gefundene. Demnach wird für Kohlensäure die specifische Wärme $N = \frac{0,2164 \,.\, 10^{-6}}{1,285}$ und

$$log\, AN\delta = 13,84774 - 2\, log\,(275 + \tau) + log\,\frac{p' - p}{p}.$$

Nehmen wir wieder den Fall, wo eine auf ihr halbes Volum comprimirte Kohlensäuremasse sich bis zu ihrem ursprünglichen Volum ausdehnt, so giebt die Formel 54b)

$$\text{für } v = V,\ \frac{pv}{PV} = 1 + 0,0036856\,\tau$$

$$\text{und für } v' = \tfrac{1}{2}V,\ \frac{p'v'}{PV} = 0,9935187 + 0,0037081\,(\tau + \delta).$$

Für Kohlensäure ist

61b) $V = 505,712$ Cubik-Millimeter,

62b) $PV = 51262 \,.\, 10^6$.

Ferner wird

$$\frac{p' - p}{p} = 0,987 + 0,00373\,\tau.$$

Aus diesen Datis erhält man z. B. für

τ	$AN\delta$	$pv - p'v'$	$W(v,\tau) - W(v',\tau)$
$\tau = 0^0$,	$AN\delta = 9192 \,.\, 10^5$,	$pv - p'v' = 825 \,.\, 10^5$,	$W(v,\tau) - W(v',\tau) = 8367 \,.\, 10^5$
10^0	8878	794	8084
20^0	8585	764	7821
30^0	8320	723	7597
40^0	8013	682	7331
50^0	7825	635	7190
60^0	7598	566	7032
70^0	7385	528	6857
80^0	7182	472	6710
90^0	6992	410	6582
100^0	6811	343	6468

Die Zunahme der Wirkungsfunction wird also bei höheren Temperaturen geringer. Im vorliegenden Falle beträgt sie bei 0^0 in Kilogramm-Metern ausgedrückt 0,0000853, bei 100^0 0,0000659 und ist etwa 4mal so gross als bei atmosphärischer Luft.

Für unsern Zweck der Vergleichung der Temperaturscalen kommt es

*) *Ann. de chimie.* 1858. (3. Ser.) LIII. 257.

darauf an, den Differentialquotienten $\frac{\partial W}{\partial v}$ für einen beliebig gewählten Werth von v als Function von τ zu kennen. Differentiirt man zu diesem Zweck 56) in Beziehung auf v', indem man v als constant ansieht, so erhält man

$$63)\qquad \frac{\partial W}{\partial v'} = -AN\frac{\partial \delta}{\partial v'} - \frac{\partial (p'v')}{\partial v'};$$

nach 57) und 57b) ist

$$\delta = \mathfrak{d}\,.\,\frac{p'-p}{P},$$

wo $\mathfrak{d}$ eine Function von τ allein bezeichnet, mithin

$$64)\qquad \frac{\partial \delta}{\partial v'} = \frac{\mathfrak{d}}{P}\cdot\frac{\partial p'}{\partial v'}.$$

Die Gleichung 54) resp. 54b) kann mit Rücksicht darauf, dass p den Druck bei dem Volum v' und der Temperatur $\tau+\delta$ bezeichnet, unter der Form geschrieben werden

$$65)\qquad \frac{p'v'}{PV} = a + b\,.\,\frac{V}{v'} + c\,.\,\frac{V^2}{v'^2} + \left[l + m\,.\,\frac{V}{v'} + n\,\frac{V^2}{v'^2}\right](\tau+\delta),$$

daraus

$$\frac{p'}{P} = a\,\frac{V}{v'} + b\,.\,\frac{V^2}{v'^2} + c\,.\,\frac{V^3}{v'^3} + \left[l\,\frac{V}{v'} + m\,\frac{V^2}{v'^2} + n\,\frac{V^3}{v'^3}\right](\tau+\delta).$$

Indem man letztere Gleichung in Beziehung auf v' differentiirt und dann, als den einfachsten Fall, $v'=V$ setzt, erhält man

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial p'}{\partial v'}\right)_{v'=V} = -\frac{1}{V}\left[a+2b+3c+(l+2m+3n)(\tau+\delta)\right] + (l+m+n)\left(\frac{\partial \delta}{\partial v'}\right)_{v'=V}.$$

Indem man diesen Werth für $\frac{\partial p'}{\partial v'}$ in 64) einsetzt und aus der so erhaltenen Gleichung $\left(\frac{\partial \delta}{\partial v'}\right)_{v'=V}$ bestimmt, wird

$$\left(\frac{\partial \delta}{\partial v'}\right)_{v'=V} = -\frac{\frac{\mathfrak{d}}{V}\left[a+2b+3c+(l+2m+3n)(\tau+\delta)\right]}{1-\mathfrak{d}\,(l+m+n)}.$$

Der Nenner dieses Ausdrucks ist so wenig von 1 verschieden, dass er ohne merklichen Einfluss auf die Rechnung ganz weggelassen werden kann. Ferner erhält man aus 65)

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial (p'v')}{\partial v'}\right)_{v'=V} = -b - 2c - (m+2n)(\tau+\delta) + V\,.\,(l+m+n)\left(\frac{\partial \delta}{\partial v'}\right)_{v'=V}.$$

Mit Rücksicht auf diese Werthe erhält man aus 63) mit Vernachlässigung einiger Glieder von verschwindend kleinem Einfluss auf das Resultat:

$$66)\qquad \frac{1}{P}\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)_{v=V} = \left(\frac{AN}{PV} + l + m\right)\left[a+2b+(l+2m)\tau\right].\mathfrak{d} + \left[b+2c+(m+2n)\tau\right].$$

Ist nun $\mathfrak{d}$ als Function von τ bekannt, so ist es auch $\frac{\partial W}{\partial v}$. Für atmo-

sphärische Luft wissen wir nur, dass für $\tau = 17$, $\mathfrak{d} = 0{,}26$ ist. Ferner ergiebt sich aus 54)

$$A)\quad \begin{cases} a = 1{,}0009209, & l = 0{,}00365676, \\ b = -0{,}00003243, & m = 0{,}00000821, \\ c = 0{,}00001154, & n = 0{,}00000003, \\ \dfrac{AN}{PV} = 0{,}008755, & \end{cases}$$

mithin

$$67)\quad \text{für } \tau = 17,\ \frac{1}{P}\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)_{v=V} = 0{,}09266.$$

Für Kohlensäure folgt aus 54b)

$$B)\quad \begin{cases} a = 1{,}0065475, & l = 0{,}0036628, \\ b = -0{,}0065806, & m = 0{,}00002303, \\ c = 0{,}0000331, & n = -0{,}00000018, \\ \dfrac{AN}{PV} = 0{,}013650, & \end{cases}$$

mithin

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)_{v=V} = (0{,}0172213 + 0{,}00006430\,\tau)\,\mathfrak{d} - 0{,}0065144 + 0{,}00002267\,\tau.$$

Die Beobachtung hat ergeben

$$67\text{b})\quad \begin{cases} \text{für } \tau = 12{,}844,\ \mathfrak{d} = 1{,}225, \text{ mithin } \dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial W}{\partial v}\right) = 0{,}015884, \\ \text{für } \tau = 19{,}077,\ \mathfrak{d} = 1{,}160 \qquad \dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial W}{\partial v}\right) = 0{,}015118, \\ \text{für } \tau = 91{,}516,\ \mathfrak{d} = 0{,}7037 \qquad \dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial W}{\partial v}\right) = 0{,}011822. \end{cases}$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir zur Vergleichung der Temperatur τ mit der absoluten Temperatur t übergehen. Aus der Definition der letzteren folgt, dass für jeden umkehrbaren Kreisprocess, welchen man das Gas durchlaufen lässt, die Gleichung 18) erfüllt sein muss, dass daher auch für jeden beliebigen Werth von v und t die Gleichung 28), welche eine Transformation von 18) ist, gelten muss. Es muss also mit Rücksicht auf 26)

$$t\,.\,\frac{\partial p}{\partial t} = p + \frac{\partial W}{\partial v}$$

sein, oder

$$68)\quad \frac{1}{P}\,\frac{\partial p}{\partial \tau}\,.\,t\,\frac{d\tau}{dt} = \frac{p}{P} + \frac{1}{P}\,\frac{\partial W}{\partial v}.$$

In dieser Gleichung lassen sich nun für $v = V$ nach dem Vorhergehenden alle Grössen bestimmen, mit Ausnahme von $t\,.\,\dfrac{d\tau}{dt}$. Es ist nämlich, wenn man $v = V$ setzt:

für atmosphärische Luft $\frac{p}{P} = 1 + 0{,}0036650\,\tau$, $\frac{1}{P}\frac{\partial p}{\partial \tau} = 0{,}0036650$,

für Kohlensäure $\frac{p}{P} = 1 + 0{,}0036856\,\tau$, $\frac{1}{P}\frac{\partial p}{\partial \tau} = 0{,}0036856$.

Man erhält daher für atmosphärische Luft

69) $$\text{bei } \tau = 17^\circ,\ t\frac{d\tau}{dt} = 290{,}58.$$

Leider besitzen wir für atmosphärische Luft keine einigermaassen sicher Data, um die Grösse $t\frac{d\tau}{dt}$ für andere Temperaturen zu bestimmen, und je des Verfahren, wodurch man aus der einen bei 17° angestellten Beobach tungsreihe die anderen Werthen von τ entsprechenden absoluten Tempera turen bestimmen wollte, müsste zu illusorischen Resultaten führen. Da $\frac{d}{dt}$ nahe $= 1$ ist, so folgt daraus nur, dass die absolute Temperatur für $\tau = 1$ nicht bedeutend von 290,58° verschieden ist.

Für Kohlensäure erhält man:

			Nach Formel 70b)
69b)	für $\tau = 12{,}844$,	$t\,.\,\frac{d\tau}{dt} = 288{,}28$,	288,31,
	für $\tau = 19{,}077$,	$t\,.\,\frac{d\tau}{dt} = 294{,}51$,	294,47,
	für $\tau = 91{,}516$,	$t\,.\,\frac{d\tau}{dt} = 366{,}05$,	366,05,

Diese Werthe werden am besten dargestellt durch die Formel

70b) $$t = a + b\tau + c\tau^2,$$

in welcher

$$a = 275{,}10$$
$$b = 0{,}9982$$
$$c = 0{,}000018$$

zu setzen ist. Dieselbe genügt zugleich der Bedingung $t_{100} - t_0 = 100$. Es wird nämlich

$$t_0 = 275{,}10,$$
$$t_{100} = 375{,}10.$$

Nach dieser Formel sind die nebenstehenden Zahlen berechnet. Ich halte daher die Formel 70b) für den wahrscheinlichsten Ausdruck der absoluten Temperatur als Function der Temperatur des Luftthermometers mit constantem Volum, der sich nach den bisher vorliegenden Beobachtungen angeben lässt. Die Temperatur τ ist am Kohlensäurethermometer gemessen; über die Anwendbarkeit der Formel auf die Temperatur des atmosphärischen Luftthermometers gilt die früher gemachte Bemerkung.

Nach der Formel 70b) ist folgende Tabelle zur Vergleichung von t und τ

τ.	t — 275,10.	Abweichung $\tau-(t-275{,}10)$.	Abweichung nach Thomsen.
0°	0	0,000	0,000
10	9,984	0,016	
20	19,971	0,029	0,0298
30	29,962	0,038	
40	39,957	0,043	0,0403
50	49,955	0,045	
60	59,957	0,043	0,0366
70	69,962	0,038	
80	79,971	0,029	0,0233
90	89,984	0,016	
100	100	0,000	0,0000

Das Resultat der Vergleichung stimmt übrigens, wie man sieht, mit dem von Thomson und Joule nahe überein. Dass die Abweichung gerade bei 50° am grössten und für Temperaturen, die um gleichviel von 50° verschieden sind, gleich gross erscheint, liegt in der Form der Gleichung 70b). Es wird mit Rücksicht auf die geringe Grösse der ganzen Abweichung auch wirklich nahezu der Fall sein. Leider erlauben die vorliegenden Beobachtungen eine genauere Bestimmung nicht, da es an einer Beobachtung fehlt, welche nahe in der Mitte des Intervalles zwischen 0° und 100° läge. Man könnte die Werthe von $\mathfrak{b}$ für zwischenliegende Temperaturen nach der Interpolationsformel 57b) berechnen. Da sich diese aber nur unvollkommen an die Beobachtung anschliesst, so dürfte dadurch schwerlich grössere Genauigkeit erreicht werden und wir begnügen uns mit dem Resultat, dass die absolute Temperaturscala innerhalb des Intervalles von 0° bis 100° höchstens um $\frac{1}{20}$ von der des Luftthermometers abweicht.

Man kann umgekehrt τ durch t ausdrücken, indem man setzt

71b) $$\tau = a(t - t_0) + b(t - t_0)^2.$$

Man erhält dann

$$t_0 = 275{,}10, \quad a = 1{,}0018, \quad b = -0{,}000018.$$

Setzt man den Ausdruck 71b) anstatt τ in 54b) ein, so erhält man schliesslich die Relation zwischen p, v und t.

Die bisherigen Betrachtungen sollen uns noch dazu dienen, auf die Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents aus der Differenz der specifischen Wärmen $c_1 - c$ zurückzukommen.

Setzt man nämlich in 54b) für $p \cdot v$ seinen Werth 35), so erhält man eine Gleichung, welche k als Function von v und t giebt, da τ als Function von t bekannt ist. Wählen wir anstatt 54) die für die Rechnung bequemere Form 65), so erhalten wir die Gleichung

$$72)\quad \frac{k\,.\,t}{P\,.\,V} = a + b\,.\,\frac{V}{v} + c\,.\,\frac{V^2}{v^2} + \left(l + m\,.\,\frac{V}{v} + n\,.\,\frac{V^2}{v^2}\right)\tau,$$

in welcher für a, b, c, l, m bei Luft die Werthe A), bei Kohlensäure die Werthe B) zu setzen sind. Wenn wir diese Gleichung in Beziehung auf v differentiiren und dann $v = V$ setzen, so folgt, mit Umkehrung der Vorzeichen:

$$73)\quad -\frac{t}{P}\left(\frac{\partial k}{\partial v}\right)_{v=V} = b + 2c + (m + 2n)\,.\,\tau.$$

Nach 38) ist

$$74)\quad \frac{t^2}{PV}\left(\frac{\partial k}{\partial t}\right)_{v=V} = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)_{v=V}.$$

Diese Werthe können dazu dienen, die unbekannten Grössen in der Gleichung 40) zu bestimmen. Diese giebt nämlich durch PV dividirt:

$$\frac{pv}{PV} = \frac{A(c_1 - c)\,.\,t}{PV} - 2\,\frac{t^2}{PV}\,.\,\frac{\partial k}{\partial t} - \frac{v\,.\,t}{V.\,P}\,.\,\frac{\partial k}{\partial v},$$

oder für $v = V$ mit Rücksicht auf 73) und 74)

$$\frac{p}{P} = \frac{A\,.\,(c_1 - c)\,.\,t}{PV} - 2\,.\,\frac{1}{P}\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)_{v=V} + b + 2c + (m + 2n)\,\tau.$$

Für atmosphärische Luft ist $\frac{p}{P} = 1 + 0{,}0036650\,.\,\tau$ und mit Rücksicht auf die Werthe 62), A) und 67) erhält man

für $\tau = 17$, $A\,.\,(c_1 - c)\,.\,t = 1{,}068393\; PV = 83701\,.\,10^6$

$A\,.\,(c_1 - c) = 286550\,.\,10^3$.

Die specifische Wärme c_1 auf das Milligramm als Masseneinheit bezogen ist nach Regnault $0{,}2377\,.\,10^{-6}$, $\frac{c_1}{c} = 1{,}413$, mithin $c = 0{,}1682\,.\,10^{-6}$ und $c_1 - c = 0{,}0695\,.\,10^{-6}$. Daraus erhält man

$A = 4123\,.\,10^{12}$ absolute Arbeitseinheiten,

$= 420{,}29$ Kilogramm-Meter.

Eine genauere Uebereinstimmung mit den von Joule bei seinen Versuchen über die Reibung von Quecksilber und Gusseisen gefundenen Werth 423,55 ist kaum zu verlangen.

Bei Kohlensäure wird für $\tau = 12{,}844$, $t = 287{,}920$

$A\,.\,(c_1 - c)\,.\,t = 1{,}085329\; PV$

$A\,.\,(c_1 - c) = 0{,}0037695\; PV = 193230\,.\,10^3$.

Nach den Versuchen von Regnault ist $c_1 = 0{,}2164\,.\,10^6$ und nach dem früher auf Grund der Versuche von Masson angenommenen Werth für $\frac{c_1}{c}$ war $c = 0{,}1684\,.\,10^{-6}$, mithin $c_1 - c = 0{,}0480\,.\,10^{-6}$. Daraus folgt

$A = 4026\,.\,10^{12}$ absolute Arbeitseinheiten,

$= 410{,}37$ Kilogramm-Meter.

Ueber die unbedeutende Abweichung dieser Zahl von der obigen braucht

man sich um so weniger zu wundern, da ein kleiner Fehler in $\frac{c_1}{c}$ einen verhältnissmässig bedeutenden Einfluss auf A hat. Berechnet man rückwärts aus $A = 423,55$ und $c_1 = 0,2164 \cdot 10^{-6}$ den Quotienten der specifischen Wärmen, so erhält man $\frac{c_1}{c} = 1,274$, woraus die Schallgeschwindigkeit 0,763 folgen würde, während Masson 0,771 und Dulong 0,786 beobachtet hat. Darum scheint mir der von Masson beobachtete Werth, wie bereits oben bemerkt, der richtigere zu sein. Ueberhaupt möchte die Bestimmung des Quotienten $\frac{c_1}{c}$ für andere Gase als atmosphärische Luft aus dem Wärmeäquivalent sicherer sein, als die Bestimmung aus der Schallgeschwindigkeit*).

V. Bemerkungen über das Princip der Aequivalenz der Arbeit und Wärme.

Der vorstehenden Darstellung der Theorie der Gase sind absichtlich ausser rein empirischen Thatsachen nur diejenigen Annahmen zu Grunde

*) Mayer hat zuerst das Wärmeäquivalent aus der durch Compression einer Luftmasse frei werdenden Wärmemenge zu 365 Kilogramm-Meter bestimmt. (Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur: Liebig's Annalen der Chemie und Pharmacie. 1842. LXII. p. 240.) Holtzmann findet unter derselben Voraussetzung wie Mayer mit Zugrundelegung anderer Data als wahrscheinlichsten Werth 374 Kilogramm-Meter. (Ueber die Wärme und die Elasticität der Gase und Dämpfe. Mannheim 1845. p. 12.) Clausius findet 370 Kilogramm-Meter. (Pogg. Ann. LXXIX. 522.) Diesen Bestimmungen liegen noch die älteren Angaben über die specifische Wärme der Luft von de Laroche und Bérard zu Grunde. Thomson berechnet aus dem von Joule gefundenen Wärmeäquivalent und für $\frac{c_1}{c} = 1,41$ bei atmosphärischer Luft $c_1 = 0,2374$, $c = 0,1689$. (*Phil. Trans.* p. 78.) Burdin und Bourget berechnen in gleicher Weise den Werth von $\frac{c_1}{c}$ für zehn verschiedene Gase aus den von Regnault beobachteten Werthen von c_1, indem sie annehmen, dass das Product $A \cdot \varrho \cdot (c_1 - c)$ für alle Gase constant sei. Für Kohlensäure finden sie $\frac{c_1}{c} = 1,29$. (*Comptes rendus.* XLV. 743.) Person berechnet umgekehrt aus den von Regnault beobachteten Werthen für $c_1 = 0,2371$ und $\frac{c_1}{c} = 1,410$ das Wärmeäquivalent zu 424 Kilogramm-Meter. (*Comptes rendus.* XXXIX. 1131.) Es ist Unrecht, wenn in einem deutschen Lehrbuche (Eisenlohr, Lehrbuch der Physik. 7. Aufl. p. 417) Person als Entdecker dieser Relation bezeichnet wird; die Franzosen erweisen uns nicht gleiche Ehre. Decher endlich führt diese Rechnung für vier verschiedene Gase mit den von Dulong gegebenen Werthen für $\frac{c_1}{c}$ aus. Er erhält verschiedene Werthe für das Wärmeäquivalent. Bei Kohlensäure ist die Abweichung am grössten, nämlich $A = 360$. (Dingler's polytechn. Journal. Bd. CXLVIII.) Daraus ist jedoch nur zu schliessen, dass der Werth von Dulong $\frac{c_1}{c} = 1,339$ zu gross ist. Wie bekannt, lassen sich gegen die Genauigkeit der Bestimmung der Schallgeschwindigkeit aus der Tonhöhe von Pfeifen mancherlei Einwendungen machen. Die Abweichungen vom idealen Gaszustand sind von keinem der angeführten Physiker dei der Rechnung berücksichtigt worden und in der That ist ihr Einfluss, wie sich aus obigen Zahlen ergiebt, nur ein geringer.

gelegt worden, welche in den allgemeinen Principien der mechanischen Wärmetheorie enthalten sind, das Princip der Aequivalenz der Arbeit und Wärme und das Carnot'sche Princip, auf welchem die Definition der absoluten Temperatur beruht. Von jeder speciellen Hypothese, die auf Giltigkeit Anspruch macht, muss von vorn herein verlangt werden, dass sie die empirischen Facta, auf welchen die früheren Entwickelungen beruhen, mit genügender Genauigkeit darstellt, so dass diese giltig bleiben, von welcher Hypothese man auch ausgehen mag. Schliesslich aber dürfte es angemessen sein, mit einigen Worten die Ansichten, welche in neuerer Zeit über die Molekularconstitution der Gase aufgestellt worden sind, und ihr Verhältniss zum Grundprincip der mechanischen Wärmetheorie zu erörtern. Eine specielle Veranlassung dazu geben die Angriffe, welche in neuester Zeit*) von Herrn Decher gegen die mechanische Wärmetheorie überhaupt gerichtet werden, und welche ein praktisches Beispiel liefern, dass das Wesen dieses jungen Zweiges der theoretischen Physik von vielen Seiten sehr unrichtig aufgefasst wird. Ich behaupte nämlich, dass Herr Decher, obwohl er sich selbst einbildet, ein heftiger Gegner der mechanischen Wärmetheorie zu sein, doch seinen eigenen Prämissen zufolge ganz auf dem Boden derselben steht. Herr Decher meint nämlich, „dass das Warmsein eines Körpers nicht durch die Anwesenheit eines Stoffes an und für sich und der höhere oder niedere Grad des Warmseins nicht durch die in dem Körper enthaltene Menge desselben bedingt wird, sondern durch einen veränderten Zustand oder eine Eigenschaft des Wärmestoffes," welchen Herr Decher nachher selbst mit dem Aether identificirt. Dies ist aber gerade die einzig charakteristische Grundannahme der mechanischen Wärmetheorie. Ich hebe dies besonders hervor, weil auch wohl Andere diese Prämisse den Thatsachen gegenüber zugeben, sich aber dennoch nicht mit den nothwendig daraus folgenden Consequenzen einverstanden erklären und sich nicht zu der mechanischen Wärmetheorie bekennen wollen.

Das Princip der Aequivalenz der Arbeit und Wärme, wie das allgemeinere „Princip der Erhaltung der Kraft" beruht bekanntlich auf dem Princip der lebendigen Kräfte der analytischen Mechanik. Dieses Princip gilt zunächst von einem System materieller Punkte, zwischen denen Kräfte wirksam sind, welche nach den Verbindungslinien gerichtet und Functionen der Entfernung sind. Die atomistische Anschauungsweise führt, einigermaassen consequent durchgeführt, wie schon mehrfach erörtert worden ist**), auf die Annahme unausgedehnter Atome und auf ein solches System ist das Princip der lebendigen Kräfte ohne weiteres anwendbar. Ich glaube,

*) Dingler's polytechn. Journ. 1858. Bd. CXLVIII. p. 1—10, 81—93, 161—173, 241—257.

**) Vergl. z. B. Fechner: Atomlehre, Leipzig 1855, und Hoppe in Poggend. Ann. CIV. p. 288.

selbst bei der dynamischen Ansicht, d. h. wenn man sich die Materie den Raum stetig erfüllend dächte, würden die auf dasselbe gegründeten Schlüsse noch giltig bleiben. Da aber die Erörterung dieses Punktes auf Fragen führt, welche mehr der metaphysischen Speculation als der Physik angehören, so will ich hier nicht darauf eingehen. — Ein Atom ist also ein Punkt im Raume, der die besondere Eigenschaft hat, dass ein anderes gleiches Atom, welches sich in einer gewissen Entfernung von demselben befindet, eine Beschleunigung in der Richtung der Verbindungslinie erfährt, deren Grösse von der besondern Natur (Masse) des ersten Atoms und von der Entfernung beider Atome abhängt. Man hat das Product der Masse eines Atoms und der Beschleunigung, welche dasselbe erfährt, in der Mechanik mit einem eigenen Namen bezeichnet und nennt dasselbe „bewegende Kraft“ oder „Kraft“ schlechthin, weil sich mit Hilfe dieses Products, dem ich einer gewissen rein phoronomischen Auffassung der mechanischen Principien gegenüber keine andere, als eine blose analytische Bedeutung vindiciren will, gewisse Sätze der Mechanik, z. B. das Princip der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung und das auf demselben beruhende Princip der lebendigen Kräfte, leichter aussprechen lassen. Dieses Product soll also im Folgenden unter dem Worte „Kraft“ verstanden werden.

Es wäre nun der Fall denkbar, dass das Gesetz der Beschleunigung und die Anordnung der Atome zu einer gewissen Zeit von der Art wäre, dass die Geschwindigkeit und die Resultate der Beschleunigung jedes Atoms Null wären und dann wäre das System im stetigen Gleichgewicht, möchten nun die Atome alle von gleicher Natur (ponderable Körperatome) oder von verschiedener Beschaffenheit (Körper- oder Aetheratome) sein. Entgegengesetzten Falls fände Bewegung statt, über deren specielle Natur wir vor der Hand keine Annahmen zu machen brauchen. Die zwischen den Punkten des Systems wirkenden Kräfte lassen sich durch eine Potentialfunction darstellen. Ist R das Potential aller Kräfte, welche auf ein bestimmtes Atom wirken, so liefert das Princip der lebendigen Kräfte bekanntlich die Gleichung

$$d\Sigma R = d\Sigma \tfrac{1}{2} m v^2$$

und daher

$$\Sigma \tfrac{1}{2} m v^2 - \Sigma R = const.$$

Die erste Summe ist die Summe der lebendigen Kräfte des Systems, die zweite Summe, mit umgekehrten Vorzeichen, nennt Helmholtz*) die Summe der Spannkräfte. Diese Bezeichnung ist nicht glücklich gewählt, weil man z. B. bei der Ausdehnung einer gespannten Feder, an welche man zunächst denkt, nicht etwa die Summe der auf einander folgenden Spannungen darunter verstehen darf, mit welcher das Potential gar nicht homogen

*) Die Erhaltung der Kraft. Berlin 1847. p. 14.

ist, und weil, wie die Erfahrung gelehrt hat, die Anwendung des Wortes „Kraft" zu beklagenswerthen Missverständnissen führen kann. Ich bleibe daher bei dem Ausdrucke Potential stehen und nenne die letzte Summe das Potential des Systems auf sich selbst. Die Differenz beider Summen soll die Wirkungsfunction des Systems heissen. Das Princip der Erhaltung der Arbeit lautet also: So lange auf das System keine äusseren Kräfte einwirken, bleibt seine Wirkungsfunction constant.

Die Anwendung auf die Wärmetheorie ist einfach die: Mag man sich einen Körper wie immer aus Körperatomen und Aetheratomen zusammengesetzt denken und will man die Wärmeerscheinungen durch Aenderungen des Zustandes dieser Theile, nicht aber durch Uebergang eines Wärmestoffes von einem Körper zum andern erklären, so ist eine solche Aenderung nur denkbar durch eine veränderte Anordnung der Theile, denn auch die Aenderung der „Spannung" des Aethers oder der Wechselwirkung zwischen Körpertheilen und Aethertheilen, von welchen Herr Decher redet, kann offenbar nur durch Aenderung ihrer gegenseitigen Lage eintreten. Geht also das System aus einem Wärmezustand in einen anderen über, so wird sich entweder das Potential des Systems auf sich selbst ändern, oder die Summe der lebendigen Kräfte des Systems, oder — was die allgemeine Annahme ist — beide. Das Wesen der mechanischen Wärmetheorie schliesst keinen der beiden erstgenannten Fälle aus. Naturgemäss legt man aber allen Betrachtungen am besten den dritten Fall als den allgemeinen zu Grunde. Das Princip der Erhaltung der Arbeit sagt nun, dass, wenn zwei Systeme in Wechselwirkung treten, so dass ihre Wirkungsfunctionen sich ändern, dennoch die Wirkungsfunction des Gesammtsystems ungeändert bleibt. Werden also nach der gegenseitigen Einwirkung beide Systeme wieder getrennt, so dass das Potential derselben auf einander Null ist, so hat die Wirkungsfunction des einen um eben soviel zugenommen, wie die des andern abgenommen hat. Ich halte es für überflüssig, dies durch specielle Beispiele zu erläutern. — Um die Werthe des Potentials des Systems auf sich selbst bei verschiedenen Zuständen vergleichen zu können, ist natürlich die additive Constante, welche jede Potentialfunction ihrem Wesen nach enthält, jedesmal auf gleiche Weise zu bestimmen, so z. B. dass das Potential bei unendlicher Entfernung aller Punkte des Systems Null wird. Die Aenderung des Potentials des Systems auf sich selbst pflegt man gewöhnlich die „innere Arbeit" des Systems zu nennen. Merkwürdigerweise sagt nun Herr Decher an verschiedenen Stellen seiner Abhandlung, ganz im Widerspruch mit seinen sonstigen Ansichten, dass innere Arbeit bei Gasen nicht denkbar sei. Herr Decher definirt nicht, was er unter innerer Arbeit versteht. Ich kann jedoch mit dem Worte keinen andern präcisen Begriff verbinden, als den *soeben angegebenen.* Dann müsste aber, wenn innere Arbeit bei den Gasen

nicht möglich wäre, das Potential einer Gasmasse auf sich selbst einen constanten, von Dichtigkeit und Temperatur unabhängigen Werth haben. Nimmt man dies an, so folgt daraus, dass die Aenderung der Wirkungsfunction, also auch des Wärmezustandes, nur in der Aenderung der lebendigen Kraft der einzelnen Atome ihren Grund haben kann, mit andern Worten, es folgt daraus gerade die Anschauungsweise, die man sich in neuester Zeit von der Molecularconstitution der Gase gebildet hat und die Herrn Decher besonders anstössig zu sein scheint. Untersuchen wir im Folgenden, inwieweit diese Anschauungsweise geeignet ist, genügende Rechenschaft über die Eigenschaften der Gase zu geben und wie sich bei denselben insbesondere der Begriff der Temperatur gestaltet.

VI. Die Molekularconstitution der Gase.

Als Repräsentanten der verschiedenen Ansichten über die Molekularconstitution der Gase, welche in neuerer Zeit im Zusammenhang mit der mechanischen Wärmetheorie aufgestellt worden sind, erwähne ich die von Rankine*), von Redtenbacher**), und endlich die von Krönig***) und Clausius †).

Wir ziehen zunächst die letztere Ansicht in Betracht, weil sie sich durch die Einfachheit empfiehlt, mit welcher sich aus derselben die bekannten Relationen zwischen Volum, Druck und Temperatur, sowie zwischen der Wärmecapacität und dem Atomgewicht der gasförmigen Körper ergeben. Das Wesentliche der Hypothese besteht bekanntlich in der Annahme, dass die Wirkungssphären der zwischen den Gastheilchen wirksamen Molekularkräfte sehr klein sind gegen die mittleren Entfernungen der Moleküle im gasförmigen Zustand, so dass sich diese in allen möglichen Richtungen in geradlinigen Bahnen bewegen, aus welchen sie nur abgelenkt werden, wenn zwei Moleküle einander so nahe kommen, dass sie in ihre gegenseitige Wirkungssphäre gerathen. Das Bild, welches Herr Krönig zur Veranschaulichung einer solchen Bewegungsweise braucht, indem er die Gasatome mit aneinander prallenden vollkommen elastischen Kugeln vergleicht, soll eben nur ein Bild sein. Das Wesen der Ansicht bleibt ungeändert, wenn man sich anstatt der elastischen Kugeln unausgedehnte Atome, oder wie es bei chemisch zusammengesetzten Gasen unbedingt nothwendig ist, Atomgruppen denkt, welche einander nach einem seiner Form nach nicht zu bestimmenden Gesetz abstossen oder anziehen. Welches

---

*) W. J. Macquorn Rankine: *On the centrifugal theory of elasticity, as applied to gases and vapours. Phil. Mag.* (4. Ser.) II. 509.

**) F. Redtenbacher: Das Dynamidensystem. Mannheim 1857.

***) A. Krönig: Grundzüge einer Theorie der Gase. Berlin 1856 und Pogg. Ann. XCIX. 312.

†) R. Clausius: Ueber die Art der Bewegung, welche wir Wärme nennen. Pogg. Ann. C. 353.

von beiden der Fall sei, lässt sich *a priori* nicht entscheiden, denn es ist klar, dass zwei einander begegnende Moleküle, welche sich anziehen, um einander geschlossene oder hyperbelähnliche ungeschlossene Bahnen mit zwei geradlinigen Asymptoten beschreiben können, je nachdem ihre relative Geschwindigkeit eine geringere oder grössere ist. Die Art der Abweichungen vom idealen Gaszustand macht, wie wir bald sehen werden, das Vorhandensein anziehender Kräfte wahrscheinlich. Wem es übrigens Gewissensscrupel macht, dass bei Annahme nur anziehender Kräfte (freilich mit unendlich kleiner Wahrscheinlichkeit) der Fall eintreten könnte, dass die Bahnen zweier Atome sich in einem Punkte durchkreuzten und beide zu derselben Zeit denselben Punkt des Raumes einnähmen, dem bleibt es überlassen, bei Annäherung zu einer gewissen Nähe die Anziehung in eine Abstossung übergehen zu lassen, die bei abnehmender Entfernung über jede endliche Gränze wächst. Ohnedies scheint es ohne die Annahme von Abstossungskräften nicht wohl begreiflich, dass ein Körper, dessen Atome einander so nahe stehen wie im festen Aggregatzustand, eine für ein Gas undurchdringliche Hülle bilden kann.

Wenn gleich die Vorstellung vom inneren Druck eines Gases, welche man der Aëromechanik bisher zu Grunde gelegt hat, wesentlich auf die Annahme basirt ist, dass die Expansivkraft der Gase von der Abstossung ihrer kleinsten Theile herrührt, wenn also alle Gesetze der Aërodynamik einer neuen Herleitung durch die neue Hypothese bedürfen, so scheint man sich andererseits mehrfach die irrige Vorstellung zu machen, als ob die Art des Druckes, welchen solche bewegte Gasatome auf eine feste Wand ausüben, eine wesentlich von derjenigen verschiedene wäre, welche wir uns überhaupt beim Druck flüssiger oder elastischer Körper vorzustellen gewohnt sind*). Den Standpunkt, von welchem man Druck und Stoss für zwei ihrem Wesen nach verschiedene Wirkungsweisen ansah, hat die Mechanik glücklichweise schon längst überwunden, und wenn die Lehrbücher noch ein Capitel über sogenannte Momentankräfte enthalten, so ist es eben nur, um ihre Identität mit den stetig wirkenden nachzuweisen. Es ist klar, dass der Druck auch hier nur von den stetig wirkenden Kräften herrührt, welche zwischen den Wandmolekülen und den in jedem Augenblick in ihrer Wirkungssphäre befindlichen Gasmolekülen thätig sind, und dass der in einem beliebigen Zeitmoment stattfindende Druck ungeändert bleiben würde, wenn man sich sämmtliche Atome in ihrer augenblicklichen Lage fixirt dächte. Da sich die Gasmoleküle der Annahme zufolge grösstentheils in solchen Entfernungen befinden, in welchen sie auf einander keine Beschleunigung ausüben, so rührt die zur Gränzfläche normale Beschleunigungscomponente, welche ein Gasmolekül erfährt, das sich augenblicklich in der Wirkungssphäre der festen Wand befindet, ausschliesslich von den

*) Lamé: *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité*, §. 5.

Kräften her, die von den Molekülen der festen Wand ausgehen, oder die während des Zeitelementes dt auf dasselbe wirkende Normalcomponente dieser Kräfte ist $m\frac{d^2x}{dt^2}$. Gleich gross und entgegengesetzt ist die Summe der Wirkungen des Gasmoleküls auf die während dieses Zeitelementes in seiner Wirkungssphäre befindlichen Wandatome. Tritt also ein Gasmolekül von der Masse m zur Zeit t_0 in die Wirkungssphäre der Wand mit der zur Trennungsfläche senkrechten Geschwindigkeitscomponente $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$ ein und verlässt dieselbe zur Zeit t_1 mit der Geschwindigkeitscomponente $\left(\frac{dx}{dt}\right)_1$, so ist die Gesammtwirkung dieses Gasatoms $m\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{d^2x}{dt^2}\,dt = m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)_0\right]$.

Da die Moleküle in fortwährender Bewegung sind, so rührt der wirklich stattfindende Druck in jedem Augenblick von andern Molekülen her, die in die Wirkungssphäre eintreten, und ist in jedem Augenblick ein anderer. Bei der sehr grossen Zahl der Gasmoleküle aber, welche in jedem messbaren Zeittheil gegen jedes messbare Flächenstück der Wand stossen, behält der Druck für unsere Wahrnehmung einen constanten Mittelwerth. Die von jedem einzelnen Molekül herrührende Wirkung ist, wie aus Obigem erhellt, seiner Masse und der Aenderung seiner normalen Geschwindigkeitscomponente proportional; da aber keine Richtung bevorzugt, und da ferner die Anzahl der Gasmoleküle, welche in einer gegebenen Zeit gegen die Wand stossen, selbst der Dichtigkeit (Anzahl der in der Volumeinheit enthaltenen Gasmoleküle) und der mittleren Geschwindigkeit der Moleküle proportional ist, so resultirt daraus ein Druck auf die Wand, der proportional ist der Masse und dem Quadrat der mittleren Geschwindigkeit, d. h. der mittleren lebendigen Kraft eines Moleküls und der Zahl der in der Volumeinheit enthaltenen Moleküle. Identificirt man die mittlere lebendige Kraft eines Moleküls mit der absoluten Temperatur, so hat man das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz. Wenden wir nun die oben aus dem Satz der lebendigen Kräfte gewonnenen allgemeinen Principien auf diese specielle Hypothese an.

Das Potential jedes Moleküls auf sich selbst ist eine constante Grösse, so lange die Anordnung der Atome im Molekül unverändert bleibt; dasselbe ist Null, wenn man sich an Stelle der Moleküle einfache unausgedehnte Atome denkt, es ist aber gewiss nicht Null bei den chemisch zusammengesetzten Gasen. Das Potential der Moleküle auf einander ist, da sie sich ausserhalb ihrer gegenseitigen Wirkungssphäre befinden, bei einem idealen Gase verschwindend klein und bei den wirklichen Gasen um so kleiner, je geringer die Abweichung vom idealen Gaszustand. Kommen zwei Moleküle in ihre *gegenseitige Wirkungssphäre*, so werden ihre Geschwindigkeiten

grösser oder kleiner als vor- und nachher, je nachdem sie einander anziehen oder abstossen; in jedem Fall aber nimmt die Summe ihrer lebendigen Kräfte um eben so viel zu oder ab, als ihr Potential aufeinander. Haben sie sich wieder aus ihrer Wirkungssphäre entfernt, so ist das Potential wieder Null und die Summe der lebendigen Kräfte wieder so gross als vorher. Da die wirklichen Gase, wenn sie sich ausdehnen, ohne äussere Arbeit zu leisten, eine geringe Temperaturerniedrigung zeigen, so hat nach der Annahme die mittlere lebendige Kraft um eine geringe Grösse abgenommen, mithin ist, da die Wirkungsfunction ungeändert geblieben, auch das Potential verkleinert, d. h. die zwischen den Molekülen wirkenden Kräfte sind anziehende, bei denjenigen Entfernungen wenigstens, in welchen sie der Mehrzahl nach auf einander einwirken. Das gleiche Resultat ergiebt sich auch daraus, dass der Druck langsamer wächst, als die Dichte, indem der den Druck auf die Hülle vermindernde Einfluss der gegenseitigen Anziehung der Gasmoleküle um so mehr hervortritt, je geringer die Entfernungen derselben werden. Das Wasserstoffgas macht bekanntlich eine merkwürdige Ausnahme, indem es von dem Mariotte'schen Gesetz im entgegengesetzten Sinne abweicht, während doch nach den allerdings wohl nicht ganz sicheren Beobachtungen von Thomson und Joule bei der Expansion desselben eine geringe Abkühlung stattfindet.

Will man nach der bisher üblichen Vorstellungsweise den Druck der Gase auf ihre Hüllen durch eine gegenseitige Abstossung der Gasmoleküle erklären, so folgt daraus, dass mit der Entfernung der Gasmoleküle von einander auch das Potential der Moleküle auf einander wächst und daher bei der Expansion ohne äussere Arbeit auch die lebendige Kraft. Nachdem also die fortschreitende Bewegung des Einströmens in den leeren Raum sich in Molekularbewegung umgesetzt hätte, müsste die Temperatur des Gases höher sein, als zuvor. Diese Bemerkung ist übrigens auch von Herrn Bujs-Ballot in einer Abhandlung gemacht worden,*) die sonst an Klarheit der Auffassung manches zu wünschen übrig lässt. Insbesondere trifft dieselbe die Hypothese der Molekularwirbel von Rankine sowie das Dynamidensystem von Redtenbacher, auf welche näher einzugehen hier leider des beschränkten Raumes wegen nicht möglich ist. Bei beiden wird nämlich der Zuwachs der Temperatur dem Zuwachs der lebendigen Kraft eines Moleküls (Aetheratoms) proportional gesetzt, und dabei doch der Druck des Gases durch die gegenseitige Abstossung der Moleküle erklärt. Ist die Temperatur der lebendigen Kraft der Molekularbewegung proportional oder überhaupt eine Function derselben allein, so folgt aus den Thomson-Joule'schen Versuchen, dass die lebendige Kraft dieselbe bleibt, wenn das Gas sich ohne Aenderung der Wirkungsfunction ausdehnt. Das Potential der Gasmasse

*) *Pogg. Ann.* 1858. CIII. p. 249.

auf sich selbst ist also — unter dieser Voraussetzung — ebenfalls von der Dichtigkeit unabhängig (oder die zur Ausdehnung erforderliche innere Arbeit gleich Null) mithin ändert sich dasselbe nicht mit der gegenseitigen Entfernung der Moleküle, oder dieselben befinden sich ausserhalb ihrer gegenseitigen Wirkungssphäre. Man wird somit nothwendig auf diejenige Ansicht von der Molekularconstitution der Gase geführt, welche von Herrn Krönig und Clausius ausgeführt worden ist. Es bleibt dabei unbestimmt, ob die lebendige Kraft nur von der fortschreitenden Bewegung der Moleküle oder ausserdem von einer rotirenden oder schwingenden Bewegung der das Molekül bildenden Atome herrührt. Herr Clausius gelangt zu der letztern Ansicht,*) indem er die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle berechnet, welche erforderlich ist, um den Druck einer Atmosphäre hervorzubringen und findet, dass die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung nur etwa 0,6315 von der in der Luft enthaltenen Wärmemenge, d. h. dem Product des Arbeitsaequivalents der specifischen Wärme bei constantem Volum und der absoluten Temperatur beträgt. Dies nöthigt weiter zu der Annahme, die man schwerlich ohne Weiteres zugeben kann, dass die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung zu der der inneren Bewegung der Moleküle in einem constanten von der Temperatur, also von der Geschwindigkeit der Bewegung unabhängigen Verhältniss steht.**)

Vergleicht man die Temperaturen verschiedener Gase, so führt das Dulong-Petit'sche Gesetz, nach welchem das Product aus der specifischen Wärme und dem Atomgewicht einen für alle chemisch-einfachen Gase und wieder für alle zusammengesetzten Gase mit gleichem Condensationsverhältniss eine constante Zahl ist, zu der Annahme, dass die Temperatur der lebendigen Kraft eines Atoms (chemischen Aequivalents) proportional zu setzen ist. Man muss sich vor der Illusion hüten, damit umgekehrt das Dulong'sche Gesetz erklärt zu haben; denn es ist bis jetzt wenigstens nicht nachgewiesen worden, warum zwei Gase sich im Wärmegleichgewicht befinden, wenn die mittlere lebendige Kraft eines Atoms in

---

*) Pogg. Ann. 1857. C. p. 380.

**) Die Unabhängigkeit von der Temperatur dürfte auch Herr Hoppe schwerlich nach Grundsätzen der Wahrscheinlichkeit zugestehen (vgl. die Bemerkungen von Hoppe in Pogg. Ann. CIV. p. 285 und die Erwiderungen von Clausius Pogg. Ann. p. 257). Die Rechnung des Herrn Clausius beruht auf der Annahme, dass die Temperatur eines Gases der in ihm enthaltenen Wärmemenge proportional, oder dass die Integrationsconstante der Gleichung 9) (Pogg. Ann. C. p. 377) Null ist. Diese Annahme ist jedoch nicht gerechtfertigt, selbst wenn man die specifische Wärme c innerhalb der uns zu Gebote stehenden Temperaturgrenzen als constant betrachtet. Denn sicher wird kein Gas den gasförmigen Zustand bis in die Nähe des Nullpunkts der absoluten Temperaturscala beibehalten und im festen und flüssigen Zustand ist die specifische Wärme jedenfalls eine andre als im gasförmigen. Ich glaube nicht, dass man gegen die Hypothese von Rankine einen Vorwurf aus der von Herrn Rankine selbst gemachten Folgerung herleiten kann „dass der absolute Nullpunkt der im Gase enthaltenen Wärmemenge nicht mit dem absoluten Nullpunkt der Temperaturscala zusammenfällt.“ *(Phil. Mag. (4) II. p. 523.)*

beiden gleich gross ist.*) Bleibt man sich consequent, so wird man auch bei den festen und flüssigen Körpern, für welche das Dulong-Petit'sche Gesetz ebenfalls gilt, unter Temperatur die mittlere lebendige Kraft eines Atoms verstehen müssen. Da man aber annehmen muss, dass die Atome fester Körper um stabile Gleichgewichtslagen schwingen, so findet hier in jeder Elementarschwingung eine stetige Umsetzung von lebendiger Kraft in innere Arbeit und umgekehrt statt. Da sich die Atome in sehr vielen verschiedenen Schwingungsphasen befinden, so kann man allerdings annehmen, dass die Summe der lebendigen Kräfte der in einem endlichen Körperstück enthaltenen Atome einen constanten, von der Zeit unabhängigen, Mittelwerth haben wird. Es müsste nun wieder gezeigt werden, dass die Bedingung für das Wärmegleichgewicht zwischen zwei einander berührenden heterogenen Körpern darin besteht, dass die mittlere lebendige Kraft eines Atoms in beiden gleich gross sein muss.

Es sind gegen die Theorie der Herren Krönig und Clausius von verschiedenen Seiten Einwürfe gemacht worden, welche sich namentlich darauf beziehen, dass die Diffusion der Gase nicht, wie aus der Theorie zu folgen scheint, augenblicklich erfolgt. Herr Clausius widerlegt diesen Einwurf, indem er zeigt, dass es dem Wesen der Hypothese keineswegs widerspricht, die Zusammenstösse der Moleküle so häufig anzunehmen, dass dadurch die Langsamkeit der Diffusion hinreichend erklärt wird. Aehnliche Ansichten hat Herr Krönig in der physikalischen Gesellschaft ausgesprochen. Wenn man dadurch den Einwurf, der sich auf die Vermengung der Gase bezieht, als widerlegt betrachten darf, so gilt dies keineswegs von dem andern, dass locale Temperaturverschiedenheiten in einer Gasmasse nicht möglich wären, sondern sehr schnell eine Ausgleichung der mittleren Geschwindigkeiten durch die ganze Gasmasse stattfinden müsste. Um die wesentliche Verschiedenheit beider Punkte nachzuweisen, wählen wir, da die unregelmässige Bewegung der Gasatome der Anschauung wenig zugänglich ist, ein einfaches Analogon. Man denke sich eine Reihe gleicher vollkommen elastischer Kugeln in gleichen Abständen in einer geraden Linie aufgestellt. Theilt man der ersten eine Geschwindigkeit mit, vermöge deren sie die zweite central stösst, so wird zwar, indem die Bewegung sich durch die ganze Reihe fortpflanzt, jede Kugel ihren Ort nur um so viel verändern, als der Abstand je zweier Kugeln beträgt; die Geschwindigkeit, welche der ersten mitgetheilt wurde, wird sich aber durch die ganze Reihe ungefähr ebenso schnell fortpflanzen, als ob die erste, ohne auf ein Hinderniss zu stossen, sich weiter bewegt hätte. Fände übrigens eine solche schnelle Ausgleichung der Geschwindigkeiten durch die Gasmasse nicht statt, so würde andrerseits daraus folgen, dass ein Gas,

*) Wenn zwei elastische Kugeln zusammenstossen, deren lebendige Kräfte vor *dem Stoss gleich,* deren Massen aber ungleich sind, so findet nach dem Stoss *die Gleichheit der lebendigen* Kräfte im Allgemeinen nicht mehr statt.

welches durch einen beweglichen Stempel comprimirt wird, sich nur an der Stelle erwärmte, wo es an den Stempel grenzt. Es wäre dies ein Experimentum crucis für die Theorie.

Aus den Versuchen von Joule und Thomson ist bekannt, dass ein Gas, welches unter hohem Druck durch eine enge Oeffnung gepresst wird, sobald der Gasstrom aus dem stürmischen Bewegungszustand, welchen er beim Ausströmen angenommen hat, wieder in eine ruhige gleichförmige Bewegung übergegangen ist, seine ursprüngliche Temperatur fast genau, oder unter Voraussetzung eines idealen Gases, vollkommen genau wieder erlangt hat. Dies steht vollkommen in Einklang mit der Theorie, denn nach dieser besteht das Ausströmen des Gases aus der Oeffnung eben nur darin, dass durch dieselbe von der Seite her, wo die Dichtigkeit am grössten ist, nach der andern Seite mehr Atome passiren, als in entgegengesetzter Richtung, ohne dass sie dabei ihre mittlere Geschwindigkeit ändern. Gegen ein dicht vor der Oeffnung stehendes Thermometer würden also nur von einer Seite mehr Atome, aber mit derselben mittleren lebendigen Kraft stossen, als von der andern Seite. Nun zeigt aber die Beobachtung, dass das Thermometer eine bedeutend niedrigere Temperatur angiebt, wenn es dicht vor die Oeffnung in den Gasstrom gebracht wird, dass also in der That eine Umsetzung von Wärme in fortschreitende Bewegung und wieder von fortschreitender Bewegung in Wärme stattfindet. Dasselbe beweist der Versuch, welcher schon von Gay-Lussac*) angestellt und später unter dem Namen des Joule'schen Fundamentalversuchs bekannt geworden ist. Wenn nämlich ein mit Luft gefülltes Gefäss mit einem gleich grossen luftleeren plötzlich in Verbindung gesetzt wird, so zeigt nach Ausgleichung des Druckes die Luft im ersten Gefäss eine Temperaturerniedrigung, im zweiten eine gleich grosse Temperaturerhöhung. Von einer solchen Umsetzung der Wärme des Gases in fortschreitende Bewegung und umgekehrt vermag aber die fragliche Theorie keine Rechenschaft zu geben, wie sie sich überhaupt in der Verlegenheit befindet, die Wärmebewegung von der fortschreitenden nicht unterscheiden zu können. Letztere besteht nämlich nach derselben nur darin, dass entweder die Anzahl oder die Geschwindigkeit der nach einer Richtung bewegten Gasmoleküle grösser ist, als nach der entgegengesetzten; ersteres würde im oben erwähnten Beispiel des Ausströmens aus einer Oeffnung der Fall sein, letzteres wenn man einer Gasmasse mit ihrer Hülle eine gleichförmige fortschreitende Bewegung mittheilte. Im letzteren Fall kann man sich — um sehr paradoxe Consequenzen, die leicht in die Augen fallen, zu vermeiden — dadurch helfen, dass man die Geschwindigkeit relativ gegen die mitbewegte Hülle nimmt; wie man aber die Erscheinungen beim Ausströmen des Gases mit der Theorie in Einklang bringen will, ist nicht abzusehen.

*) Gilberts *Annalen, Band XXX. p.* 249.

Schliesslich erwähne ich noch einer Schwierigkeit, ohne des leider beschränkten Raumes wegen näher auf ihre Discussion eingehen zu können, nämlich der von mehreren Seiten*) in Anregung gebrachten Frage, ob die Gesetze der Schallbewegung aus der Theorie von Krönig und Clausius herzuleiten seien. Herr Helmholtz scheint es für möglich zu halten, wenn man die Hypothese in der Weise auffasst, wie es von Clausius in seiner neueren Abhandlung geschehen ist. Es ist mir dies aber mehr als zweifelhaft, wenigstens verliert die Herleitung der Differentialgleichungen der Schallbewegung, wie sie in der Hydrodynamik gegeben wird, jeden Halt, da ein Gas nur einen Druck ausübt, wo es an eine feste Wand grenzt, von einem Druck der Gastheile gegen einander aber, in dem Sinne, wie er in der Aërostatik aufgefasst wird, durchaus nicht die Rede sein kann. Da immer nur von mittleren Geschwindigkeiten die Rede ist, und die Wege und Geschwindigkeit der einzelnen Atome, wie sich Hoppe ausdrückt, gar nicht controlirt werden können, so scheint mir eine regelmässige Fortpflanzung einer Schallwelle überhaupt nicht möglich zu sein.

Die Resultate der vorstehenden Betrachtungen lassen sich kurz in folgenden Sätzen zusammenfassen:

1. Wenn man annimmt, dass die in einem Körper enthaltene Wärmemenge der lebendigen Kraft seiner Moleküle proportional und dass die Temperatur eine Function der lebendigen Kraft allein ist, so wird man durch die an Gasen zu beobachtenden Thatsachen mit Nothwendigkeit auf die von Krönig und Clausius ausgeführte Ansicht über die Molekularconstitution der Gase geführt.

2. Diese Hypothese ist bis jetzt mindestens noch den Nachweis schuldig, warum die Bedingung des Wärmegleichgewichts zwischen zwei heterogenen Körpern darin besteht, dass die mittlere lebendige Kraft eines (chemischen) Atoms in beiden Körpern gleich gross ist.

3. Man stösst bei dieser Hypothese auf die Schwierigkeit, dass die Wärmebewegung von der fortschreitenden Bewegung einer Gasmasse überhaupt nicht zu unterscheiden ist; dieselbe führt bei der Ausströmung eines Gases in einen luftleeren oder luftverdünnten Raum zu Consequenzen, welche mit der Erfahrung im Widerspruch stehen.

4. Die Argumente, durch welche Herr Clausius gewisse gegen die Hypothese gerichtete Einwürfe zu widerlegen gesucht hat, erreichen diesen Zweck nur theilweise. Insbesondere treffen sie nicht den Einwand, dass locale Temperaturverschiedenheiten in einem luftförmigen Medium sich in ausserordentlich kurzer Zeit ausgleichen müssten.

5. Die Hypothese ist ferner nicht im Stande, über die Gesetze der Fortpflanzung des Schalls in luftförmigen Medien genügende Rechenschaft zu geben.

*) *z. B. von* Helmholtz: Die Fortschritte der Physik im Jahre 1856, *dargestellt von der physikalischen* Gesellschaft, p. 354.

6. Aus alledem ergiebt sich die Folgerung, dass es wenigstens vor der Hand noch ungerechtfertigt ist, die in einem Körper enthaltene Wärmemenge ohne Weiteres, wie es zu geschehen pflegt, mit der lebendigen Kraft der Molekularbewegung zu identificiren oder die Temperatur der lebendigen Kraft eines Atoms proportional zu setzen.

Ueberhaupt ist es der Natur der mechanischen Wärmetheorie nach misslich, von der „in einem Körper enthaltenen" Wärmemenge zu reden. Versteht man darunter die lebendige Kraft der Molekularbewegung, so muss man mit Rankine zwischen wahrer und scheinbarer Wärmecapacität unterscheiden. Erstere ist der Quotient der lebendigen Kraft der in der Masseneinheit enthaltenen Atome durch die Temperatur, welche für jeden Körper einen constanten Werth hat. In der That aber können wir immer nur die scheinbare specifische Wärme, nämlich den Differentialquotienten der Wirkungsfunction in Beziehung auf die Temperatur, bestimmen, da man nie wissen kann, wie viel von der einem Körper zugeführten Wärme zur inneren Arbeit (Verminderung des Potentials) und wie viel zur Vermehrung der lebendigen Kraft verbraucht wird. Die von Helmholtz (Fortschritte der Physik f. 1851, 1851 p. 568) mit sehr richtigem Takt adoptirte Definition der in einem Körper enthaltenen Wärmemenge, ist mit dem Wärmeäquivalent der Wirkungsfunction identisch. Um alle Zweideutigkeiten zu vermeiden, wäre es das Beste, überhaupt nicht mehr von der in einem Körper enthaltenen Wärmemenge, sondern nur von seiner Wirkungsfunction zu reden.

Jedenfalls ist durch die mechanische Wärmetheorie selbst die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass die Temperaturverschiedenheiten überhaupt nur auf einer Verschiedenheit des Potentials (verschiedenen Anordnung der Atome) beruhten und es wäre vielleicht nicht unangemessen, der gangbaren Auffassung der mechanischen Wärmetheorie gegenüber auch einmal einen Versuch in dieser Richtung zu machen. Bemerkenswerth sind die Andeutungen, welche Herr Koosen hierzu in seiner Abhandlung über die Gesetze der Elasticität homogener Körper (Pogg. Ann. CI. 401) gegeben hat, wiewohl man sich den dort ausgesprochenen Ansichten schwerlich ohne Weiteres anschliessen wird.

Kleinere Mittheilungen.

XI. Gelegentliche Bemerkung über unendliche Reihen. Bekanntlich hat zuerst Lejeune Dirichlet bemerkt, dass bei einer unendlichen Reihe aus dem Verschwinden ihrer einzelnen Glieder nicht auf das Verschwinden der Reihensumme geschlossen werden darf; — vielleicht sind ein paar erläuternde Worte zu dem von Dirichlet gegebenen Beispiele, sowie die Mittheilung weiterer Fälle der Art den Lehrern der Analysis nicht unwillkommen.

Dass die Summe $f(\varrho)$ der Reihe

$$1) \qquad f(\varrho) = \frac{\varrho}{1^{1+\varrho}} + \frac{\varrho}{2^{1+\varrho}} + \frac{\varrho}{3^{1+\varrho}} + \cdots$$

für $\varrho = 0$ nicht nothwendig Null zu sein braucht, obschon jedes einzelne Glied bei jenem Werthe verschwindet, kann man schon ersehen, wenn man der obigen Gleichung die Form

$$f(\varrho) = \varrho\left(\frac{1}{1^{1+\varrho}} + \frac{1}{2^{1+\varrho}} + \frac{1}{3^{1+\varrho}} + \cdots\right)$$

ertheilt; es wird dann $f(0) = 0 \cdot \infty$, also nicht unzweifelhaft $= 0$. Will man den Betrag von $f(0)$ auf elementarem Wege finden, so bedarf es nur der Bemerkung, dass

$$f(\varrho) - \frac{2}{2^{1+\varrho}} f(\varrho) = \frac{\varrho}{1^{1+\varrho}} - \frac{\varrho}{2^{1+\varrho}} + \frac{\varrho}{3^{1+\varrho}} - \cdots$$

ist, woraus folgt

$$f(\varrho) = \frac{2^\varrho}{\frac{2^\varrho - 1}{\varrho}}\left(\frac{1}{1^{1+\varrho}} - \frac{1}{2^{1+\varrho}} + \frac{1}{3^{1+\varrho}} - \cdots\right),$$

mithin

$$f(0) = \frac{1}{l2}\left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots\right) = 1.$$

Um für sehr kleine ϱ den Werth von $f(\varrho)$ mit grosser Genauigkeit zu ermitteln, ist es am besten, die Reihe in zwei Theile zu zerlegen, nämlich

$$f(\varrho)=\varrho\left[\frac{1}{1^{1+\varrho}}+\frac{1}{2^{1+\varrho}}+\cdots+\frac{1}{(k-1)^{1+\varrho}}\right]$$
$$+\varrho\left[\frac{1}{k^{1+\varrho}}+\frac{1}{(k+1)^{1+\varrho}}+\frac{1}{(k+2)^{1+\varrho}}+\cdots\right],$$

den ersten Theil direct numerisch zu berechnen und den zweiten in eine andere stärker convergirende Reihe umzusetzen. Man hat nun

$$\frac{1}{k^{1+\varrho}}=\frac{1}{\Gamma(1+\varrho)}\int_0^\infty u^{\varrho}\,e^{-ku}\,du,$$

mithin

$$\frac{1}{k^{1+\varrho}}+\frac{1}{(k+1)^{1+\varrho}}+\frac{1}{(k+2)^{1+\varrho}}+\cdots$$
$$=\frac{1}{\Gamma(1+\varrho)}\int_0^\infty \frac{u\,e^u}{e^u-1}\,u^{\varrho-1}\,e^{-ku}\,du;$$

andererseits ist nach einem sehr bekannten Satze

$$\frac{ue^u}{e^u-1}=u+\frac{u}{e^u-1}$$
$$=1+\tfrac{1}{2}u+\frac{B_1}{1.2}u^2-\frac{B_3}{1.2.3.4}u^4+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{B_{2n-1}}{1.2\ldots(2n)}u^{2n}$$
$$+(-1)^n\frac{\vartheta\,B_{2n+1}}{1.2\ldots(2n+2)}u^{2n+2},$$

worin B_1, B_3 etc. die Bernoulli'schen Zahlen bedeuten und ϑ zwischen 0 und 1 liegt; nach Substitution dieses Ausdrucks lassen sich die einzelnen Glieder leicht integriren, so dass man erhält

$$\frac{1}{k^{1+\varrho}}+\frac{1}{(k+1)^{1+\varrho}}+\frac{1}{(k+2)^{1+\varrho}}+\cdots\cdots$$
$$=\frac{1}{\Gamma(1+\varrho)}\left[\frac{\Gamma(\varrho)}{k^{\varrho}}+\tfrac{1}{2}\,\frac{\Gamma(\varrho+1)}{k^{\varrho+1}}+\frac{B_1}{1.2}\,\frac{\Gamma(\varrho+2)}{k^{\varrho+2}}-\cdots\right.$$
$$\left.+(-1)^{n-1}\frac{B_{2n-1}}{1.2\ldots(2n)}\,\frac{\Gamma(\varrho+2n)}{k^{\varrho+2n}}+(-1)^nR\right],$$

$$R=\frac{B_{2n+1}}{1.2\ldots(2n+2)}\int_0^\infty \vartheta\,u^{\varrho+2n+1}\,e^{-ku}\,du.$$

Setzt man für ϑ seinen kleinsten und grössten Werth, so liegt R zwischen 0 und

$$\frac{B_{2n+1}}{1.2\ldots(2n+2)}\int_0^\infty u^{\varrho+2n+1}\,e^{-ku}\,du=\frac{B_{2n+1}}{1.2\ldots(2n+2)}\,\frac{\Gamma(\varrho+2n+2)}{k^{\varrho+2n+2}}.$$

Der Rest beträgt also einen Bruchtheil desjenigen Gliedes, das bei weiterer Fortsetzung der Reihe folgen würde. Wir multipliciren beide Seiten der vorigen Gleichung mit ϱ, substituiren

$$\Gamma(\varrho+1)=\varrho\,\Gamma(\varrho),\quad \Gamma(\varrho+2)=\varrho\,(\varrho+1)\,\Gamma(\varrho),$$

setzen zur Abkürzung

$$\varrho_2 = \frac{\varrho(\varrho+1)}{1.2}, \quad \varrho_3 = \frac{\varrho(\varrho+1)(\varrho+2)}{1.2.3}, \ldots$$

und erhalten nunmehr folgendes Resultat:

$$2)\left\{\begin{aligned} f(\varrho) = \varrho &\left[\frac{1}{1^{1+\varrho}} + \frac{1}{2^{1+\varrho}} + \frac{1}{3^{1+\varrho}} + \ldots + \frac{1}{(k-1)^{1+\varrho}}\right] \\ &+ \frac{1}{k^\varrho}\left[1 + \tfrac{1}{2}\varrho + \frac{B_1 \varrho_2}{k^2} - \frac{B_3 \varrho_4}{k^4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{B_{2n-1}\varrho_{2n}}{k^{2n}}\right. \\ &\left. + (-1)^n \frac{\Theta B_{2n+1}\varrho_{2n+1}}{k^{2n+2}}\right], \end{aligned}\right.$$

worin Θ einen nicht näher bestimmten positiven ächten Bruch bezeichnet. Nimmt man $k = 10$, so wird

$$3)\left\{\begin{aligned} f(\varrho) = \varrho &\left[\frac{1}{1^{1+\varrho}} + \frac{1}{2^{1+\varrho}} + \ldots + \frac{1}{9^{1+\varrho}}\right] \\ &+ \frac{1}{10^\varrho}\left[1 + \tfrac{1}{2}\varrho + \frac{\varrho_2}{600} - \frac{\varrho_4}{300000} + \frac{\varrho_6}{42000000} - \ldots\right] \end{aligned}\right.$$

und der Rest beträgt jedesmal einen Bruchtheil des folgenden Gliedes; diese Formel gewährt eine ansehnliche Genauigkeit *).

Aus dem Dirichlet'schen Satze folgt z. B., dass die Reihensumme

$$\varphi(x) = \frac{\sin x}{1^x} + \frac{\sin \frac{1}{2}x}{2^x} + \frac{\sin \frac{1}{3}x}{3^x} + \ldots$$

für $x = 0$ nicht verschwindet. Es ist nämlich, wenn z einen Bogen des ersten Quadranten bezeichnet,

$$z > \sin z > z - \tfrac{1}{6}z^3,$$

mithin liegt $\varphi(x)$ zwischen den Grössen

$$\frac{x}{1^{x+1}} + \frac{x}{2^{x+1}} + \frac{x}{3^{x+1}} + \ldots$$

und

$$\frac{x}{1^{x+1}} + \frac{x}{2^{x+1}} + \ldots - \tfrac{1}{6}x^3\left(\frac{1}{1^{x+3}} + \frac{1}{2^{x+3}} + \ldots\right);$$

beide nähern sich der gemeinschaftlichen Grenze 1, mithin ist $\varphi(0) = 1$.

Eine andere hierher gehörende Reihensumme ist

$$4)\qquad \psi(x) = \frac{x}{(1+x)^2} + \frac{x}{(1+2x)^2} + \frac{x}{(1+3x)^2} + \ldots$$

die Reihe convergirt für alle positiven x; für $x = 0$ verschwindet jedes einzelne Glied derselben, da aber

$$\psi(x) = x\left[\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+2x)^2} + \frac{1}{(1+3x)^2} + \ldots\right],$$

wird $\psi(0) = 0 . \infty$, also unbestimmt. Dass in der That $\psi(0)$ nicht den Werth Null hat, kann man auf folgende Weise sehen. Es ist

---

*) Dirichlet benutzt in der Hauptsache dasselbe Verfahren, entwickelt aber *nur das erste Glied* der zweiten Reihe (s. Crelle's Journal, Bd. 19 S. 326).

$$\psi(x)-\psi(2x)=\frac{x}{(1+x)^2}-\frac{x}{(1+2x)^2}+\frac{x}{(1+3x)^2}-\dots$$
$$=\frac{2x^2+3x^3}{(1+x)^2(1+2x)^2}+\frac{2x^2+5x^3}{(1+3x)^2(1+4x)^2}+\dots,$$

mithin $\psi(x)-\psi(2x)$ eine positive Grösse oder

$$\psi(2x)<\psi(x).$$

Hieraus folgt für $x=\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16}$ etc.

$$\psi(1)<\psi(\tfrac{1}{2})<\psi(\tfrac{1}{4})<\psi(\tfrac{1}{8})\dots<\psi(0),$$

mithin beträgt $\psi(0)$ mehr als $\psi(1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\dots=0,644934$; überhaupt zeigt sich, dass $\psi(x)$ wächst, wenn x abnimmt.

Um $\psi(x)$ für ein der Null nahe kommendes x mit grosser Genauigkeit berechnen zu können, benutzen wir ein ähnliches Verfahren wie vorhin. Mit Hilfe der Formel

$$\frac{1}{(1+nx)^2}=\int_0^\infty u\,e^{-(1+nx)u}\,du$$

erhalten wir zunächst

$$\psi(x)=\int_0^\infty \frac{xu}{e^{xu}-1}\,e^{-u}\,du$$

und setzen hierin

$$\frac{xu}{e^{xu}-1}=1-\tfrac{1}{2}xu+\frac{B_1}{1.2}x^2u^2-\frac{B_3}{1.2.3.4}x^4u^4-\dots$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{B_{2n-1}}{1\dots(2n)}x^{2n}.u^{2n}+(-1)^n\frac{\vartheta B_{2n+1}}{1\dots(2n+2)}x^{2n+2}u^{2n+2}.$$

Nach Ausführung dieser Integrationen findet sich

$$5)\quad \psi(x)=1-\tfrac{1}{2}x+B_1x^2-B_3x^4+\dots+(-1)^{n-1}B_{2n-1}x^{2n}$$
$$+(-1)^n\,\Theta B_{2n+1}x^{2n+2},$$

worin Θ wieder einen positiven ächten Bruch bezeichnet. Die vorstehende Gleichung ist bei kleinen x, wie z. B. $x=0,01$, sehr bequem zur Berechnung von $\psi(x)$; zugleich ersieht man, dass $\psi(0)=1$ ist.

Da die Bernoulli'schen Zahlen zwar anfangs abnehmen, später aber rascher als eine geometrische Progression wachsen, so convergirt die vorstehende Reihe nur im Anfange und würde divergent werden, wenn man sie ins Unendliche fortsetzen wollte. Man kann aber auch eine jederzeit convergirende Reihe für $\psi(x)$ finden. Mittelst der Substitution

$$1-e^{-xu}=v,\quad xe^{-xu}=dv,$$
$$e^{-u}=(1-v)^{\frac{1}{x}},\quad u=\frac{1}{x}\,l\left(\frac{1}{1-v}\right)$$

erhält man nämlich

$$\psi(x)=\frac{1}{x}\int_0^1\frac{1}{v}\,l\left(\frac{1}{1-v}\right).(1-v)^{\frac{1}{x}}\,dv;$$

hier lässt sich der Logarithmus nach steigenden Potenzen von v entwickeln und nachher jedes einzelne Glied mittelst der Formel

$$\int_0^1 v^n (1-v)^a \, dv = \frac{1.2.3\ldots n}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n+1)}$$

integriren. Damit gelangt man zu dem Resultate

$$6)\quad \psi(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\,\frac{1.x}{(1+x)(1+2x)} + \frac{1}{3}\,\frac{1.2.x^2}{(1+x)(1+2x)(1+3x)} + \ldots$$

wobei die Reihe für alle positiven x convergirt; für $x=0$ wird wieder $\psi(0)=1$.

Eine ganz ähnliche Behandlung gestattet die allgemeinere Function

$$7)\quad F(x,\varrho) = \frac{x\varrho}{(1+x)^{1+\varrho}} + \frac{x\varrho}{(1+2x)^{1+\varrho}} + \frac{x\varrho}{(1+3x)^{1+\varrho}} + \ldots;$$

man findet dafür leicht die halbconvergirende Reihe

$$8)\quad F(x,\varrho) = 1 - \tfrac{1}{2}\varrho x + B_1 \varrho_2 x^2 - B_3 \varrho_4 x^4 + \ldots,$$

worin ϱ_2, ϱ_4 etc. die frühere Bedeutung haben und der jedesmalige Rest einen Bruchtheil desjenigen Gliedes ausmacht, das bei weiterer Fortsetzung der Reihe folgen würde.

Die Function $F(x,\varrho)$ besitzt die besprochene Eigenschaft zweimal; sowohl für $x=0$ als für $\varrho=0$ verschwindet jedes einzelne Glied der Reihe, aber in keinem der beiden Fälle wird $F(x,\varrho)=0$, vielmehr ist $F(0,\varrho)=F(x,0)=1$. Nimmt man $x=\frac{1}{k}$, so kommt man auf eines der früheren Resultate zurück.

SCHLÖMILCH.

XII. Wiederholung, Interpolation und Inversion einer Function unter gemeinschaftlicher Form. Von Dr. R. HOPPE, Privatdocent in Berlin.

Die $n$mal wiederholte Function $\varphi(x)$, d. i. das Resultat einer $n$maligen Substitution von $\varphi(x)$ für x, sei bezeichnet durch $\varphi^n(x)$, so dass $\varphi^0(x)=x$, $\varphi^1(x)=\varphi(x)$, $\varphi^{n+1}(x)=\varphi^n[\varphi(x)]$. Dem entsprechend kann man die $m$theilige Interpolation, d. i. diejenige Function, welche $m$mal wiederholt $\varphi^n(x)$ giebt, durch $\varphi^{\frac{n}{m}}(x)$ und die inverse Function von $\varphi^n(x)$ durch $\varphi^{-n}(x)$ bezeichnen. Eine Function, deren Wiederholung, Interpolation und Inversion einen gemeinschaftlichen independenten Ausdruck hat, der demnach $\varphi^n(x)$ für positive und negative, ganze und gebrochene n darstellt, ist

$$1)\quad \varphi(x) = \frac{a+bx}{c+dx}.$$

Die genannte Beziehung zwischen den drei Arten von Functionsbildung ist offenbar eine allgemein giltige und beschränkt sich nicht auf Fälle,

wo sich deren Resultate algebraisch darstellen lassen; doch ist vielleicht die Aufstellung eines solchen Falles um so mehr von Interesse.

Zunächst bemerkt man, dass bei der Wiederholung nicht nur die Functionsform, sondern auch die Constanten a, d und $b-c$ unverändert bleiben, was sich sogleich bestätigen wird. Man kann daher setzen

$$2)\qquad \varphi^n(x) = \frac{a + (r_n + \alpha)x}{r_n - \alpha + dx},$$

wo $b = r_1 + \alpha$, $c = r_1 - \alpha$ zu setzen ist. Hieraus geht durch Substitution von $\varphi(x)$ für x hervor:

$$\varphi^{n+1}(x) = \frac{a + \left(\frac{ad + \alpha^2 + r_n r_1}{r_n + r_1} + \alpha\right)x}{\frac{ad + \alpha^2 + r_n r_1}{r_n + r_1} - \alpha + dx},$$

wodurch die obige Bemerkung bewiesen und zugleich zur Berechnung der r die Relation

$$r_{n+1} = \frac{ad + \alpha^2 + r_n r_1}{r_n + r_1}$$

gewonnen ist. Es sei

$$ad + \alpha^2 = \beta^2; \quad r_n = \beta\frac{1 + z_n}{1 - z_n}.$$

Dies in die vorige Gleichung eingeführt giebt

$$\frac{1 + z_{n+1}}{1 - z_{n+1}} = \frac{1 + z_n z_1}{1 - z_n z_1},$$

woraus

$$z_{n+1} = z_n z_1,$$

folglich, wenn $z_1 = z$,

$$z_n = z^n.$$

Setzt man, da eine der Constanten a, b, c, d willkührlich ist, $d = 1$, so geht Gleichung 2) über in

$$3)\qquad \varphi^n(x) = \frac{\beta^2 - \alpha^2 + \left(\beta\frac{1 + z^n}{1 - z^n} + \alpha\right)x}{\beta\frac{1 + z^n}{1 - z^n} - \alpha + x},$$

wo α, β, z keiner Relation unterworfen, also entweder beliebig gegeben, oder durch die Gleichungen

$$\alpha = \frac{b - c}{2d}, \quad \beta = \sqrt{\frac{a}{d} + \alpha^2}, \quad z = \frac{b + c - 2\beta d}{b + c + 2\beta d}$$

aus den gegebenen Grössen a, b, c, d abgeleitet sind.

Soll nun umgekehrt $\varphi(x)$ aus $\varphi^n(x)$ gefunden werden, so ist z^n, wie vorher z, als gegeben zu betrachten und z geht daraus durch Wurzelausziehung hervor. Die Interpolation wird demnach durch Division des Exponenten von z vollzogen, oder, was dasselbe ist, die Gleichung 3) gilt noch für gebrochene *Werthe von n.*

Ist m der Nenner des Exponenten, also $m-1$ die Anzahl der zwischen x und $\varphi^n(x)$ interpolirten Functionen, so hat $z^{\frac{n}{m}}$, mithin auch $\varphi^{\frac{n}{m}}(x)$, m verschiedene Werthe, zu deren Beurtheilung drei Fälle unterschieden werden müssen.

1) z ist reell und positiv, wenn

$$-\left(\frac{b-c}{2}\right)^2 < ad < bc$$

ist. Hier hat $z^{\frac{n}{m}}$, mithin auch $\varphi^{\frac{n}{m}}(x)$, jederzeit einen, für gerade m zwei reelle Werthe. Betrachtet man nur den positiven Werth der Potenz als giltig, so wird $\varphi^n(x)$ eine einförmige stetige Function von n.

2) z ist reell und negativ, wenn

$$ad > bc$$

ist. Hier hat $z^{\frac{n}{m}}$, mithin auch $\varphi^{\frac{n}{m}}(x)$, nur für ungerade m einen reellen Werth und $\varphi^n(x)$ kann als reelle Grösse nicht mit n stetig variiren.

3) z ist imaginär und hat den Modul 1, wenn

$$ad < -\left(\frac{b-c}{2}\right)^2$$

ist. Setzt man in diesem Falle $i\beta$ statt β

$$z = e^{2i\vartheta}$$

so geht Gleichung 3) über in

$$4)\qquad \varphi^n(x) = \frac{-\alpha^2 - \beta^2 + [\beta \cot n(\vartheta + k\pi) + \alpha]\, x}{\beta \cot n(\vartheta + k\pi) - \alpha + x},$$

wo k eine beliebige ganze Zahl und

$$\alpha = \frac{b-c}{2d}, \quad \beta = \sqrt{-\frac{a}{d} - \alpha^2}, \quad \operatorname{tang} \vartheta = \frac{2\beta d}{b+c}$$

ist. Ist hier n ein Bruch vom Nenner m, so hat $\varphi^n(x)$ m verschiedene reelle Werthe, entsprechend $k = 0, 1, 2 \ldots, m-1$. Bei stetig variirendem n wird also $\varphi^n(x)$ eine unendlich vielförmige stetige Function von n, deren unendlich viele, den einzelnen k entsprechende Zweige für jedes ganze n in einen Werth zusammenlaufen, während sie sich für jedes rational gebrochene n in eine dem Nenner gleiche Anzahl von Werthen vereinigen.

Löst man ferner Gleichung 3) und 4) nach x auf, so kommt

$$x = \frac{\beta^2 - \alpha^2 + \left(\beta \frac{1+z^{-n}}{1-z^{-n}} + \alpha\right) \varphi^n(x)}{\beta \frac{1+z^{-n}}{1-z^{-n}} - \alpha + \varphi^n(x)},$$

$$x = \frac{-\alpha^2 - \beta^2 + [-\beta \cot n(\vartheta + k\pi) + \alpha]\, \varphi^n(x)}{-\beta \cot n(\vartheta + k\pi) - \alpha + \varphi^n(x)}.$$

Da $\varphi^n[\varphi^{-n}(x)] = \varphi^0(x) = x$ ist, so gehen diese zwei Gleichungen nach *Substitution von* $\varphi^{-n}(x)$ für x in die Gleichungen 3) und 4) mit vertausch-

tem Vorzeichen von n über. Folglich gelten beide für positive und negative, ganze und gebrochene Werthe von n, und jede von ihnen enthält unter gemeinschaftlicher Form das Resultat jeder Wiederholung, Interpolation und Inversion.

Nur im letzten der oben genannten Fälle, d. i. für imaginäre z (eine specielle Ausnahme ungerechnet), wird $\varphi^n(x)$ periodische Function von n, indem sie für

$$n = \frac{m\pi}{\vartheta + k\pi},$$

wo m beliebige ganze Zahl, in ihren Anfangswerth x übergeht. Wird also eine Function von der Form 1) verlangt, welche nach je n Wiederholungen wieder $= x$ wird, so erhält man unmittelbar aus Gleichung 4) die folgende allgemeinste Lösung:

$$\varphi(x) = \frac{-\alpha^2 - \beta^2 + \left(\beta \cot \frac{m\pi}{n} + \alpha\right) x}{\beta \cot \frac{m\pi}{n} - \alpha + x},$$

wo α und β willkürlich und m eine beliebige ganze Zahl ist, die jedoch relative Primzahl zu n sein muss, wenn die Periode nicht in kleinere Perioden zerfallen soll, und deren Werthe sich überdies auf das Intervall von 1 bis $n-1$ beschränken lassen. Insofern für $n = 2$, wo β nicht im Ausdruck vorkommt, β^2 auch negativ sein kann, giebt auch der zweite der drei Fälle hier eine Lösung.

XIII. Ueber einige bei trigonometrischen Messungen vorkommende Aufgaben. Von Dr. A. Winckler in Gratz. Den im zweiten Bande dieser Zeitschrift, Seite 334, erörterten Aufgaben über das Centriren der Winkel und das Höhenmessen füge ich im Folgenden einige weitere hinzu, welche, meines Wissens neu, vermöge der einfachen Lösung, deren sie fähig sind, und wegen des Nutzens, welchen sie in praktischen Fällen mir gewährten, von Seiten der Geometer einige Beachtung zu verdienen scheinen. Die Lösung derselben habe ich auf einen bekannten Satz gegründet, der, wie sich bei einer grossen Anzahl von Fällen zeigen lässt, in durchaus gleichförmiger Weise für Aufgaben, welche nur eine Auflösung zulassen, die vortheilhafteste Berechnung der Winkel, nämlich durch deren Tangenten, und in der bequemsten Form vermittelst Logarithmen liefert.

Dieser Satz besteht einfach darin, dass mit der trigonometrischen Gleichung

$$\frac{\sin P}{\sin Q} = \tan \varphi$$

gleichzeitig *auch die folgende*

$$tang \frac{P-Q}{2} \, cotg \frac{P+Q}{2} = tang(\varphi - 45^0) = -cotg(\varphi + 45^0)$$

stattfindet, dass also die Winkel P und Q gefunden werden können, wenn ausser jener Gleichung und ausser dem Werthe von φ entweder noch die Summe $P+Q$ oder die Differenz $P-Q$ gegeben ist.

1.

Die Auflösung der Pothenot'schen Aufgabe in einer Form, welche von der gewöhnlichen abweicht, möge als erste Anwendung des soeben bezeichneten Satzes dienen.

Die gegenseitige Lage dreier Punkte A, B, C (Fig. 1, Taf. II.) ist durch die auf einen derselben, C, bezogenen Azimuthe α, β und Distanzen a, b gegeben. Man soll die Lage eines vierten Punktes O durch die auf ihn bezogenen Azimuthe und Distanzen der gegebenen Punkte bestimmen, wenn von O aus nur die Winkel $AOB = \lambda$, $BOC = \mu$ gemessen worden sind.

Es seien von O aus gesehen die Azimuthe der Punkte A, B, C, resp. α', β', γ' und die Distanzen jener Punkte von O, nämlich $AO = a'$, $BO = b'$, $CO = c'$.

Setzt man

$$\alpha' - \alpha = P, \quad \beta' - \beta = Q,$$

so ist

$$P - Q = (\alpha' - \beta') - (\alpha - \beta) = -(\alpha - \beta + \lambda)$$

und man findet für die Dreiecke ACO und BCO die Proportionen:

$$\frac{a}{c'} = \frac{sin(\alpha' - \alpha)}{sin \lambda}, \quad \frac{b}{c'} = \frac{sin(\beta' - \beta)}{sin \mu},$$

woraus folgt:

$$\frac{sin(\alpha' - \alpha)}{sin(\beta' - \beta)} = \frac{b}{a} \frac{sin \lambda}{sin \mu}.$$

Wenn man also aus der Gleichung

$$tang \, \varphi = \frac{b}{a} \frac{sin \lambda}{sin \mu}$$

den Winkel berechnet, so kann man aus der Relation

$$\frac{sin P}{sin Q} = tang \, \varphi,$$

welche sich durch

$$tang \frac{P+Q}{2} = tang \frac{\alpha - \beta + \lambda}{2} \, tang(\varphi - 45^0)$$

ersetzen lässt, und aus

$$\frac{P-Q}{2} = -\frac{\alpha - \beta + \lambda}{2}$$

die Winkel P und Q finden. Zur Verification dieser Bestimmung und zugleich zur Bestimmung von c', b', a' dienen dann sofort die Gleichungen:

$$c' = a\frac{\sin P}{\sin\lambda} = b\frac{\sin Q}{\sin\mu},$$

$$b' = b\frac{\sin(Q+\mu)}{\sin\mu},$$

$$a' = a\frac{\sin(P+\lambda+\mu)}{\sin(\lambda+\mu)},$$

$$\alpha' = P+\alpha,\quad \beta' = Q+\beta,\quad \gamma' = \beta'+\mu.$$

Wie man bemerkt, ist in der hier gewählten Form die Lösung der Aufgabe ebenso einfach als in der gewöhnlichen und beträchtlich einfacher als die Bestimmung des vierten Punktes aus den rechtwinkeligen Coordinaten der Punkte A, B, C gemäss den zuerst von Bessel aufgestellten Formeln.

2.

Wenn von dem zu bestimmenden vierten Punkte D (Fig. 2, Taf. II.) aus keine Winkelmessung möglich ist, dafür aber auf den Punkten A und B die Winkel $CAD = \alpha$, $CBD = \beta$ gemessen werden können, so hat man es mit einer der Pothenot'schen ganz ähnlichen Aufgabe zu thun, deren bequemste Lösung auf die folgende Art erhalten wird.

Es seien P und Q die beiden Winkel am vierten Punkte und

$$CD = s,$$

so ergeben sich die Proportionen:

$$\frac{s}{a} = \frac{\sin\alpha}{\sin P},\quad \frac{s}{b} = \frac{\sin\beta}{\sin Q},$$

aus welchen die Gleichung

$$\frac{\sin P}{\sin Q} = \frac{b}{a}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

folgt. Setzt man nun

$$\tang\varphi = \frac{b}{a}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

berechnet hieraus den Winkel φ und bemerkt, dass

$$\frac{P+Q}{2} = 180 - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2},$$

so liefert diese Gleichung in Verbindung mit der folgenden

$$\tang\frac{P-Q}{2} = \tang\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\tang(45^0-\varphi)$$

die Werthe von P und Q, und für die Richtigkeit der Rechnung liefern, nebst dem Werthe von s, die Gleichungen

$$s = a\frac{\sin\alpha}{\sin P} = b\frac{\sin\beta}{\sin Q}$$

die Probe.

3.

Zur Bestimmung der gegenseitigen Lage dreier Punkte A, B, C (Fig. 3, Taf. II.), wovon der letztere durchaus unzugängig und auf dem Terrain

überhaupt nur durch die Richtungen AA' und BB' bestimmt ist, konnten nur zwei Stücke der Seiten des Dreiecks ABC, nämlich

$$AA' = a, \quad BB' = a',$$

direct gemessen werden. Es fanden sich aber zwei gegenseitig sichtbare Punkte O und O', von welchen aus die Punkte A, A', B, B' sichtbar waren und daher die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$ gemessen werden konnten.

Es entsteht die Frage, wie die Lage der Punkte A, B, C, sowie auch der Standorte O, O' zu einander sich bestimmen lassen. — Setzt man zur Abkürzung die Winkel

$$A'AO' = P, \quad AA'O = Q,$$
$$B'BO = P', \quad BB'O' = Q',$$

so wird man zwischen diesen und den beobachteten Winkeln die Relationen

$$P + Q = \alpha + \beta + \delta + \delta',$$
$$P' + Q' = \alpha' + \beta' + \delta' + \delta,$$

bemerken. Setzt man ferner die Distanzen

$$A'O' = p, \quad AO = q, \quad OO' = s,$$
$$B'O' = p', \quad BO = q',$$

so ergeben sich die Proportionen:

$$\frac{p}{a} = \frac{\sin P}{\sin \alpha'}, \quad \frac{q}{a} = \frac{\sin Q}{\sin \gamma},$$

$$\frac{p}{s} = \frac{\sin(\alpha + \beta + \delta)}{\sin(\alpha + \beta + \delta + \alpha' + \delta')}, \quad \frac{q}{s} = \frac{\sin \delta'}{\sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \delta')},$$

aus welchen, wenn man p, q, a, s eliminirt, sich alsbald die Gleichung

$$\frac{\sin P}{\sin Q} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \delta'} \frac{\sin(\alpha + \beta + \delta)\sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \delta')}{\sin \gamma \sin(\alpha + \beta + \delta + \alpha' + \delta')}$$

finden lässt. — Durch ein ganz analoges Verfahren erhält man

$$\frac{\sin P'}{\sin Q'} = \frac{\sin \alpha}{\sin \delta} \cdot \frac{\sin(\alpha' + \beta' + \delta')\sin(\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' + \delta)}{\sin \gamma' \sin(\alpha' + \beta' + \delta' + \alpha + \delta)}$$

und kann nun die vier Winkel P, Q, P', Q' einfach durch die folgende Rechnung erhalten.

4.

Man bestimme den Winkel φ gemäss der Gleichung:

$$\tan \varphi = \frac{\sin \alpha'}{\sin \delta'} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta + \delta)\sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \delta')}{\sin \gamma \sin(\alpha + \beta + \delta + \alpha' + \delta')},$$

so hat man

$$\tan \frac{P - Q}{2} = \tan \frac{\alpha + \beta + \delta + \delta'}{2} \tan(\varphi - 45^0),$$

$$\frac{P + Q}{2} = \frac{\alpha + \beta + \delta + \delta'}{2},$$

woraus sich P und Q ergeben.

Man bestimme ferner den Winkel φ' gemäss der Gleichung:

$$tang\, \varphi' = \frac{\sin\alpha}{\sin\delta} \frac{\sin(\alpha' + \beta' + \delta')\sin(\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' + \delta)}{\sin\gamma' \sin(\alpha' + \beta' + \delta' + \alpha + \delta)},$$

so hat man

$$tang\, \frac{P' - Q'}{2} = tang\, \frac{\alpha' + \beta' + \delta' + \delta}{2}\, tang\, (\varphi' - 45^0),$$

$$\frac{P' + Q'}{2} = \frac{\alpha' + \beta' + \delta' + \delta}{2},$$

woraus P und Q zu finden sind.

Für die Richtigkeit der vier Winkel erhält man nun gleichzeitig mit der Berechnung von s eine Probe, indem

$$s = a \frac{\sin P}{\sin\alpha'} \frac{\sin(\alpha + \beta + \delta + \alpha' + \delta')}{\sin(\alpha + \beta + \delta)} = a \frac{\sin Q}{\sin\delta'} \frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \delta')}{\sin\gamma},$$

sowie auch

$$s = a' \frac{\sin P'}{\sin\alpha} \frac{\sin(\alpha' + \beta' + \delta' + \alpha + \delta)}{\sin(\alpha' + \beta' + \delta')} = a' \frac{\sin Q'}{\sin\delta} \frac{\sin(\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' + \delta)}{\sin\gamma'}$$

sein muss. Sind zwei Winkel richtig befunden, so kann man nun auch die Werthe von

$$p = a \frac{\sin P}{\sin\alpha'}, \quad q = a \frac{\sin Q}{\sin\gamma},$$

$$p' = a' \frac{\sin P'}{\sin\alpha}, \quad q' = a' \frac{\sin Q'}{\sin\gamma'},$$

$$ACB = 180^0 - (P + P') + \delta + \delta' = 180^0 + Q + Q' - (\alpha + \beta + \delta + \alpha' + \beta' + \delta')$$

berechnen.

Will man ferner auch die Winkel

$$ACO = R, \quad BCO = S$$

bestimmen, so bemerke man zunächst, dass

$$\frac{OC}{OA'} = \frac{\sin Q}{\sin R}, \qquad \frac{OO'}{OB} = \frac{\sin(\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' + \delta)}{\sin(\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta')},$$

$$\frac{OA'}{OO'} = \frac{\sin(\alpha' + \delta')}{\sin(\alpha + \beta + \delta + \alpha' + \delta')}, \qquad \frac{OB}{OC} = \frac{\sin S}{\sin P'}$$

und dass, wenn man alle diese Gleichungen mit einander multiplicirt, sodann

$$tang\, \psi = \frac{\sin Q}{\sin P'} \frac{\sin(\alpha' + \delta')\sin(\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' + \delta)}{\sin(\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta')\sin(\alpha + \beta + \delta + \alpha' + \delta')}$$

setzt, die Gleichung

$$\frac{\sin R}{\sin S} = tang\, \psi$$

erhalten wird. Da aber $R + S = ACB$, so findet man für die Bestimmung von R und S die Gleichungen:

$$tang\, \frac{R - S}{2} = cotg\, \frac{P + P' - (\delta + \delta')}{2}\, tang\, (\psi - 45^0),$$

$$\frac{R + S}{2} = 90^0 - \frac{P + P'}{2} + \frac{\delta + \delta'}{2}.$$

Es bedarf nunmehr keiner weitern Auseinandersetzung, wie alle Seiten und Winkel des Dreiecks ABC berechnet werden können.

Der praktische Nutzen dieser Aufgabe lässt sich nicht verkennen, denn sie liefert in Fällen, wo es sich z. B. um die Verbindung zweier Tracen AA' und BB' handelt, deren Punkte gegenseitig nicht sichtbar sind, ohne viele directe Messungen die zu jener Verbindung nöthigen Elemente.

5.

Drei Punkte A, B, C (Fig. 4, Taf. II.), deren gegenseitige Lage nicht bekannt ist, und welche keinen Standort für ein Instrument darbieten, können von drei andern, gegenseitig sichtbaren Punkten O, O_1, O_2 aus beobachtet werden, so dass die zehn Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \delta_2$ als bekannt zu betrachten sind. Es entsteht die Frage, wie man, ohne eine Linie zu messen, die Winkel des Dreiecks ABC, sowie überhaupt alle Winkel der Figur $ABCOO_1O_2$ finden könne.

Zur Bestimmung der Winkel

$$CAO_2 = P_1, \quad CBO_1 = P_2,$$
$$CAO_1 = Q_1, \quad CBO_2 = Q_2,$$

hat man zunächst die Proportionen:

$$\frac{AC}{O_2C} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin P_1}, \qquad \frac{OC}{O_1C} = \frac{\sin(\beta_1 + \gamma_1)}{\sin(\alpha + \delta)},$$
$$\frac{O_2C}{OC} = \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin(\alpha_2 + \delta_2)}, \quad \frac{O_1C}{AC} = \frac{\sin Q_1}{\sin \alpha_1},$$

aus welchen, wenn man sämmtliche multiplicirt und

$$tang\, \varphi = \frac{\sin \alpha_2 \sin(\beta_1 + \gamma_1) \sin(\beta + \gamma)}{\sin \alpha_1 \sin(\alpha_2 + \delta_2) \sin(\alpha + \delta)}$$

setzt, die Gleichung

$$\frac{\sin P_1}{\sin Q_1} = tang\, \varphi$$

sich ergiebt. Bemerkt man weiter, dass

$$Q_1 - P_1 = 360^0 - (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_2),$$

so gelangt man für die Bestimmung von P_1 und Q_1 zu den beiden Gleichungen:

$$tang \frac{P_1 + Q_1}{2} = tang \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_2}{2} cotg(\varphi_1 - 45^0),$$
$$\frac{P_1 - Q_1}{2} = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_2}{2} - 180^0.$$

Durch ein ganz analoges Verfahren findet man, wenn

$$tang\, \varphi_2 = \frac{\sin \beta_1 \sin(\alpha_2 + \delta_2) \sin(\alpha + \delta)}{\sin \beta_2 \sin(\beta_1 + \gamma_1) \sin(\beta + \gamma)}$$

gesetzt und daraus φ_2 berechnet wird, die Gleichungen

$$tang\,\frac{P_2+Q_2}{2}=tang\,\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\alpha_2+\beta_2+\delta_2+\gamma_1}{2}\,cotg\,(\varphi_2-45^0),$$

$$\frac{P_2-Q_2}{2}=\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\alpha_2+\beta_2+\delta_2+\gamma_1}{2}-180^0,$$

aus welchen P_2 und Q_2 leicht gefunden werden können, da mehrere hierzu nöthige Werthe aus der Berechnung von P_1 und Q_1 benutzt werden können.

6.

Sobald diese vier Winkel gefunden worden sind, erhält man nun auch einen der gesuchten Winkel, nämlich

$$ACB=360^0-(\alpha_2+\beta_2)-(P_1+Q_2)=360^0-(\alpha_1+\beta_1)-(P_2+Q_1),$$

und damit zugleich eine Rechnungsprobe, indem hieraus, wie man sieht, die Gleichung

$$\alpha_2+\beta_2+P_1-P_2=\alpha_1+\beta_1+Q_1-Q_2$$

folgt.

Um nun schliesslich auch die beiden anderen Winkel des Dreiecks, nämlich

$$BAC=P \text{ und } ABC=Q$$

zu finden, ergeben sich die Proportionen

$$\frac{BC}{O_1C}=\frac{sin\,\beta_1}{sin\,P_2},\qquad \frac{OC}{O_2C}=\frac{sin\,(\alpha_2+\delta_2)}{sin\,(\beta+\gamma)},$$

$$\frac{O_1C}{OC}=\frac{sin\,(\alpha+\delta)}{sin\,(\beta_1+\gamma_1)},\qquad \frac{O_2C}{AC}=\frac{sin\,P_1}{sin\,\alpha_2},$$

$$\frac{AC}{BC}=\frac{sin\,Q}{sin\,P},$$

aus welchen, wenn man sie insgesammt multiplicirt und wenn man

$$tang\,\varphi=\frac{sin\,P_1}{sin\,P_2}\cdot\frac{sin\,\beta_1}{sin\,\beta_2}\cdot\frac{sin\,(\alpha+\delta)\,sin\,(\alpha_2+\delta_2)}{sin\,(\beta+\gamma)\,sin\,(\beta_1+\gamma_1)}=\frac{sin\,P_1}{sin\,P_2}\cdot\frac{sin\,\beta_2}{sin\,\alpha_2}\,tang\,\varphi_2$$

setzt, die Gleichung

$$\frac{sin\,P}{sin\,Q}=tang\,\varphi$$

hervorgeht.

Hieraus folgt nun, dass, wenn der Winkel φ der angeführten Gleichung gemäss berechnet und die Relation

$$P+Q=\alpha_2+\beta_2+P_1+Q_2-180^0=\alpha_1+\beta_1+P_2+Q_1-180^0$$

berücksichtigt wird, zur Bestimmung von P und Q die Gleichungen

$$tang\,\frac{P-Q}{2}=tang\,\frac{\alpha_1+\beta_1+P_2+Q_1}{2}\,tang\,(45^0-\varphi),$$

$$\frac{P+Q}{2}=\frac{\alpha_1+\beta_1+P_2+Q_1}{2}-90^0$$

angewendet werden können.

Wie man sieht, sind hiermit alle in der Figur vorkommenden Winkel

und zwar sowohl jene der Diagonalen als der Seiten bestimmt und es ist also die Aufgabe gelöst.

7.

Die soeben betrachtete Aufgabe hat Aehnlichkeit mit derjenigen, welche zuerst Lambert in seinen Beiträgen zur Mathematik, I. Band, Seite 78, gestellt hat, und deren richtige Auflösung in der Sammlung geometrischer Aufgaben von Meier Hirsch, I. Band, Seite 83, ausführlich angegeben ist. Diese wegen ihres praktischen Nutzens vielfach gerühmte „Lambert'sche Aufgabe" bezweckt nämlich ebenfalls die Bestimmung der Lage von sechs Punkten A, B, C, O, O_1, O_2, soweit dieselbe von Winkeln abhängt, aber es wird bei ihr vorausgesetzt, dass man sich nicht nur in den drei Standpunkten O, O_1, O_2, sondern auch noch in einem der drei Punkte A, B, C mit dem Instrumente aufstellen und daselbst die Winkel messen könne, welche O, O_1, O_2 mit einander bilden, so dass also im Ganzen vier Aufstellungen erforderlich sind. Aber gerade jene Voraussetzung thut der häufigern Anwendbarkeit dieser Aufgabe wesentlichen Eintrag. Ist nämlich in einem vierten Punkte, z. B. in A, eine Aufstellung möglich, so wird man fast immer auch die Winkel BAC und BAO_2 messen können, und dann bedarf es, um die übrigen Winkel zu finden, nicht mehr der Lambert'schen Aufgabe; kann dagegen jene vierte Aufstellung nicht genommen werden, während sich doch O, O_1, O_2 so wählen lassen, dass diese Punkte gegenseitig sichtbar sind — was gewiss am häufigsten der Fall ist, — so sind schon alle Bedingungen erfüllt, um die Lösung der Aufgabe des Art. 5 anzuwenden, welche um ein Beträchtliches einfacher, für die logarithmische Rechnung bequemer und vermöge der wiederholten Controlen in der Ausführung sicherer ist als die Auflösung der Lambert'schen Aufgabe, wie schon ein Blick auf die von Meier Hirsch a. a. O. Seite 86 aufgestellten Formeln hinreichend deutlich zeigt.

Schliesslich scheint mir noch die Bemerkung von Interesse zu sein, dass mit der in den beiden vorigen Artikeln erörterten Aufgabe zugleich eine wesentlich allgemeinere ihre Lösung gefunden hat, nämlich die Aufgabe: Aus blos drei gegenseitig sichtbaren Standpunkten O, O_1, O_2 die Winkel irgend eines Polygons $ABCD$... zu bestimmen, dessen Endpunkte von O, O_1, O_2 aus insgesammt sichtbar sind.

XIV. Elementarer Beweis des Völler'schen Satzes und Uebertragung desselben auf räumliche Verhältnisse. (Vergl. Jahrg. IV. pag. 143 u. 366.)

Der in letzterer Zeit mehrfach zur Sprache gekommene Völler'sche Lehrsatz von einer allgemeinen Eigenschaft aller ebenen Curven, lässt sich auf

Curven doppelter Krümmung ausdehnen und giebt Veranlassung zu andern verwandten Problemen. Ohne ihn (der Kürze wegen) hier zu wiederholen, möge hier ein Beweis des Satzes folgen, der sich auf eine durch Huyghens in seinem Werke: „*De circuli magnitudine inventa: Lugd. Bat.* 1454" bekannt gewordenen Relation gründet. Hiernach ist das Areal eines Kreises kleiner als ein umschriebenes reguläres Vieleck vermindert um den dritten Theil des Unterschiedes zwischen diesem Vieleck und einem eingeschriebenen von eben so viel Seiten und nähert sich fort und fort dem Grenzwerthe dieser Differenz, wenn die Seitenzahl der Polygone ins Unendliche zunimmt, also

$$K = Lim\,[U_n - \tfrac{1}{3}(U_n - E_n)] = Lim\,[E_n + \tfrac{2}{3}(U_n - E_n)].$$

Dividirt man diese Gleichung durch n und bringt sie auf die Form

$$Lim\left(\frac{K - E_n}{n}\right) = Lim\,\tfrac{2}{3}\left(\frac{U_n - E_n}{n}\right).$$

und erwägt, dass das in Rede stehende unendlich kleine Bogenelement der Curve das Bogenelement eines Kreises ist, dessen Radius dem Krümmungshalbmesser ϱ desselben Bogenelements gleichkommt, ferner dass K dividirt durch n der zugehörige unendlich schmale Sector des Kreises, E_n dividirt durch n aber zugleich den $n$ten Theil des eingeschriebenen n Ecks, U_n dividirt durch n denselben Theil des umschriebenen nEcks bezeichnet, so ist offenbar der gesuchte Grenzwerth gleich

1) $Lim\left(\dfrac{K - E_n}{U_n - E_n}\right) = \tfrac{2}{3}$ d. h. *Tangentendreieck* : *Segment* $= 3 : 2$.

Da dieser Satz nur für den unendlich schmalen Kreissector gilt, so lässt sich derselbe auf alle Curven sowohl der Ebene als des Raumes anwenden, woraus umgekehrt eine Ausdehnung des Huyghens'schen Lehrsatzes auf alle Curven folgt. Bezeichnet nämlich F das Areal, welches zwischen einer Evolute und ihrer Evolvente liegt, U_n ein beliebiges der Evolvente eingeschriebenes Polygon von n Seiten und E_n das eingeschriebene von derselben Seitenzahl, so findet stets die Relation statt

$$Lim\left(\frac{F - E_n}{U_n - E_n}\right) = \tfrac{2}{3},$$

vorausgesetzt, dass unter E_n dasjenige eingeschriebene Polypon verstanden wird, dessen Seiten die Berührungspunkte des umschriebenen mit einander verbindet. Hierbei ist es natürlich, jedoch nicht nothwendig, die Polygone so anzunehmen, dass die abgeschnittenen Bogenelemente beim Uebergange zur Gränze den zugehörigen Krümmungshalbmessern proportional seien; der Satz gilt aber auch ohne diese Annahme.

Eine zweite Formel von Huyghens lautet

$$K = Lim\,[E_n + \tfrac{1}{3}(E_n - E_{n/2})]$$

welche die neue merkwürdige Beziehung liefert

$$Lim\left(\frac{K - E_n}{E_n - E_{n/2}}\right) = \tfrac{1}{3}.$$

Um auch diese Gleichung auf alle Curven ausdehnen zu können, ist es nöthig, das Bogenelement AB (Fig. 5, Taf. II) zu halbiren in D und die Sehnen AD und BD zu ziehen. Für unendlich kleine Bögen (Kreisbögen) ist $AC = BC$ und $AD = DB$, folglich $AG = GB$. Legt man durch den Punkt D die Tangente DE, so ist sie auch parallel zur Sehne AB. Nun gilt der erste Satz für das Tangentendreieck DEB und das Segment BD. Die Interpretation des zweiten Satzes ergiebt

$$(Segm.\ AD + Segm.\ BD) : \triangle ADB = 1 : 3,$$

also vermöge einer leichten Verwandlung derselben Proportion

2) $$Segment : Sehnendreieck = 4 : 3.$$

Hieraus ergiebt sich in Verbindung mit dem von Völler angegebenen Satze, dass der Inhalt vom $\triangle ABC$ doppelt so gross, als der des $\triangle ABD$ ist; deswegen ist $GD = CD$. Betrachtet man also die Linie DG oder die Normale des Punktes D als Abscissenachse und die Tangente DE als Ordinatenachse des unendlich kleinen Bogenelementes AB, so besitzt dieses alle Eigenschaften einer Parabel und zwar die Gleichung

$$GB^2 = CG\,(\varrho - DG),$$

welche für unendlich kleine Grössen übergeht in $GB = 2\varrho\,.\,DG$.

Um zu denselben Sätzen zu gelangen, kann man auch, sich auf die Theorie des Krümmungskreises stützend, ausgehen von der Kreisgleichung $GB^2 = 2\varrho DG - DG^2$, woraus beim Uebergange zu unendlich kleinen Grössen die Reduction der Kreisgleichung in die der Parabel sogleich erfolgt. Man erhält auf diesem Wege zugleich einen sehr einfachen Beweis der beiden Huyghens'schen Sätze, sowie endlich auch vermittelst dieser eine einfache Methode die Parabel zu quadriren.

Bemerkenswerther noch als die obigen Sätze möchte folgender sein, der sich aus einer Uebertragung dieser Grenzbtrachtungen auf krumme Flächen ergiebt. Denkt man sich durch einen Punkt einer krummen Fläche eine Berührungsebene, und unendlich nahe mit derselben parallel durch die Fläche eine Secantenebene gelegt, sowie an der Durchschnittscurve durch die Normale des Berührungspunktes Tangenten an allen Normalschnitten gezogen, so entsteht hierdurch ein elliptischer Kegel, dessen Inhalt sich zu dem Inhalte der abgeschnittenen Calotte verhält wie 4 zu 3.

Sei ABC (Fig. 6, Taf. II) der gedachte Schnitt der mit der Berührungsebene des Punktes S parallel gelegten Secantenebene, OST die Normale, ferner ASA' und BSB' die Hauptnormalschnitte, ϱ^0 und ϱ' die beiden zugehörigen Hauptkrümmungshalbmesser, CSC' ein andrer Normalschnitt und ϱ sein Krümmungsradius, so gilt nach dem Obigen die Gleichung $OS = ST$, wo T den Durchschnittspunkt der in C an den Schnitt durch die Normale gelegten Tangente bedeutet. Da aber OS allen Schnitten gemeinschaftlich ist, so gehen auch alle Tangenten ohne Ausnahme durch T und dies ist die

Spitze des Kegels. Aber die Figur des Schnittes $ABCA'$ ist für unendlich kleine Dimensionen stets eine Linie des zweiten Grades. Denn sei $u=0$ die Gleichung der Fläche und nehmen wir an, dass die Tangentialebene der xy Ebene, also die Normale der z Achse und zugleich die xz und yz Ebenen den beiden Hauptschnitten parallel seien und dass α den Winkel bezeichne, den ein beliebiger Normalschnitt CSC' mit dem Hauptschnitte ASA' bildet, so ist bekanntlich

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{\varrho^0}\cos\alpha^2+\frac{1}{\varrho'}\sin\alpha^2,$$

wenn die zweiten Differentialquotienten $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ dasselbe Zeichen und

$$\pm\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{\varrho^0}\cos\alpha^2-\frac{1}{\varrho'}\sin\alpha^2,$$

wenn sie entgegengesetzte Vorzeichen haben. Nun sind die Gleichungen des Normalschnitts ASA', des zweiten Querschnitts und des dritten beliebigen Normalschnitts BSC' resp.

$$AO^2=2\varrho^0.OS;\quad BO^2=2\varrho'.OS;\quad CO^2=2\varrho.OS.$$

Setzen wir $AO=a$, $BO=b$ und $CO=r$, so findet man leicht für den Punkt C die Gleichung

$$\frac{a^2}{\varrho^0 r^2}=\frac{1}{\varrho^0}\cos\alpha^2+\frac{1}{\varrho^0}\sin\alpha^2,$$

oder

$$y^2=\frac{\varrho'}{\varrho^0}(a^2-x^2)=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\quad(Ellipse)$$

und wenn man die zweite Gleichung zuzieht

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2\mp a^2)\ (Hyperbel).$$

Die gedachte Curve ist also ein Kegelschnitt, unter denen natürlich nur die geschlossenen Curven hier brauchbar sind, also die Ellipse und wenn $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ gleich $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ wird, der Kreis. Nun ist der Inhalt des elliptischen Kegels gleich $\frac{1}{3}OT.ab\pi=\frac{2}{3}\pi\sqrt{\varrho^0.\varrho'}.z^2$, und der Inhalt der Calotte, welche offenbar in ein elliptisches Paraboloid übergeht, gleich

$$\pi\int_0^z ab.dz=2\pi\sqrt{\varrho^0\varrho'}\int_0^z z\,dz=\pi\sqrt{\varrho^0\varrho'}.z^2.$$

Das Verhältniss beider Volumina ergiebt sich als

3) *Kegel* : *Calotte* $=4:3$.

Wenn man andererseits wiederum alle möglichen Sehnen von der Durchschnittscurve $ABCA'$ nach dem Scheitel S zieht, so entsteht ein zweiter innerer elliptischer Kegel, für welche die Gleichung besteht

4) *Calotte* : *Kegel* $=3:2$.

Hierin sind nun merkwürdige Analogien zu den Formeln 1) und 2) ausgesprochen, sofern nach den beiden letzten die Producte aus den numerischen Verhältnissen der gleichen begrifflichen Verhältnisse dieselben Werthe haben, nämlich $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}$.

Jever, im December 1859. LUDWIG MATTHIESSEN.

XV. Ueber die Lichtempfindlichkeit des Asphaltes von A. R. v. PERGER. (Ber. d. Wien. Acad. d. W., Bd. 35, S. 489.) Durch Wollaston wurde zuerst (1803) die Eigenschaft der Lichtempfindlichkeit an einem Harze, dem Guajac-Harze nachgewiesen. Hierauf lernte Jos. Nicéphore Niépce von Chalons (1814) die lichtempfindlichen Eigenschaften des Asphaltes kennen und versuchte wiederholt, dieselben zur Herstellung metallener Druckplatten mit Hülfe der *Camera obscura* zu benutzen. Zu diesem Zwecke wendete er eine Auflösung von gepulvertem Asphalt in Lavendelöl an, von welcher eine dünne Schicht auf eine versilberte Platte aufgetragen wurde, worauf die Platte — nach dem Trocknen der Schicht — acht Stunden lang in der *Camera obscura* exponirt wurde. Durch eine Mischung von Lavendelöl und Naphta wurde nun der durch das Licht nicht veränderte Asphalt hinweggenommen und die Platte höchst vorsichtig geätzt. Diese Versuche wurden mit grosser Ausdauer von Niépce und später von Lemaitre fortgeführt, lieferten aber doch kein Resultat, mit dem man hätte ganz zufrieden sein können. Im Jahre 1856 gab Robert Macpherson Vorschriften über die Herstellung einer Druckplatte auf lithographischem Stein, wobei ebenfalls die Lichtempfindlichkeit des Asphaltes benutzt wurde. Während Niépce eine vorzüglich geeignete Asphaltlösung durch Anwendung besonders geeigneter Asphaltsorten und durch Anwendung besonders qualificirter Lösungsmittel herstellte, suchte Macpherson den lichtempfindlichsten Theil zu gewinnen, indem er Judenpech mit Aether auszog, diesen hierauf entfernte und dann durch nochmalige Extraction des Rückstandes eine für seinen Zweck genügende ätherische Lösung erzielte. Nach Macpherson hat sich der unermüdliche Niépce ebenfalls mit der Herstellung lithographischer Druckplatten beschäftigt, wobei er in der oben angegebenen Weise zu einer tauglichen Asphaltlösung gelangte; die auf dem Steine getrocknete Schicht wurde hierauf mit einem photographischen Glasbilde bedeckt den Lichtstrahlen ausgesetzt oder in einer *Camera* exponirt. Der oben genannte A. R. v. Perger hat nun über den besprochenen Gegenstand seit 1857 Versuche angestellt und ist zunächst bemüht gewesen, den lichtempfindlichen Theil des Asphaltes auszuscheiden. Er findet, dass, wenn man Asphalt trocken destillirt, zuerst ein weissliches Harz als Destillationsprodukt erscheint, hierauf setzt sich ein braunrothes Harz an den Wänden der Retorte ab, worauf noch zwei Destillationsprodukte von verschiedenem Aussehen erscheinen. Das braunrothe Harz im zweiten Stadium enthält nun nach

A. R. v. Perger den lichtempfindlichen Theil des Asphaltes und ist selbiger von ihm benutzt worden, um sehr schöne reine Bilder auf lithographischen Stein hervorzubringen, die nach seiner Angabe auch die Aetzung gut vertragen. Desgleichen berichtet der Genannte, dass die Herstellung von Asphaltbildern auf Papier sehr einfach und bequem sei, wie wohl selbige keine recht weissen Lichter auf den Bildern liefert. Bei der Herstellung von dergleichen Bildern (Asphaltogrammen) braucht nämlich des Tageslicht nicht abgehalten zu werden, die Lösung des lichtempfindlichen Theiles vom Asphalt wird mit einem langhaarigen Pinsel auf das Papier aufgetragen und hierauf selbiges getrocknet. Nach der Exposition braucht das Papier nur mit Wasser abgewaschen zu werden, um den durch das Licht nicht veränderten harzigen Ueberzug fortzuschaffen. E. Kahl.

XVI. Dove's Vorschlag zur Schwächung des Lichtes intensiver Lichtquellen. (Monatsber. d. Königl. Preuss. Acad. d. Wissensch., April 1859.) Diese geschieht gewöhnlich durch Anwendung von gefärbten Gläsern, wodurch allerdings der Uebelstand herbeigeführt wird, dass das Bild der betrachteten Lichtquelle gefärbt erscheint. Es sind zu diesem Zwecke auch polarisirende Vorrichtungen vorgeschlagen worden, bei denen man das einfallende Licht beliebig schwächen kann, ohne dass dasselbe gefärbt erscheint. Dove empfiehlt nun dünne Metallüberzüge auf Glas, insbesondere den des Silbers, mit dem er sich speciell beschäftigt hat, zu diesem Zwecke. Man kann diese Ueberzüge beliebig dick herstellen und daher beliebig verdunkeln, die blaue Färbung, die die Silbergläser, die sich auch als Spiegel benutzen lassen, den Gegenständen ertheilen, stört wenigstens bei weissen Objecten nicht. E. Kahl.

XVI. Bemerkung zur Theorie der elektrischen Ströme. In einem früheren Aufsatze habe ich nachgewiesen, dass es keine Potentialfunction giebt für die Anziehung zweier Stromelemente und ich will jetzt aus diesem Satze eine wichtige Folgerung ziehen.

Die Anziehung zweier Stromelemente ist durch Weber bis jetzt auf die principiell einfachste Form gebracht, man hat aber immer geglaubt, auf ein noch einfacheres Princip kommen zu können. Es wäre gewiss sehr interessant, wenn man die Ampère'sche Formel in der Weise entwickeln könnte, dass man eine gewisse Bewegung der elektrischen Fluida im Innern des Elementes annähme und die Anziehung oder Abstossung dieser Fluida unabhängig von den Bewegungszuständen gedacht werden dürfte. In der Form, *die Weber für die* Anziehung der Stromelemente gegeben

hat, kommen noch Grössen vor, die von den Bewegungszuständen der vielleicht nur gedachten Fluida herrühren. Nun weiss man aber, dass für jede Anziehung nach der Formel $\frac{m \cdot m_1}{r^2}$, wenn m und m_1 die Massen, r die Entfernung, die Componenten der Anziehung als Differentialquotienten geschrieben werden können, und es müsste daher, wäre die angeführte Hypothese richtig, für jedes Zeitmoment die Anziehung zweier Stromelemente dieselbe Eigenthümlichkeit haben. Die mittlere Anziehung nun während einer Zeit t würde man erhalten durch Multipliciren mit dt, Integriren nach t und Dividiren mit t; es müssten also nach dieser Hypothese die Componenten der elektro-dynamischen Anziehung als Differentialquotienten des Potentials geschrieben werden können und da dies nicht geht, so ist die angedeutete Transformation der Ampère'schen Formel nicht möglich. Diese Transformation hat schon Ampère angedeutet und für möglich gehalten. Ihre Unmöglichkeit würde, wie ich glaube, auf einem andern Wege nur mit sehr grossen Anstrengungen darzulegen sein, weshalb ich diese Bemerkung nicht für überflüssig gehalten habe, zumal sie einen Gegenstand betrifft, der für die Elektrodynamik äusserst wichtig ist. Es ist nach dieser Bemerkung wahrscheinlich, dass die Formel Weber's der wahrhafte Ausdruck der Wechselwirkung bewegter elektrischer Moleküle ist.

Gustav Roch.

VII.

Ueber einige merkwürdige Beziehungen, in denen die Flächen zweiter Ordnung zu einander stehen.

Von Dr. phil. H. Schönherr in Dresden.

Die nächstfolgende kurze Abhandlung soll einen kleinen Beitrag zu den merkwürdigen Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung geben. Ich habe mich in derselben der Ermittelung einiger Beziehungen zugewendet, welche zwischen diesen Flächen und ihren Durchschnittscurven stattfinden. Dergleichen Curven sind schon in mehrfacher Hinsicht behandelt worden, und besonders hat das Florentiner Problem zur Entdeckung einer grossen Reihe von höchst interessanten Eigenschaften derselben Veranlassung gegeben. Diese Untersuchungen beziehen sich aber hauptsächlich nur auf die Kegel- und Cylinderflächen in ihren Durchschnitten mit der Kugel, und hierbei wiederum vorzugsweise auf den Inhalt der Figuren, welche sie auf diesen Flächen begrenzen, oder auf den Inhalt der Körper, welche von jenen Flächen umschlossen werden, sowie auf die Gestalt und auf die verschiedenen Arten der Erzeugung der Curve selbst. In den nächstfolgenden Betrachtungen sollen einige von denjenigen Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung abgeleitet werden, durch welche sie in ihrer Gesammtheit als ein harmonisches Ganzes sich darstellen.

Ich habe mich dabei der Rechnung möglichst zu enthalten, und, so weit es anging, auf Grund der allgemein bekannten Eigenschaften der Flächen und Curven zweiter Ordnung durch rein geometrische Betrachtungen weiter vorwärts zu schreiten gesucht. Doch konnte ich es nicht umgehen, einige Hilfssätze aus der Lehre von den Curven und Flächen zweiter Ordnung besonders namhaft zu machen und einige Erklärungen einzuschalten, welche nicht allgemein sanctionirt sein dürften. Die Hilfssätze habe ich, soweit sie als allgemein bekannt vorausgesetzt werden konnten, ohne Beweis beigefügt.

I.

a) Alle Linien zweiter Ordnung werden von einer in ihrer Ebene liegenden *Geraden entweder in zwei* Punkten, oder in keinem getroffen. Diese

zwei Punkte können auch in einen zusammenfallen, in welchem Falle die Curve von der Geraden berührt wird, oder es kann einer derselben, oder beide, im Unendlichen liegen.

b) Wenn zwei parallele Sehnen einer Curve zweiter Ordnung von einer dritten halbirt werden, so halbirt diese auch alle übrigen mit jenen parallele Sehnen. Eine Gerade, welche ein System paralleler Sehnen halbirt, wird ein Durchmesser genannt.

c) Bei der Ellipse und Hyperbel schneiden sich alle Durchmesser in einem Punkte, welcher der Mittelpunkt der Curve genannt wird. Die Durchmesser der Parabel sind sämmtlich parallel, und ihr Durchschnittspunkt liegt daher im Unendlichen. Eine Parabel kann somit als eine solche Curve zweiter Ordnung aufgefasst werden, deren Mittelpunkt im Unendlichen liegt.

d) Eine Ellipse oder Hyperbel hat stets zwei senkrecht auf einander stehende Durchmesser, gegen welche dieselbe symmetrisch liegt. Diese Durchmesser heissen die Achsen der Curve. Eine Parabel hat somit eigentlich nur eine Achse. Allein wenn im Folgenden schlechthin von den Achsen einer Curve gesprochen werden wird, so soll eine auf der Achse der Parabel senkrechte und in ihrer Ebene gelegene Gerade ihrer Richtung nach als zweite Achse der Parabel betrachtet werden.

e) Sind zwei Durchmesser eines Kegelschnittes einander gleich, so sind die Achsen desselben die Halbirungslinien der Winkel, welche von jenen Durchmessern gebildet werden.

II.

a) Zwei ähnliche Figuren heissen ähnlich gelegen, wenn die Geraden welche zwei entsprechende Punkte derselben verbinden, sich sämmtlich in einem Punkte schneiden. Zwei ähnliche Kegelschnitte sind jedenfalls ähnlich gelegen, wenn jede Achse des einen der entsprechenden des andern parallel ist.

b) Zwei Hyperbeln, von deren Asymptoten diejenigen der einen denen der andern parallel sind, sind entweder ähnlich und ähnlich gelegen, oder es stehen die reellen und imaginären Durchmesser beider Hyperbeln im umgekehrtem Verhältnisse zu einander. Wir wollen zwei Hyperbeln bei letzter Gestalt und Lage der Kürze willen supplementäre Hyperbeln nennen.

III.

Im Allgemeinen haben zwei in einer Ebene gelegene Kegelschnitte 4 Punkte mit einander gemein, die jedoch auch paarweise zusammenfallen *oder imaginär sein* können, oder auch zum Theile im Unendlichen liegen *können.*

IV.

Lehrsatz: Zwei ähnliche und in einer Ebene ähnlich gelegene Kegelschnitte, oder zwei supplementäre Hyperbeln schneiden einander entweder in zwei Punkten, oder in gar keinem.

Beweis: Die Gleichung eines Kegelschnittes zwischen rechtwinkligen Coordinaten kann stets auf die Form

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$$

gebracht werden, wobei seine Achsen den Coordinatenachsen parallel sind, und ihrer Grösse nach in dem Verhältnisse $\sqrt{\frac{1}{a}} : \sqrt{\frac{1}{b}}$ zu einander stehen. Ein diesem ähnlicher Kegelschnitt muss dasselbe Verhältniss der Achsen haben, und soll er in derselben Ebene mit jenem ähnlich gelegen sein, so muss er sich nach II. a) ausdrücken lassen durch eine Gleichung von der Form

$$ax^2 + by^2 + fx + gy + k = 0.$$

Subtrahirt man die eine Gleichung von der andern, so erhält man die Gleichung einer Geraden, da die zweiten Potenzen von x und y sich gegenseitig haben. Diese Gerade muss aber durch dieselben Punkte gehen, in welchen beide Kegelschnitte einander schneiden, und somit haben (I. a) beide Kegelschnitte entweder zwei Punkte oder gar keinen gemein.

Weil obige Gleichungen auch supplementäre Hyperbeln ausdrücken können, so ist hiermit der Satz vollkommen bewiesen.

V.

Lehrsatz: Liegen die 4 Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte in einem Kreise, so sind die Achsen des einen denen des andern parallel.

Beweis: Die Gleichungen beider Kegelschnitte für rechtwinklige Coordinaten seien

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + fy + g = 0,$$

und

$$a'x^2 + b'y^2 + c'xy + d'x + f'y + g' = 0.$$

Sollen die Durchschnittspunkte beider in einem Kreise liegen, so muss man durch Combination der Gleichungen beider die Gleichung eines Kreises erhalten können. Da eine solche Gleichung zweiten Grades sein muss, so kann diese Combination nur in einer Addition (oder Subtraction) beider Gleichungen bestehen, nachdem zuvor die eine mit einer leicht zu bestimmenden Grösse z multiplicirt worden ist. Durch eine derartige Combination erhält man

$$(az+a')x^2 + (bz+b')y^2 + (cz+c')xy + (dz+d')x + (fz+f')y + gz + g' = 0.$$

Soll dies die Gleichung eines Kreises sein, so müssen die Coefficienten von x^2 und y^2 einander gleich, der von xy aber $= 0$ sein, daher

a) $\qquad az + a' = bz + b',$

b) $\qquad cz + c' = 0.$

Aus den ersten beiden Gleichungen bestimmt sich die Grösse z. Die zweite spricht die Bedingung aus, welche betreffs der Gleichungen beider Kegelschnitte erfüllt sein muss. Diese Bedingung ist aber, dass für $c=0$ auch $c'=0$ sein muss. Sind daher die Achsen des einen Kegelschnittes den Coordinatenachsen parallel, so sind es auch die des andern. Die Achsen eines Kegelschnittes sind daher in der That denen des andern parallel, wenn ihre 4 Durchschnittspunkte in einem Kreise liegen.

Zusatz. Weil die Gleichung a) stets erfüllt werden kann, wenn man $c=0$ und $c'=0$ setzt, so gilt dieser Satz auch umgekehrt: Sind die Achsen eines Kegelschnittes denen eines andern parallel, so liegen ihre 4 Durchschnittspunkte in einem Kreise.

VI.

a) Eine Fläche zweiter Ordnung wird von einer Geraden entweder in zwei Punkten, oder in gar keinem getroffen. Jene zwei Punkte können wiederum zusammenfallen oder es kann der eine oder beide im Unendlichen gelegen sein.

b) Für ein System paralleler Sehnen einer Fläche zweiter Ordnung giebt es immer eine Ebene, welche jene Sehnen sämmtlich halbirt. Man nennt eine solche Ebene eine Diametralebene der Fläche.

c) Alle Diametralebenen schneiden sich entweder in einem Punkte, oder in einer Geraden, oder sie sind einer Geraden oder einer Ebene parallel.

Scheiden sich die Diametralebenen in einem Punkte, so ist die Fläche entweder ein Ellipsoid, oder eins der beiden Hyperboloide, oder ein Kegel. Dieser Punkt wird dann der Mittelpunkt der Fläche genannt, und er besitzt die Eigenschaft, dass alle durch ihn gelegten Sehnen in ihm halbirt werden.

Schneiden sich die Diametralebenen in einer Geraden, so ist die Fläche entweder ein elliptischer oder hyperbolischer Cylinder, und die Gerade heisst die Achse des Cylinders. Man sieht aber sofort, dass alle mit dieser Achse parallelen Geraden gleichfalls als Sehnen der Fläche betrachtet werden können aber als nach beiden Seiten hin unendlich grosse, und dass somit jeder Punkt einer solchen Ebene als Halbirungspunkt angesehen werden darf. Man kann daher einen beliebigen Punkt in der Achse eines solchen Cylinders als Mittelpunkt desselben betrachten, und demnach den elliptischen und hyperbolischen Cylinder den vorhin genannten Mittelpunktsflächen beizählen.

Sind die Diametralebenen sämmtlich einer Geraden parallel, so ist die Fläche ein elliptisches oder ein hyperbolisches Paraboloid. Der gemeinsame Durchschnittspunkt jener Ebenen liegt alsdann in der Richtung dieser Geraden im Unendlichen, und es lassen sich somit die beiden Parabo-

loide als solche Flächen zweiter Ordnung betrachten, deren Mittelpunkt im Unendlichen liegt.

Sind endlich sämmtliche Diametralebenen einer und derselben Ebene parallel, wie es bei dem parabolischen Cylinder der Fall ist, so ist die im Unendlichen gelegene und mit den Seiten des Cylinders parallele Gerade, in welcher man annehmen kann, dass sämmtliche Diametralebenen einander scheiden, als Achse des Cylinders, und wiederum, wie bei dem elliptischen und hyperbolischen Cylinder, ein beliebiger Punkt dieser Achse als Mittelpunkt zu betrachten. Der parabolische Cylinder ist somit gleichfalls als eine Fläche anzusehen, deren Mittelpunkt im Unendlichen liegt.

Die Flächen zweiter Ordnung lassen sich somit in zwei Gruppen trennen. Zur einen nämlich gehören diejenigen, deren Mittelpunkt im Endlichen liegt und entweder ein bestimmter Punkt oder ein beliebiger Punkt in einer bestimmten Geraden ist, zur andern diejenigen, deren Mittelpunkt im Unendlichen liegt.

VII.

a) Für eine jede Fläche zweiter Ordnung giebt es wenigstens drei in ihrem Mittelpunkte sich rechtwinklig schneidende Diametralebenen, gegen welche die Fläche symmetrisch liegt und welche die Hauptebenen der Fläche genannt werden mögen. Bei einer Fläche, deren Mittelpunkt im Unendlichen liegt, ist auch eine dieser Hauptebenen im Unendlichen gelegen. Bei einer Rotationsfläche kann jede durch die Rotationsachse gelegte Ebene als eine Hauptebene betrachtet werden.

b) Die drei Geraden, in welchen die drei Hauptebenen einander rechtwinklig schneiden, werden die Achsen der Fläche genannt. Bei einer Fläche, deren Mittelpunkt im Unendlichen liegt, sind auch zwei Achsen im Unendlichen gelegen. Es können somit dieselben als einachsige, die übrigen als dreiachsige Flächen bezeichnet werden.

VIII.

a) Eine Fläche zweiter Ordnung wird von zwei parallelen Ebenen entweder in ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten oder in supplementären Hyperbeln geschnitten. Der letzte Fall kann nur bei dem hyperbolischen Hyperboloid und dem hyperbolischen Paraboloid stattfinden. Bei allen übrigen Flächen tritt immer der erste Fall ein. Doch ist zu bemerken, dass ein System von zwei einander schneidenden Geraden hierbei als eine Hyperbel anzusehen ist, welche mit ihren Asymptoten zusammenfällt.

b) Ein elliptisches Hyperboloid und ein hyperbolisches, welche demselben Asymptotenkegel zugehören, werden von einer Ebene stets in ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten, oder in supplementären Hyperbeln geschnitten. Dasselbe findet statt in Bezug auf jedes der beiden Hyperboloide und dem zugehörigen Asymptotenkegel.

IX.

Für eine jede Fläche zweiter Ordnung giebt es zwei Systeme paralleler Ebenen, von denen jede die Fläche entweder in einem Kreise, der auch imaginär sein kann, oder in einer einzigen Geraden schneidet. Der erste Fall findet statt bei dem Ellipsoide, den beiden Hyperboloiden, dem Kegel, dem elliptischen Paraboloid und dem elliptischen Cylinder; der zweite Fall tritt bei dem hyperbolischen Paraboloid und dem hyperbolischen Cylinder ein. Diese beiden Ebenensysteme können auch unter sich parallel sein, und somit in ein einziges zusammenfallen, wie dies bei den Rotationsflächen und dem parabolischen Cylinder der Fall ist. Im Folgenden mögen nun diese Systeme paralleler Ebenen die Kreisschnitte einer Fläche zweiter Ordnung heissen, auch wenn sie die Fläche nicht in Kreisen, sondern in Geraden schneiden.

X.

Bei dem Ellipsoid, dem hyperbolischen Hyperboloid und dem elliptischen Cylinder kann man durch den Mittelpunkt der Fläche zwei Ebenen legen, welche dieselbe in reellen Kreisen schneiden. Diese zwei Kreise sind congruent, und fallen mit ihrem Mittelpunkte in den der Fläche. Eine jede andere durch den Mittelpunkt einer solchen Fläche gelegte Ebene wird dieselbe in einer Curve K schneiden, deren Mittelpunkt gleichfalls mit dem der Fläche, also auch mit dem der beiden Kreise zusammenfällt, und welche daher mit jedem der beiden Kreise einen Durchmesser gemein hat. Da diese Durchmesser wegen der Congruenz der beiden Kreise gleich gross sind, so sind durch sie die Richtungen der Achsen der Curve K unzweideutig bestimmt (I. e). Hieraus folgt also der Satz:

Wird eine der vorhin genannten Flächen von einer Ebene geschnitten, so sind die Richtungen der Achsen des Schnittes durch die Lage seiner Ebene gegen die Kreisschnitte der Fläche vollkommen bestimmt.

Dieser Satz gilt auch für den hyperbolischen Cylinder, bei welchem unter den durch seinen Mittelpunkt gehenden Kreisschnitten seine Asymptotenebenen zu verstehen sind. Die beiden Geraden, in welchen diese Ebenen von einander geschnitten werden, sind nämlich die Asymptoten der Hyperbel, in welchen die letztere Ebene den Cylinder schneidet. Die Achsen einer Hyperbel halbiren aber die Winkel, welche ihre Asymptoten mit einander bilden. Somit ist der obige Satz in der That auch für den hyperbolischen Cylinder bewiesen.

XI.

a) Weil zwei parallele Ebenen eine Fläche zweiter Ordnung in ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten oder in supplementären Hyperbeln schneiden (VIII. a), die Achsen des einen zweier solcher Kegelschnitte aber immer denen des andern parallel sind, so schliessen wir, mit Bezug-

nahme auf den vorigen Paragraphen, dass, wenn eine der Flächen, die in diesem Paragraphen genannt sind, von einer beliebigen Ebene geschnitten wird, die Richtungen der Achsen des Schnittes durch die Lage seiner Ebene gegen die Kreisschnitte der Fläche unzweideutig bestimmt sind.

b) Wegen VIII. *b*) gilt aber dieser Satz auch von dem Kegel und dem elliptischen Hyperboloid, also von allen dreichsigen oder solchen Flächen, deren Mittelpunkt im Endlichen liegt.

XII.

Da ferner einachsige Flächen als solche zu betrachten sind, deren Mittelpunkt im Unendlichen liegt, so gilt der letzte für die dreiachsigen Flächen aufgestellte Satz allgemein für alle Flächen zweiter Ordnung. Wird also eine Fläche zweiter Ordnung von einer beliebigen Ebene geschnitten, so sind die Richtungen der Achsen dieses Schnittes durch die Lage seiner Ebene gegen die Kreisschnitte der Fläche unzweideutig bestimmt.

XIII.

Sind demnach die Kreisschnitte einer Fläche zweiter Ordnung mit denen einer andern solchen Fläche parallel, und werden beide Flächen von einer Ebene in den Curven p und q geschnitten, so sind die Achsen von p denen von q parallel. Die vier Durchschnittspunkte beider Curven liegen somit nach V. in einem Kreise.

XIV.

Lehrsatz. Die Durchschnittscurve zweier Flächen zweiter Ordnung kann von einer Ebene höchstens in 4, von einer dritten Fläche zweiter Ordnung höchstens in 8 Punkten geschnitten werden. Hat eine solche Curve mehr als 4 Punkte mit einer Ebene, oder mehr als 8 mit einer Fläche zweiter Ordnung gemein, so fällt sie ganz in die Ebene oder in die Fläche.

Beweis. Eliminirt man aus den allgemeinen Gleichungen zweier Flächen zweiter Ordnung und einer Ebene zweiter Coordinaten, so erhält man für die dritte (im Allgemeinen) eine Gleichung vierten Grades; ebenso erhält man für die dritte Coordinate eine Gleichung achten Grades, wenn man aus den allgemeinen Gleichungen dreier Flächen zweiter Ordnung zwei der Coordinaten eliminirt. Hieraus ergiebt sich aber ohne Weiteres der zu beweisende Satz.

XV.

Ist die Durchschnittscurve PQ zweier Flächen zweiter Ordnung P und Q von doppelter Krümmung, so kann man durch dieselbe immer eine Ebene legen, welche sie in 4 reellen Punkten A, B, C, D schneidet. Durch zwei dieser Punkte, A und B, wird man ferner eine zweite Ebene legen können,

welche die Curve in zwei anderweitigen reellen Punkten E und F schneidet. Da von diesen 6 Punkten keine 3 in einer Geraden (VI. a) und keine 5 in einer Ebene (XIV.) gelegen sein können, so giebt es unter ihnen keinen, welcher mit B, C, E in einer Ebene gelegen sein könnte, weil sonst, wie man sich leicht überzeugen kann, alle 6 Punkte in dieser Ebene liegen müssten. Eine durch B, C, E gelegte Ebene wird somit die Curve noch in einem neuen Punkte G schneiden. Ebenso wird eine durch B, C, F zu legende Ebene die Curve PQ in einem unter den übrigen 4 Punkten noch nicht vorhandenen Punkte H schneiden müssen, weil keiner dieser Punkte in der Ebene BCF enthalten sein kann, wenn sie nicht alle in dieser Ebene liegen. Schliesslich erhält man noch einen neunten Punkt J der Curve, wenn man durch A, C, E eine Ebene legt. Es leuchtet ein, dass die Willkür, welche hinsichtlich der Lage der beiden Ebenen $ABCD$ und $ABEF$ stattfindet, es immer möglich macht, diese Ebenen so zu legen, dass keine zwei der neun Punkte zusammenfallen, in welchem Falle indessen ein solcher Punkt immer als ein doppelter zu betrachten wäre. Von den neun Punkten liegen nun nach dem Vorhergehenden folgende 5 Systeme in einer Ebene:

1) A, B, C, D; 2) $A, B, E F$; 3) B, C, E, G; 4) B, C, F, H; 5) A, C, E, F.
Jede der 5 Ebenen schneidet aber die beiden Flächen P und Q in zwei Kegelschnitten p und q, und die 4 Punkte welche diese Ebene mit der Curve PQ gemein hat, sind natürlich die Durchschnittspunkte der Kegelschnitte p und q. Sind daher die Kreisschnitte von P denen von Q parallel, und folglich nach XIII. die Achsen von p parallel denen von q, so liegen die Durchschnittspunkte von p und q nach V. in einem Kreise. Somit liegen in diesem Falle von den obigen 9 Punkten je 4 in einer Ebene gelegene in einem Kreise. Der Kreis $ABCD$ hat aber mit dem Kreise $ABEF$ die Sehne AB gemein, woraus folgt, dass sich durch beide Kreise eine Kugel legen lässt. Diese Kugel hat mit den Kreisen $BCEG$, $BCFH$, $ACEJ$ respective die Punkte B, C, E; B, C, F; A, C, E gemein, und es müssen demnach auch die Punkte G, H, J auf ihr gelegen sein. Demgemäss liegen aber alle 9 Punkte auf dieser Kugel. Da nun die Durchschnittscurve PQ zweier Flächen zweiter Ordnung mit einer dritten Fläche zweiter Ordnung, und folglich auch mit einer Kugel nach XIV. nur 8 Punkte gemein haben kann, wenn sie nicht ganz in die Fläche fällt, so folgt, dass die Curve PQ ganz auf jener Kugel gelegen sein muss. Hiernach haben wir folgenden Satz:

Sind die Kreisschnitte einer Fläche zweiter Ordnung denen einer andern solchen Fläche parallel, so ist der Durchschnitt beider eine sphärische Curve.

XVI.

Der letzte Satz gilt auch umgekehrt: Ist der Durchschnitt zweier Flächen zweiter Ordnung eine sphärische Curve doppelter Krümmung, so sind

die Kreisschnitte der einen denen der andern parallel. Denn schneidet man die Durchschnittscurve PQ beider Flächen P und Q durch eine Ebene E, so liegen die 4 Durchschnittspunkte in einem Kreise, weil sie Punkte auf einer Kugel sind. Da aber diese 4 Punkte zugleich Durchschnittspunkte der Curven p und q sind, in welchen P und Q von einer Ebene E geschnitten werden, so sind die Achsen von p denen von q parallel (V.). Es werden daher beide Flächen von jeder beliebigen Ebene in zwei Curven geschnitten, von deren Achsen die der einen denen der andern parallel sind. Die Richtungen dieser Achsen sind aber allein abhängig von der Lage ihrer Ebene zu den Kreisschnitten der Flächen P und Q (XII.), und es ergiebt sich hieraus sehr leicht, dass die Kreisschnitte der einen Fläche denen der andern parallel sein müssen.

XVII.

Die Verbindung der beiden letzten Sätze giebt somit den Satz:

Der Durchschnitt zweier Flächen zweiter Ordnung ist immer und nur dann eine sphärische Curve, wenn die Kreisschnitte der einen denen der andern parallel sind.

XVIII.

Folgerungen. 1) Weil bei den Rotationsflächen und dem parabolischen Cylinder jene zwei Systeme paraller Ebenen, welche mit dem Namen der Kreisschnitte bezeichnet worden sind, unter sich parallel sind, und somit in eins zusammenfallen, so folgt, dass solche Flächen sich nur gegenseitig in sphärischen Curven scheiden können. Ist daher der Durchschnitt einer Rotationsfläche zweiter Ordnung mit einer andern Fläche zweiter Ordnung eine sphärische Curve, so ist letztere entweder gleichfalls eine Rotationsfläche, oder ein parabolischer Cylinder.

2) Durch zwei Kreise, welche man als Schnitte zweier nicht paralleler Ebenen mit einer Fläche zweiter Ordnung erhalten kann, lässt sich immer eine Kugel legen. Denn ein System von zwei solchen Ebenen lässt sich auch als eine Fläche zweiter Ordnung betrachten, deren Kreisschnitte der obigen Erklärung zufolge ihnen selbst parallel sind. Hieraus folgt aber ohne Weiteres, dass die beiden Kreise, in welchem sie die Fläche schneiden, eine sphärische Curve sein müssen. — Bei einer Rotationsfläche kann man natürlich durch je zwei in ihr gelegene Kreise eine Kugel legen.

3) Besteht der Durchschnitt zweier Flächen zweiter Ordnung, von deren Kreisschnitten die der einen denen der andern parallel sind, aus zwei Theilen p und q, und ist bekannt, dass der eine dieser Theile, z. B. p, ein Kreis ist, so ist der andere q auch ein Kreis. Denn gesetzt, q sei kein Kreis, und A sei ein nicht in p gelegener Punkt in q, so kann man durch A immer eine Ebene legen, welche die eine beider Flächen in einem Kreise q' schneidet, der mit p eine sphärische Curve bildet. Hiernach kann man

sowohl durch p und q, als auch durch p und q' eine Kugel legen, und beide Kugeln haben den Kreis p und den Punkt A gemein, können also nicht von einander verschieden sein. Somit können aber auch q und q' nicht verschieden sein, weil die Kugel pA mit beiden Flächen denselben Durchschnitt haben muss.

4) Weil zwei Kugelkreise immer eine gemeinschaftliche Chordale haben, welche die Durchschnittslinie ihrer Ebenen ist, so folgt aus 2) ferner, dass auch zwei nicht parallele in einer Fläche zweiter Ordnung gelegene Kreise den Durchschnitt ihrer Ebenen zur gemeinsamen Chordale haben.

XIX.

Die allgemeinste Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung für rechtwinklige Coordinaten ist bekanntlich von der Form

$$F) \quad ax^2 + by^2 + cz^2 + fyz + gzx + hxy + lx + my + nz + s = 0.$$

Die Lage der Fläche gegen das Coordinatensystem ist hierbei vollkommen willkürlich; sie wird es daher auch gegen eine Kugel sein, deren Mittelpunkt der Coordinatenanfang ist. Bezeichnet man aber den Halbmesser dieser Kugel durch r, so ist deren Gleichung in Bezug auf dasselbe Coordinatensystem

$$S) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

und die Gleichungen F) und S) drücken somit in ihrer Verbindung alle Curven aus, in denen eine Fläche zweiter Ordnung von einer Kugel geschnitten werden kann.

Indem man nun aus den Gleichungen F) und S) eine der Variabeln x, y, z eliminirt, erhält man zwischen den beiden andern im Allgemeinen eine Gleichung 4ten Grades, und die rechtwinklige Projection des Durchschnittes beider Flächen auf eine beliebige Ebene ist somit im Allgemeinen eine Curve vierter Ordnung. Allein bei gewissen Lagen der Fläche gegen die Kugel kann es auch vorkommen, dass die rechtwinklige Projection des Durchschnitts beider auf eine durch den Mittelpunkt der letzteren zu legende Ebene E und somit auf jede mit dieser parallele Ebene eine Curve zweiter Ordnung ist, und somit jener Durchschnitt auch als Schnitt eines Cylinders zweiter Ordnung mit der Kugel oder Fläche erhalten werden kann.

Um nun zu ermitteln, unter welchen Umständen dieser Fall eintritt, nehmen wir die Ebene E zur xy-Ebene unseres Coordinatensystems, und lassen seinen Anfang nach wie vor den Mittelpunkt der Kugel sein. Hierdurch erleidet die Gleichung S der Kugel keine Veränderung, während die Bedingung, welche betreffs der Gleichung F erfüllt sein muss, offenbar die ist, dass in ihr z nur in der zweiten Potenz vorkomme, damit durch Elimination von z aus beiden Gleichungen die resultirende Gleichung zwischen x und y wieder vom zweiten Grade sei. Die geometrische Bedeutung dieser *Bedingung* ist aber, dass die Fläche gegen die Ebene E symmetrisch

gelegen, also diese Ebene eine Hauptebene (VII.) der Fläche sein muss. Hiernach haben wir den Satz:

Der Durchschnitt zweier Flächen zweiter Ordnung mit einer Kugel kann nur dann und dann immer als Schnitt eines Cylinders zweiter Ordnung mit der Kugel erhalten werden, wenn eine Hauptebene der Fläche durch den Mittelpunkt der Kugel geht.

XX.

a) Bei einer Rotationsfläche kann ausser der durch ihren Mittelpunkt gehenden, auf der Rotationsachse senkrechten Ebene noch jede durch die Rotationsachse selbst zu legende Ebene als Hauptebene betrachtet werden. Unter diesen Ebenen giebt es daher bei jeder Lage der Fläche gegen die Kugel stets wenigstens eine, welche durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Hieraus folgt aber, dass der Schnitt einer Rotationsfläche zweiter Ordnung mit einer Kugel stets auch als Schnitt eines Cylinders zweiter Ordnung mit dieser Kugel erhalten werden kann.

b) Da ferner nach XVIII. 1) eine Rotationsfläche zweiter Ordnung nur von einer andern Rotationsfläche oder von einem parabolischen Cylinder in einer sphärischen Curve geschnitten werden kann, so folgt, dass der Cylinder zweiter Ordnung, welcher sich durch den Schnitt einer Kugel mit einer Rotationsfläche zweiter Ordnung legen lässt, nur ein Rotations- oder parabolischer Cylinder sein kann.

XXI.

Werden zwei Flächen zweiter Ordnung F und G von jeder dreier nicht paralleler Ebenen in zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen Curven oder in supplementären Hyperbeln geschnitten, so werden sie auch von jeder andern Ebene in zwei solchen Curven f und g geschnitten. Da nun zwei derartige Curven, weil sie Kegelschnitte sind nach IV., nur zwei Punkte mit einander gemein haben können wenn sie nicht ganz zusammenfallen, diese Punkte aber zugleich diejenigen sind, in welchen der Durchschnitt FG der beiden Flächen F und G von der Ebene fg geschnitten wird, so folgt, dass bei solcher Gestalt und Lage der Flächen F und G ihr Durchschnitt FG von einer Ebene nur in zwei Punkten geschnitten werden kann, wenn er nicht ganz in dieser Ebene zu liegen kommt. Es ist daher dieser Durchschnitt FG eine ebene Curve.

Zwei Kreise sind in einer Ebene stets ähnlich und ähnlich gelegen. Sind daher die Kreisschnitte einer Fläche zweiter Ordnung denen einer andern parallel und werden sie von einer mit den Kreisschnitten nicht parallelen Ebene in ähnlichen und ähnlich gelegenen Curven oder in supplementären Hyperbeln geschnitten, so ist ihr Durchschnitt selbst eine ebene Curve.

Demnach schneiden sich ähnliche und ähnlich gelegene Flächen zweiter Ordnung immer in einer ebenen Curve. Ebenso wird ein elliptisches Hyperboloid von einem hyperbolischen, wenn die Asymptotenkegel beider congruent sind und durch parallele Verschiebung zur Deckung gebracht werden können, sowie jedes dieser beiden Hyperboloide von einem Kegel, der seinem Asymptotenkegel congruent und mit ihm ähnlich gelegen ist, in einer ebenen Curve geschnitten.

Anmerkung. Da man die Ebene als eine Kugel betrachten kann, deren Mittelpunkt im Unendlichen liegt, so widerspricht dieser Satz durchaus nicht dem obigen, nach welchem der Durchschnitt zweier solcher Flächen eine sphärische Curve sein müsste.

VIII.

Bestimmung der Trägheitsmomente, namentlich für schiefe Prismen und Pyramiden.

Von Dr. Eduard Zetzsche,
Lehrer an der k. Gewerbschule zu Chemnitz.

I. Trägheitsmoment.

Um einem materiellen Punkte von der Masse m die Beschleunigung p zu ertheilen, bedarf es der Kraft $P=mp$. Bezeichnen wir bei der Drehbewegung um eine feste Achse die Beschleunigung eines Punktes in der Entfernung 1 von der Drehachse als Winkelbeschleunigung mit k, so ist, wenn der materielle Punkt um r von der Drehachse absteht, dessen Beschleunigung $p=kr$, also die Kraft $P=mkr$, und wenn dieselbe an dem Hebelsarme ϱ wirkt, muss ihr Moment für die Drehung $P.\varrho=mkr.r=mkr^2$ sein. Ebenso müsste für ein System materieller Punkte

$$P\varrho=\Sigma(mkr^2)=k\Sigma(mr^2),$$

und für eine im Raume stetig vertheilte Masse

$$P\varrho=k\int r^2 dM$$

sein, worin dM das Differential der Masse bedeutet. Dieser Ausdruck erhält eine mit $P=mp$ übereinstimmende Form, sobald man

$$\int r^2 dM=\varrho^2 M$$

setzt, wobei M eine Masse im Abstande ϱ von der Drehachse; denn dann wäre $P.\varrho = M.k\varrho.\varrho$. Am einfachsten gestaltet es sich, wenn man $\varrho = 1$ und die für diesen Fall nöthige Masse $= T$ setzt; dann ist:

$$1)\qquad T = \varrho^2 M = \int r^2 dM$$

und T ist das als Maas für die Beharrung zu benutzende Trägheits- oder Massenmoment; dasselbe ist mithin nichts Anderes, als die auf Entfernung 1 von der Drehachse reducirte Masse des Systems materieller Punkte.

II. Allgemeine Formeln.

Ist μ die Masse im Volumen 1 und für rechtwinklige Coordinaten $dV = dx\,dy\,dz$ das Volumendifferential, so ist

$$2)\qquad T = \int\int\int r^2 \mu\, dx\, dy\, dz = \int r^2 \mu\, dV.$$

Schliesst nun die Drehachse mit den Coordinatenachsen die Winkel α, β, γ ein, so ist

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma)^2 \text{*)}$$

und

$$3)\qquad T = \sin^2\alpha \int x^2 \mu\, dV + \sin^2\beta \int y^2 \mu\, dV + \sin^2\gamma \int z^2 \mu\, dV$$
$$- 2\left(\cos\beta \cos\gamma \int yz\,\mu\, dV + \cos\alpha \cos\gamma \int xz\,\mu\, dV + \cos\alpha \cos\beta \int xy\,\mu\, dV\right).$$

Wählt man die Drehachse als Achse der z, so wird $\alpha = \beta = 90^0$ und $\gamma = 0$, folglich:

$$4)\qquad T = \int (x^2 + y^2)\,\mu\, dV = \int\int\int (x^2 + y^2)\,\mu\, dx\, dy\, dz.$$

Für ein gemischtes Coordinatensystem endlich, nämlich für $x = r \sin w$ und $y = r \cos w$, ist $dV = r\, dw\, dr\, dz$ zu setzen und

$$5)\qquad T = \int\int\int r^3 \mu\, dw\, dr\, dz.$$

In XI., C) und XII., C) kommen wir nochmals darauf zurück. Die allgemeinen Formeln für ein anderes Coordinatensystem folgen später in VIII. D), IX. D) und X.

Bei homogenen Körpern ist die Dichte überall gleich gross, mithin μ constant und kann vor das Integralzeichen gesetzt werden.

III. Reduction der Trägheitsmomente.

Aus dem Trägheitsmomente T_2 für eine Drehachse parallel zur Achse der z lässt sich bekanntlich das Trägheitsmoment T_1 für eine zur ersten parallelen Achse finden nach der Formel

$$6)\qquad T_1 = T_2 + 2\partial M \xi + \partial^2 M,$$

*) Vergl. Lehrbuch der analytischen Mechanik von Duhamel, deutsch herausgegeben von *Schlömilch*, 2. Aufl., II. Bd., S. 111.

worin ∂ die Entfernung der beiden Achsen, ξ die Entfernung des Schwerpunktes des Systems von der ersten Achse, gemessen in Richtung der Normalen zu den beiden Achsen, und M die gesammte Masse des Systems bedeutet.

Geht aber die erste Achse durch den Schwerpunkt des Systems, so wird $\xi = 0$, und setzen wir in diesem Falle T anstatt T_2, so wird

7) $$T_1 = T + \partial^2 M,$$

also $T_1 > T$.

Dieselbe Formel muss aber auch gelten, wenn die erste Achse zwar nicht durch den Schwerpunkt geht, wohl aber der Schwerpunkt in der Ebene liegt, welche durch die erste Achse sich normal zu der gemeinschaftlichen Normalen auf den beiden Achsen legen lässt; denn auch in diesem Falle ist $\xi = 0$. Der Beweis dafür lässt sich auch aus Formel 7) geben; ist nämlich in Fig. 1, Taf. III., S der Schwerpunkt, $DD // D_1D_1 // D_2D_2$, Ebene $ABC \perp$ auf der Ebene durch DD und D_2D_2, so ist

$$T_1 = T + \overline{AC}^2 \cdot M = T + (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2) . M,$$
$$\underline{T_2 = T + \overline{BC}^2 . M}$$
$$T_1 = T_2 + \overline{AB}^2 . M'$$

und bezeichnen wir der spätern Anwendung wegen AB mit y, so wird

8) $$T_1 = T_2 + y^2 M,$$

und es gilt diese Formel immer, wenn die Parallele DD durch den Schwerpunkt die Senkrechte BC auf AB schneidet.

Setzen wir $BS = e$ und $\angle BCS = \angle \alpha$, so wird $BC = BS . \sin \alpha$ und

9) $$T_1 = T + (y^2 + e^2 \sin^2 \alpha) M,$$

worin y der Abstand eines Punktes in D_1D_1 von der Schwerebene BSC und e der Abstand des Perpendikelfusspunktes B vom Schwerpunkt S ist, sowie α der Neigungswinkel von BS gegen DD, welche parallel D_1D_1 genommen werden muss.

Legt man durch denselben Punkt O zwei Paare rechtwinkliger Coordinatenachsen XX und YY, VV und UU (s. Taf. III, Fig. 2), so ist:

$$\overline{MO}^2 = \overline{ON}^2 + \overline{NM}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QM}^2,$$
$$r^2 = x^2 + y^2 = v^2 + u^2 ;$$

folglich ist auch:

$$\int r^2 \mu \, dV = \int x^2 \mu \, dV + \int y^2 \mu \, dV = \int u^2 \mu \, dV + \int v^2 \mu \, dV,$$

oder:

10) $$T_z = T_x + T_y = T_v + T_u.$$

Ferner ist $u = MQ = ML - LQ = y \cos \alpha - x \sin \alpha$, wenn $\angle VOX = \alpha$ ist, somit auch:

$$\int u^2 \mu \, dV = \sin^2 \alpha \int x^2 \mu \, dV + \cos^2 \alpha \int y^2 \mu \, dV - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int xy \mu \, dV;$$

ist aber der Körper symmetrisch bezüglich der Ebene der xz, so giebt

es zu jedem $+y$ ein gleichgrosses $-y$; desshalb ist dann $\int xy\mu\, dV = 0$*) und

11) $$T_v = \sin^2\alpha\, T_y + \cos^2\alpha\, T_x.$$

In dem Nachfolgenden sollen nun die Trägheitsmomente für verschiedene homogene Körper als einfache Integrale dargestellt werden, und am Schlusse nicht homogene Körper eine kurze Berücksichtigung finden.

IV. Trägheitsmoment bei gleicher Entfernung aller Massentheilchen von der Drehachse.

Die Formel $T_t = \varrho^2 M$ giebt das Trägheitsmoment nicht allein für einen materiellen Punkt (1.), sondern ebenso auch für eine Masse, welche auf einem geraden Cylindermantel vertheilt ist, sobald die Drehachse mit der geometrischen Achse der Cylinderfläche zusammenfällt; ferner auch für eine Masse, welche in einer Linie vertheilt ist, die sich auf der Cylinderfläche beschreiben lässt, wie z. B. in einer Kreislinie, einer Schraubenlinie, u. s. w.

V. Trägheitsmoment ebener Linien für eine Achse in ihrer Ebene.

1) Für eine Gerade AB (s. Taf. III, Fig. 3) bezüglich einer Achse DD durch deren Schwerpunkt S. Bezeichnen wir den Querschnitt der Linie mit f, die Länge AB mit l, also $SA = SB = \frac{l}{2}$, SP mit x, $\angle ASN$ mit α, den Abstand NP des Punktes P von der Drehachse DD mit r und endlich $AC = \frac{l}{2}\sin\alpha$ mit a, so ist:

$$dV = f\,dx; \quad r = x\sin\alpha,$$

folglich $M = l\mu f$ und

$$T = f\mu \sin^2\alpha \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} x^2\,dx = \tfrac{2}{3}\left(\frac{l}{2}\right)^3 f\mu\sin^2\alpha,$$

12) $$T = \tfrac{1}{12} M (l\sin\alpha)^2 = \tfrac{1}{3} M a^2$$

Ist $\alpha = 0$, so ist $T = 0$. Ist $\alpha = 90^0$, so ist

$$(12)\quad T = \tfrac{1}{3} M \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

und nach 7) für eine Achse durch einen Endpunkt der Linie

$$T_1 = T + \left(\frac{l}{2}\right)^2 M = \tfrac{1}{3} M l^2.$$

2) Für eine Gerade AB (s. Taf. III, Fig. 3) bezüglich einer Achse D_1D_1 welche um $SL = y$ von dem Schwerpunkte S der Geraden absteht, wenn die Parallele DD zur Drehachse mit der Geraden den $\angle ASN = \alpha$ einschliesst, ist nach 7)

13) $$T_1 = T + My^2 = \tfrac{1}{3} M\left(\frac{l}{2}\sin\alpha\right)^2 + My^2 = M\left(\tfrac{1}{3}a^2 + y^2\right).$$

*) Sofern μ dem nicht widerstreitet; ist μ unabhängig von y, so ist das Integral sicher $= 0$.

3) Für einen Kreisbogen LN (s. Taf. III, Fig. 4) bezüglich eines Durchmessers als Drehachse. Ist der Halbmesser $CD = R$, die erste und letzte Abscisse des Bogens $CA = z_0$ und $CB = z_1$, die Coordinaten des Bogenelementes $P = ds$ aber $CQ = z$ und $QP = r$, so lautet die Gleichung des Bogens: $R^2 = z^2 + r^2$ oder $r = \sqrt{R^2 - z^2}$ und es ist

$$dr = -\frac{z\,dz}{\sqrt{R^2 - z^2}},$$

sowie

$$dM = \mu dV = \mu f ds = \mu f \sqrt{dz^2 + dr^2} = \mu f dz \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} = \mu f dz \frac{R}{\sqrt{R^2 - z^2}},$$

$$T_1 = \int r^2 dM = \mu f R \int_{z_0}^{z_1} \frac{R^2 - z^2}{\sqrt{R^2 - z^2}}\, dz.$$

Bezeichnen wir nun $\angle PCQ$ mit φ, so ist $z = R\cos\varphi$; $r = \sqrt{R^2 - z^2} = R\sin\varphi$; $dz = -R\sin\varphi\, d\varphi$; mithin

$$M = -\mu f R \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi = \mu f R (\varphi_0 - \varphi_1)$$

$$T_1 = -\mu f R^3 \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin^2\varphi\, d\varphi = \mu f R^3 \int_{\varphi_1}^{\varphi_0} \sin^2\varphi\, d\varphi.$$

Bekanntlich ist aber, wenn m eine ganze, gerade Zahl ist,

14) $$\int \sin^m\varphi\, d\varphi = -\frac{\cos\varphi}{m}\left(\sin^{m-1}\varphi + \frac{m-1}{m-2}\sin^{m-3}\varphi + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{(m-1).(m-3).\ldots.3}{(m-2).(m-4).\ldots.2}\sin\varphi\right) + \frac{(m-1).(m-3).\ldots.3\cdot 1}{m(m-2).(m-4).\ldots.4.2}\varphi,$$

15) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m\varphi\, d\varphi = \frac{(m-1)(m-3)\ldots.3.1}{m(m-2)(m-4)\ldots.4.2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

und

16) $$\int_0^{\pi} \sin^m\varphi\, d\varphi = \frac{(m-1)(m-3)\ldots.3.1}{m(m-2)(m-4)\ldots.4.2}\pi.$$

Es ist demnach:

$$T_1 = \mu f R^3 \left(\frac{\varphi_0 - \cos\varphi_0 \sin\varphi_0}{2} - \frac{\varphi_1 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_1}{2}\right)$$

17) $$T_1 = \tfrac{1}{2} R^2 M - \tfrac{1}{2} R^2 M \frac{\cos\varphi_0 \sin\varphi_0 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_1}{\varphi_0 - \varphi_1},$$

und für den Quadranten, bei welchem $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ ist,

18) $$T_1 = \frac{1}{2} R^2 M.$$

4) **Für eine Parabel**, welche sich um die Parabelachse dreht, ist

$$r^2 = 2pz;\ 2r\,dr = 2p\,dz,\ \frac{dz}{dr} = \frac{r}{p},\ ds = dz\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} = \frac{1}{p}\sqrt{p^2+r^2}\,dr$$

und

$$T_1 = \frac{\mu f}{p}\int r^2\sqrt{p^2+r^2}\,dr = \frac{\mu f}{p}\int 2pz\sqrt{p^2+2pz}\,\frac{p}{r}\,dz$$

$$= \mu f\int_0^z \sqrt{2pz}\sqrt{p^2+2pz}\,dz = \mu f p\left(\frac{p+4z}{4\sqrt{2}} - \frac{p^2}{16}\,lg\ nt\ \frac{4z+p+2\sqrt{2}\sqrt{pz+2z^2}}{p}\right).$$

In ganz ähnlicher Weise lässt sich auch das Trägheitsmoment für ebene Linien bestimmen bezüglich einer Drehachse, welche gegen die Ebene der Linie unter irgend einem Winkel geneigt ist. Auch Linien im Raume lassen sich ähnlich behandeln, nur ist für diese $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ und, wenn die Drehachse mit der Achse der z zusammenfällt, $r^2 = x^2 + y^2$.

VI. Trägheitsmoment ebener Flächen.

Die Fläche habe die constante Dicke δ.

A) Die Drehachse liegt in der Ebene. Der Abstand eines Flächenelementes $dz\,dr$ sei r, also das Massenelement $dM = \mu\,\delta\,dz\,dr$ und $T = \mu\,\delta\int\int r^2\,dz\,dr$.

1) Das Rechteck für eine Seite als Drehachse (s. Taf. III, Fig. 5); sind die Seiten h und b, so ist $M = \mu\,\delta\,b\,h$ und

19) $$T_1 = \mu\,\delta\int_0^h\int_0^b r^2\,dr\,dz = \frac{1}{3}\mu\,\delta\,b\,h^3 = \frac{1}{3}Mh^2.$$

Für eine Achse durch den Schwerpunkt parallel zu einer Seite ergiebt sich daraus:

20) $$T = \frac{1}{3}Mh^2 - M\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}Mh^2.$$

2) Das Dreieck.

a) Das rechtwinklige ABC (s. Taf. III, Fig. 6) für eine Kathete AC als Drehachse; bezeichnen wir $\angle BAC$ mit α, so ist die Gleichung der Geraden AB, sofern man die z von A aus und die r_1 von DD aus zählt, $r_1 = z\tan\alpha$, und wenn $AC = g$, $CB = h$ ist, so ist für den Punkt C auch $h = g\tan\alpha$; ferner ist $M = \frac{1}{2}\mu\,\delta\,b\,h$ und

21) $$T_1 = \mu\,\delta\int_0^g\int_0^{z\tan\alpha} r^2\,dz\,dr = \frac{1}{12}\mu\,\delta\,g^4\tan^3\alpha = \frac{1}{12}\mu\,\delta\,g\,h^3 = \frac{1}{6}Mh^2.$$

b) das *beliebige Dreieck* ABG für eine Seite AG als Drehachse; ist

$BC \perp AG$, $AC = g$, $CG = g_1$ und $CB = h$, so ist $M = \frac{1}{2}\mu\delta(g + g_1)h$ und nach 21)

22) $$T_1 = \tfrac{1}{12}\mu\delta(g + g_1)h^3 = \tfrac{1}{6}Mh^2.$$

c) Das beliebige Dreieck ABE (s. Taf. III, Fig. 6) für eine Achse durch seine Spitze A; es schneide die Seite BE die Achse DD in G, und es sei $AG = g$, $BC = h$, $EF = h_1$; dann ist $M = \frac{1}{2}\mu\delta g(h - h_1)$ und nach 21):

23) $$T_1 = \tfrac{1}{12}\mu\delta g(h^3 - h_1^3) = \tfrac{1}{6}M\frac{h^3 - h_1^3}{h - h_1} = \tfrac{1}{6}M(h^2 + hh_1 + h_1^2).$$

Wäre $EB \parallel DD$, so hätten wir $h = h_1$ und demnach

24) $$T_1 = \tfrac{1}{6}M(3h^2) = \tfrac{1}{2}Mh^2.$$

Von der Richtigkeit dieser Formel kann man sich dadurch überzeugen, dass man das Dreieck in Streifen parallel $BE \parallel DD$ zerlegt; die Länge eines solchen Streifens sei z, seine Breite dr, sein Abstand von DD sei r und endlich $BE = b$; dann ist $\frac{r}{h} = \frac{z}{b}$ und

$$T_1 = \mu\delta\int_0^h z r^2\,dr = \mu\delta\frac{b}{h}\int_0^h r^3\,dr = \tfrac{1}{4}\mu\delta\frac{b}{h}h^4 = \tfrac{1}{2}Mh^2.$$

Wäre $h_1 = -h$, so wäre die Achse eine Schwerlinie und

25) $$T = \tfrac{1}{6}Mh^2.$$

3) Kreisfläche für einen Durchmesser als Achse. Ist in Fig. 4 wieder die Gleichung der Kreislinie $R^2 = r^2 + z^2$, $\angle PCQ = \varphi$, sowie $CA = z_0$, $CB = z_1$ und der Abstand des Flächenelementes $dx\,dz$ von der Drehachse $= x$, endlich $r = \sqrt{R^2 - z^2} = R\sin\varphi$, $z = R\cos\varphi$, also $dz = -R\sin\varphi\,d\varphi$, so ist für die Fläche $ABLN$:

$$M = \mu\delta\int_{z_0}^{z_1} r\,dz = \mu\delta R^2\int_{\varphi_1}^{\varphi_0}\sin^2\varphi\,d\varphi$$

$$T_1 = \mu\delta\int_{z_0}^{z_1}\int_0^r x^2\,dz\,dx = \tfrac{1}{3}\mu\delta\int_{z_0}^{z_1} r^3\,dz = -\tfrac{1}{3}\mu\delta R^4\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sin^4\varphi\,d\varphi$$

$$= \tfrac{1}{3}MR^2\frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_0}\sin^4\varphi\,d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_0}\sin^2\varphi\,d\varphi}.$$

Mit Benutzung der Formeln 15) und 16) ergiebt sich hieraus:

für den Quadranten bei $z_0 = 0$ und $z_1 = R$

26) $$T_1 = \tfrac{1}{4}MR^2,$$

für den Halbkreis und Kreis

27) $$T_1 = \tfrac{1}{4}MR^2.$$

In Fig. 7 (Taf. III) ist für den Halbkreis über der Achse der y nach 26) und 27):

$$T_y = \tfrac{1}{4} M R^2 \text{ und } T_x = \tfrac{1}{4} M R^2$$

folglich nach 11) für die Achse $D_1 D_1$, welche mit der Symmetrieachse XX den $\angle \alpha$ einschliesst:

28) $$T_1 = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\, \tfrac{1}{4} M R^2 = \tfrac{1}{4} M R^2;$$

es ist ja das Moment der beiden gleichen ung gleichliegenden Sectoren ABC und EFC gleich gross. Ist nun S der Schwerpunkt des Halbkreises, so ist $GS = CS \,.\, \sin\alpha = \frac{4R}{3\pi} \sin\alpha$ und desshalb das Trägheitsmoment für die Achse DD durch den Schwerpunkt:

29) $$T = T_1 - \left(\frac{4R}{3\pi}\sin\alpha\right)^2 M = \left(\tfrac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\sin^2\alpha\right) M R^2.*)$$

Für einen ringförmigen Kreissector $ABCE$ (s. Taf. III, Fig. 8), in welchem $FC = R_0$ und $FB = R$ ist, wäre $dM = \mu\delta\, r\, dr\, d\omega$; ist nun $\angle PFG = \omega$, so wäre

$$M = \mu\delta \int_{R_0}^{R}\int_{\omega_0}^{\omega_1} r\, dr\, d\omega = \tfrac{1}{2}\mu\delta\,(R^2 - R_0^2)\,(\omega_1 - \omega_0)$$

$$T_1 = \int (r \sin\omega)^2\, dM = \mu\delta \int_{R}^{R}\int_{\omega_0}^{\omega_1} r^3 \sin^2\omega\, dr\, d\omega = \tfrac{1}{4}\mu\delta\,(R^4 - R_0^4)\int_{\omega_0}^{\omega_1} \sin^2\omega\, d\omega$$

30) $$T_1 = \tfrac{1}{2}(R^2 + R_0^2)\, M \frac{\int_{\omega_0}^{\omega_1} \sin^2\omega\, d\omega}{\omega_1 - \omega_0}$$
$$= \tfrac{1}{4}(R^2 + R_0^2)\, M \left(1 - \frac{\cos\varphi_0 \sin\varphi_0 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_1}{\omega_1 - \omega_0}\right).$$

Für den Quadranten ist $\omega_0 = \varphi_1 = 0,\ \omega_1 = \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, folglich:

31) $$T_1 = \tfrac{1}{4} M (R^2 + R_0^2)$$

und wenn $R_0 = 0$ ist, so ist wieder $T_1 = \tfrac{1}{4} M R^2$.

In Fig. 6 sei $LP = r$, $\angle PLG = PHL = u$; $LH = 2R = c$; dann ist $r = c \sin u$, also für den Halbkreis bezüglich LG als Drehachse

$$T_1 = \int (r \sin u)^2 \,.\, dM = \mu\delta \int_0^{r}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} r^3 \sin^2 u\, dr\, du = \tfrac{1}{4}\mu\delta\, c^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 u\, du = \tfrac{5}{16} M c^2 = \tfrac{5}{4} M R^2$$

in Uebereinstimmung mit 27).

*) Andere Anwendungen der Formel 11) finden sich in Weisbach, Mechanik I, S. 365 flg.; woselbst auch nachgewiesen wird, dass das Trägheitsmoment eines regelmässigen Vielecks für jede Achse durch den Mittelpunkt gleich gross ist, nämlich $T = \frac{F}{4}(h^2 + \tfrac{1}{12}s^2)$, wenn F der Flächeninhalt des Vielecks, s eine Vieleckseite und h deren Abstand *vom Mittelpunkte*.

4) **Ellipsenfläche für eine Ellipsenachse als Drehachse.** Ist in Fig. 9, Taf. III, $CA = b$, $NP = x$, $NQ = r$, $CB = a$, $CN = z$, $\angle P_1 CN = \varphi$, so ist

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1,\ z = a \cos\varphi,\ x = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - z^2} = b \sin\varphi,\ dz = - a \sin\varphi\, d\varphi$$

und für $EFGH$

$$M = \mu\delta \int_0^x \int_{z_0}^{z_1} dr\, dz = \mu\delta \frac{b}{a} \int_{z_0}^{z_1} \sqrt{a^2 - z^2}\, dz = \mu\delta\, b a \int_{\varphi_1}^{\varphi_0} \sin^2\varphi\, d\varphi$$

$$T_1 = \mu\delta \int_0^x \int_{z_0}^{z_1} r^2\, dr\, dz = \tfrac{1}{3}\mu\delta \int_{z_0}^{z_1} x^3\, dz = \tfrac{1}{3}\mu\delta\, b^3 a \int_{\varphi_1}^{\varphi_0} \sin^4\varphi\, d\varphi$$

$$32)\quad T_1 = \tfrac{1}{3} M b^2 \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_1} \sin^4\varphi\, d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_0} \sin^2\varphi\, d\varphi}$$

und für den Quadranten, die halbe und die ganze Ellipsenfläche

$$33)\quad T_1 = \tfrac{1}{4} M b^2,$$

worin M beziehentlich die Masse des Quadranten, der halben oder ganzen Ellipse bedeutet.

Die der Formel 28) entsprechende Formel würde lauten:

$$T_1 = \tfrac{1}{4} M (b^2 \sin^2\alpha + a^2 \cos^2\alpha),$$

wobei die Halbellipse symmetrisch gegen b liegt.

5) **Parabelfläche**, begrenzt von der Parabelachse, den beiden zu den Abscissen z_0 und h gehörigen Ordinaten x_0 und b, so wie dem zwischenliegenden Parabelbogen, dessen Gleichung $x = \sqrt{2pz}$ sein möge.

a) Parabelachse als Drehachse:

$$M = \mu\delta \int_{z_0}^{h} x\, dz = \mu\delta \sqrt{2p} \int_{z_0}^{h} \sqrt{z}\, dz = \tfrac{2}{3}\mu\delta\sqrt{2p}\left(\sqrt{h}^3 - \sqrt{z_0}^3\right)$$

$$T_1 = \mu\delta \int_{z_0}^{h} \int_0^x r^2\, dz\, dr = \tfrac{1}{3}\mu\delta \sqrt{2p}^3 \int_{z_0}^{h} \sqrt{z}^3\, dz = \tfrac{2}{15}\mu\delta\sqrt{2p}^3\left(\sqrt{h}^5 - \sqrt{z_0}^5\right)$$

$$34)\quad T_1 = \tfrac{1}{5} M 2p \frac{\sqrt{h}^5 - \sqrt{z_0}^5}{\sqrt{h}^3 - \sqrt{z_0}^3}$$

oder, wenn $z_0 = 0$ ist:

$$35)\quad T_1 = \tfrac{2}{5} p h M = \tfrac{1}{5} M b^2.$$

b) Letzte Ordinate als Drehachse und zugleich $z_0 = 0$, $z = \dfrac{x^2}{2p}$:

$$T_1 = \mu\delta \int\limits_0^b \int\limits_0^{h-z} r^2\,dx\,dr = \tfrac{1}{3}\mu\delta \int\limits_0^b (h-z)^3\,dx$$

$$= \tfrac{1}{3}\mu\delta\Big(h^3\int\limits_0^b dx - 3h^2\int\limits_0^b z\,dx + 3h\int\limits_0^b z^2\,dx - \int\limits_0^b z^3\,dx$$

$$= \tfrac{1}{3}\mu\delta\,(h^3 b - h^3 b + \tfrac{3}{5}h^3 b - \tfrac{1}{7}h^3 b) = \tfrac{1}{3}\mu\delta\,\tfrac{16}{35}\,b h^3$$

$$M = \tfrac{2}{3}\mu\delta\,b h$$

36) $\quad T_1 = \frac{8}{35} M h^2.$

c) Für eine Achse durch den Schwerpunkt parallel zur letzten Ordinate ist mit Benutzung von 7)

37) $\quad T = T_1 - (\tfrac{2}{5}h)^2 M = (\tfrac{8}{35} - \tfrac{4}{25})\,M h^2 = \tfrac{12}{175}\,M h^2.$

B) Die Drehachse steht senkrecht auf der Ebene. Der Abstand des Flächenelementes $dx\,dy$ von der Drehachse ist $= \sqrt{x^2 + y^2}$, das Massenelement $dM = \mu\delta\,dx\,dy$, also

$$T = \mu\delta \int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{y_0}^{y_1} (x^2 + y^2)\,dx\,dy = M\,\frac{\int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{y_0}^{y_1}(x^2+y^2)\,dx\,dy}{\int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{y_0}^{y_1} dx\,dy}\,.$$

1) Rechteck für eine Drehachse durch den Schwerpunkt; sind die Seiten a und b, die Diagonale $= \partial$, ihre Hälfte $\frac{\partial}{2} = \partial_1$, so ist

38) $$T = M\,\frac{\int\limits_{-\frac{1}{2}a}^{+\frac{1}{2}a}\int\limits_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b}(x^2+y^2)\,dx\,dy}{\int\limits_{-\frac{1}{2}a}^{+\frac{1}{2}a}\int\limits_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} dx\,dy} = \tfrac{1}{12}M\,(a^2 + b^2) = \tfrac{1}{3}M\partial_1^2.$$

2) Dreieck für eine Achse durch eine Ecke.

a) Rechtwinklig bei C in Fig. 10, Taf. III; $AC = b$, $CB = a$, $AB = c$, Gleichung der Hypotenuse AB in der Ebene XY: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$; $M = \frac{1}{2}ab\,\mu\delta$

$$T_1 = \mu\delta\int\limits_0^a\int\limits_0^y (x^2+y^2)\,dx\,dy = \tfrac{1}{4}\mu\delta\,ab\,(a^2 + \tfrac{1}{3}b^2)$$

39) $\quad T_1 = \tfrac{1}{2}M\,(a^2 + \tfrac{1}{3}b^2) = \tfrac{1}{3}M\Big(a^2 + \frac{c^2}{2}\Big).$

b) Beliebiges Dreieck EBA (s. Taf. III, Fig. 10); zieht man $BC \perp EA$, so ist, wenn man $AB = c_1$, $EB = c_2$, $AC = b_1$, $EC = b_2$, $BC = a$ und die

den Dreiecken CBA und CBE entsprechenden Massen mit M_1 und M_2 bezeichnet werden, nach 39)

$$T_1 = \tfrac{1}{3} M_1 \left(a^2 + \frac{c_1^2}{2}\right) + \tfrac{1}{3} M_2 \left(a^2 + \frac{c_2^2}{2}\right) = \tfrac{1}{3} M a^2 + \tfrac{1}{6} (M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2)$$

$$b_1 + b_2 = b;\ M_1 + M_2 = M;\ M_1 : M_2 = b_1 : b_2;\ c_1^2 = a^2 + b_1^2,$$

$$T_1 = \tfrac{1}{3} M \left[a^2 + \frac{1}{2b} (b_1 c_1^2 + b_2 c_2^2)\right] = \tfrac{1}{3} M \left(a^2 + \tfrac{1}{2} a^2 + \frac{b_1^3 + b_2^3}{2b}\right)$$

40) $T_1 = \tfrac{1}{2} M a^2 + \tfrac{1}{6} M (b_1^2 - b_1 b_2 + b_2^2)$.

c) Gleichschenkliges Dreieck; wenn $c_1 = c_2 = c$ oder $b_1 = b_2 = \tfrac{1}{2} b$ und $M_1 = M_2 = \tfrac{1}{2} M$ ist, so liefert 40)

41) $$T_1 = \tfrac{1}{3} M \left(a^2 + \frac{c^2}{2}\right) = \tfrac{1}{2} M \left[a^2 + \tfrac{1}{3} \left(\frac{b}{2}\right)^2\right],$$

und für eine Achse durch den Schwerpunkt:

(41) $$T = T_1 - (\tfrac{2}{3} a)^2 M = \tfrac{1}{3} M \left(\frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{3}\right) = \tfrac{1}{6} M \left[\frac{a^2}{3} + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right].$$

Für einen Kreissector wäre $a = c = R$, $T_1 = \tfrac{1}{2} M R^2$.

3) Kreisringsector für eine Drehachse durch den Mittelpunkt F (Fig. 8, Taf. III, vergl. (30).

$$dM = \mu \delta r \, d\omega \, dr;\ M = \tfrac{1}{2} \mu \delta (R^2 - R_0^2) (\omega_1 - \omega_0)$$

42) $$T_1 = \mu \delta \int_{R_0}^{R} \int_{\omega_0}^{\omega_1} r^3 \, dr \, d\omega = \tfrac{1}{4} \mu \delta (\omega_1 - \omega_0) (R^4 - R_0^4) = \tfrac{1}{2} M (R^2 + R_0^2).$$

Für den Vollkreis ist $R_0 = 0$, also

43) $$T = \tfrac{1}{2} M R^2.$$

4) Ellipsenfläche für eine Drehachse durch den Mittelpunkt C der Ellipse (Fig. 9, Taf. III). Es sei $CN = x$, $CB = CP_1 = a$, $CG = x_0$, $CH = x_1$, $CA = b$, $NP = y_1$, $\angle P_1 CN = \varphi$, also $x = a \cos \varphi$, und die Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1;\ y_1 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} = b \sin \varphi,$$

dann ist für die Fläche $FGHE$:

$$M = \mu \delta \int_{x_0}^{x_1} \int_0^{y_1} dx \, dy = \mu \delta \frac{b}{a} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \mu \delta \frac{b}{a} \int_{\varphi_1}^{\varphi_0} a^2 \sin^2 \varphi \, d\varphi$$

$$T_1 = \mu \delta \int_{x_0}^{x_1} \int_0^{y_1} (x^2 + y^2) \, dx \, dy = \mu \delta \int_{x_0}^{x_1} x^2 y_1 \, dx + \tfrac{1}{3} \mu \delta \int_{x_0}^{x_1} y_1^3 \, dx$$

$$= \mu \delta \left(b a^3 \int_{\varphi_1}^{\varphi_0} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi + \tfrac{1}{3} a b^3 \int_{\varphi_1}^{\varphi_0} \sin^4 \varphi \, d\varphi\right)$$

$$= \mu \delta b a^3 \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_0} \sin^2 \varphi \, d\varphi + \left(\tfrac{1}{3} \frac{b^2}{a^2} - 1\right) \int_{\varphi_1}^{\varphi_0} \sin^4 \varphi \, d\varphi\right].$$

Für den Ellipsenquadrant ACB ist $\varphi_1 = 0$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, also:

44) $$T_1 = \tfrac{1}{4} M (a^2 + b^2),$$
welche Formel auch für die halbe und ganze Ellipsenfläche gilt.

5) Parabelfläche vom Scheitel aus bis zur Ordinate $b = \sqrt{2ph}$.

a) Für eine Drehachse durch den Durchschnitt der letzten Ordinate mit der Parabelachse erhalten wir nach 10) aus 35) und 36):

45) $$T_1 = \tfrac{1}{5} M (b^2 + \tfrac{8}{7} h^2).$$

b) Für eine Drehachse durch den Scheitel der Parabel, deren Gleichung $y_1 = \sqrt{2px}$ ist, wäre

$$M = \mu\delta \int_0^h \int_0^{y_1} dx\, dy = \mu\delta \sqrt{2p} \int_0^h \sqrt{x}\, dx = \tfrac{2}{3} \mu\delta b h$$

$$T_1 = \mu\delta \int_0^h \int_0^{y_1} (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \mu\delta \int_0^h y_1 x^2\, dx + \tfrac{1}{3} \mu\delta \int_0^h y_1^3\, dx$$
$$= \mu\delta (\tfrac{2}{7} b h^3 + \tfrac{2}{15} b^3 h)$$

46) $$T = 3M (\tfrac{1}{7} h^2 + \tfrac{1}{15} b^2) = \tfrac{1}{5} M (b^2 + \tfrac{15}{7} h^2).$$

c) Für eine Drehachse durch den Schwerpunkt der Parabel, welcher um $\frac{3}{5} h$ vom Scheitel absteht, ist

47) $$T = \tfrac{1}{5} M (b^2 + \tfrac{15}{7} h^2) - (\tfrac{3}{5} h)^2 M = \tfrac{1}{5} M (b^2 + \tfrac{12}{35} h^2),$$
wobei jedoch die Fläche auf beiden Seiten der Parabelachse genommen ist, weil sonst der Schwerpunkt nicht in der Parabelachse läge.

C) Die Drehachse DD ist unter dem Winkel α gegen die Ebene geneigt. In der Ebene legen wir ein rechtwinkliges Achsenkreuz so, dass die Achse der x, mit der Drehachse DD den Neigungswinkel $DAX = \alpha$ einschliesst,

a) Zerlegen in Fig. 11, Taf. III, die Fläche NN' in Streifen parallel zu XX'; der Streifen OQ z. B. gehöre zu der Abscisse $AB = y$ und habe die Länge $OQ = OB + BQ = x + x'$ und die Breite dy, also die Masse $dM = \mu\delta (x + x')\, dy$; sein Schwerpunkt S' aber liegt in der Mitte, und von B entfernt um $BS' = e = BO - SO = x - \frac{x + x'}{2} = \frac{x - x'}{2}$; nun ist das Trägheitsmoment des Streifens für eine Achse $D'D' \parallel DD$ durch den Schwerpunkt S' nach 12):

$$T' = \tfrac{1}{12} dM (x + x')^2 \sin^2\alpha,$$
denn es ist ja auch $\angle D'S'O = \angle BS'C = \angle DAX = \alpha$; demnach ist das Trägheitsmoment des Streifens für die Achse DD selbst nach 9)

$$T'' = T' + (y^2 + e^2 \sin^2\alpha)\, dM = \left\{\left[\tfrac{1}{12} (x + x')^2 + \left(\frac{x - x'}{2}\right)^2\right] \sin^2\alpha + y^2\right\} dM$$
$$= [\tfrac{1}{3} \sin^2\alpha\, (x^2 - x x' + x'^2) + y^2]\, dM,$$
woraus sich als Trägheitsmoment der ganzen Figur NN' ergiebt:

$$48)\quad T_1 = \Sigma T'' = \mu\delta\int[\tfrac{1}{3}\sin^2\alpha\,(x^2 - xx' + x'^2) + y^2]\,(x + x')\,dy$$
$$= \mu\delta\int y^2\,(x + x')\,dy + \tfrac{1}{3}\mu\delta\sin^2\alpha\int(x^3 + x'^3)\,dy.$$

a) Sind x und x' constant, so wird:

$$49)\quad T_1 = \mu\delta\,(x + x')\,[\tfrac{1}{3}(x^2 - xx' + x'^2)\sin^2\alpha\int dy + \int y^2\,dy]$$

z. B. beim Rechteck, dessen Seiten mit den Achsen der x und y parallel laufen, sei $x = b_0$, $x' = b_1$, $b_0 + b_1 = b$ und $-h_0$ und h_1 die Integrationsgrenzen für y, $h_0 + h_1 = h$, also $M = \mu\delta hb$; dann ist

$$T_1 = \mu\delta b\,\frac{h_1 + h_0}{3}\left[(b_1^2 - b_0 b_1 + b_0^2)\sin^2\alpha + \frac{h_1^3 + h_0^3}{h_1 + h_0}\right].$$

Geht die Drehachse durch den Schwerpunkt des Rechtecks, so ist $h_1 = h_0 = \frac{h}{2}$ und $b_1 = b_0 = \frac{b}{2}$, mithin

$$50)\quad T_1 = \tfrac{1}{3}M\left[\left(\frac{b}{2}\sin\alpha\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2\right] = \tfrac{1}{12}M\,(b^2\sin^2\alpha + h^2),$$

welche Formel in 38) übergeht, sobald $\alpha = 90^0$, und a für h, dagegen in 20), sobald $\alpha = 0$ gesetzt wird.

b) Ist die Fläche symmetrisch bezüglich YY', so ist $x' = x$ und

$$51)\quad T_1 = \mu\delta\,2\int(\tfrac{1}{3}\sin^2\alpha\,.\,x^2 + y^2)\,x\,dy.$$

1) Beim gleichschenkeligen Dreiecke für eine Achse durch dessen Spitze, wenn dessen Grundlinie b parallel zu XX', also die Höhe a in YY' liegt, ist $x = \frac{b}{2a}y$

$$T_1 = \frac{2\mu\delta b}{2a}\left[\tfrac{1}{3}\sin^2\alpha\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + 1\right]\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} y^3\,dy = \frac{\mu\delta ba}{4}\,(\tfrac{1}{12}b^2\sin^2\alpha + a^2)$$

$$M = 2\mu\delta\int x\,dy = \tfrac{1}{2}\mu\delta ba$$

$$52)\quad T_1 = \tfrac{1}{2}M\,(\tfrac{1}{12}b^2\sin^2\alpha + a^2),$$

welche Formel in 41) übergeht, sobald $\alpha = 90^0$ wird, dagegen in 24), wenn $\alpha = 0$ und h für a gesetzt wird.

2) Beim Halbkreis, dessen Durchmesser mit XX' zusammenfällt, für eine Achse durch den Mittelpunkt. Hier ist

$$x = \sqrt{R^2 - y^2} = R\sin\varphi;\ y = R\cos\varphi;\ dy = -R\sin\varphi\,d\varphi$$

$$T_1 = -2\mu\delta\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\tfrac{1}{3}R^2\sin^2\varphi\sin^2\alpha + R^2\cos^2\varphi)\,R^2\sin^2\varphi\,d\varphi$$

$$= 2\mu\delta R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(\tfrac{1}{3}\sin^2\alpha - 1)\sin^4\varphi + \sin^2\varphi]\,d\varphi = \mu\delta R^4\pi\left(\frac{\sin^2\alpha - 3}{8} + \tfrac{1}{2}\right)$$

$$M = \tfrac{1}{2}\mu\delta R^2\pi$$

$$53)\quad T_1 = \tfrac{1}{4}MR^2\,(\sin^2\alpha + 1),$$

welche Formel für $\alpha = 90^0$ in 42) (für $R_0 = 0$), und für $\alpha = 0$ in 27) übergeht.

3) Bei der Parabelfläche zu beiden Seiten der Parabelachse, welche mit der Achse der y zusammenfällt, für eine Drehachse durch den Scheitel der Parabel. Hier ist $x = \sqrt{2py}$, mithin

$$T_1 = 2\mu\delta \int_0^h (\tfrac{1}{3} 2py \sin^2\alpha + y^2)\sqrt{2py}\, dy$$

$$= 2\mu\delta\sqrt{2p}\,[\tfrac{2}{3} p \sin^2\alpha \int_0^h y\sqrt{y}\, dy + \int_0^h y^2\sqrt{y}\, dy]$$

$$= 2\mu\delta\sqrt{2p}\,[\tfrac{4}{15} p \sin^2\alpha\, h^2\sqrt{h} + \tfrac{2}{7} h^3\sqrt{h}]$$

$$M = \tfrac{4}{3}\mu\delta\sqrt{2p}\, h\sqrt{h} = \tfrac{4}{3}\mu\delta h b$$

54) $T_1 = 3M\,[\tfrac{2}{15} ph \sin^2\alpha + \tfrac{1}{7} h^2] = \tfrac{1}{5} M\,[b^2 \sin^2\alpha + \tfrac{15}{7} h^2]$,

woraus für $\alpha = 90^0$ sich 46) ergiebt.

Für eine parallele Achse durch den Schwerpunkt wäre

55) $$T = T_1 - (\tfrac{3}{5} h)^2 M = \tfrac{1}{5} M\,(b^2 \sin^2\alpha + \tfrac{12}{35} h^2),$$

in Uebereinstimmung mit 47) und 37).

c) Die Figur ist unsymmetrisch gegen YY'.

1) Parabelfläche auf der einen Seite der mit der Achse der y zusammenfallenden Parabelachse für eine Drehachse durch den Scheitel der Parabel. Hier ist $x' = 0$, $x = \sqrt{2py}$, $b = \sqrt{2ph}$, $M = \tfrac{2}{3}\mu\delta b h$,

$$T_1 = \mu\delta\sqrt{2p}\int_0^h (\tfrac{1}{3} 2py \sin^2\alpha + y^2)\sqrt{y}\, dy = 3M\,(\tfrac{1}{15} b^2 \sin^2\alpha + \tfrac{1}{7} h^2)$$

56) $T_1 = \tfrac{1}{5} M\,(b^2 \sin^2\alpha + \tfrac{15}{7} h^2)$.

2) Für ein beliebiges Dreieck für eine Achse durch eine Ecke B (s. Taf. III, Fig. 13), wenn die gegenüberliegende Seite CE parallel zur Achse der x liegt. Hier sei in Uebereinstimmung mit VI. B, 2. b):

$$x = \frac{b_1}{a} y, \quad x' = \frac{b_2}{a} y,$$

$$T_1 = \mu\delta\,\frac{b_1 + b_2}{a}\left(\tfrac{1}{3}\frac{b_1^2 - b_1 b_2 + b_2^2}{a^2} \sin^2\alpha + 1\right)\int_0^a y^3\, dy$$

$$M = \tfrac{1}{2}\mu\delta a\,(b_1 + b_2)$$

57) $$T_1 = \tfrac{1}{2} M\,[a^2 + \tfrac{1}{3}(b_1^2 - b_1 b_2 + b_2^2)\sin^2\alpha],$$

übereinstimmend mit 40), 24) und 52).

3) Beim Halbkreis, dessen Durchmesser mit YY' zusammenfällt, ist $x' = 0$, $x = \sqrt{R^2 - y^2} = R\sin\varphi$, $y = R\cos\varphi$, $M = \tfrac{1}{2}\mu\delta\pi R^2$, also für eine Drehachse durch den Mittelpunkt

$$T_1 = -\mu\delta R^2 \int_\pi^0 (\tfrac{1}{3} R^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi + R^2 \cos^2\varphi) \sin^2\varphi \, d\varphi$$

$$= \mu\delta R^4 \int_0^\pi [(\tfrac{1}{3}\sin^2\alpha - 1)\sin^4\varphi + \sin^2\varphi] \, d\varphi,$$

was mit Benutzung von 16) giebt:

58) $$T_1 = \tfrac{1}{4} M R^2 (\sin^2\alpha + 1),$$

gleichlautend mit 53), wie sich von selbst versteht.

β) Zerlegen wir in Fig. 12 die Figur NN' in Streifen parallel zu YY'; der Streifen GK gehöre zur Abscisse $AL = x$ und habe die Länge $GK = LK + LG = y + y'$, die Breite dx, also die Masse $dM = \mu\delta(y + y')\,dx$; sein Schwerpunkt S' ist dann von der X Achse um $LS' = LK - S'K = y - \frac{y + y'}{2} = \frac{y - y'}{2}$ entfernt; für eine Achse $D'D'$ durch S' parallel zu DD ist dann das Trägheitsmoment des Streifens (weil $\angle DAY = \angle D'S'K = 90^0$) nach 12)

$$T' = \tfrac{1}{12}\, dM (y + y')^2;$$

ziehen wir nun $S'B \,//\, LA$, so ist $S'B = LA = x$, $AB = LS' = \frac{y - y'}{2}$ und nach 9) das Trägheitsmoment des Streifens für die Achse DD

$$T'' = T' + (\overline{AB}^2 + \overline{BS'}^2 \,.\, \sin^2\alpha)\, dM = \left[\frac{(y + y')^2}{12} + \left(\frac{y - y'}{2}\right)^2 + x^2 \sin^2\alpha\right] dM$$
$$= [\tfrac{1}{3}(y^2 - y y' + y'^2) + x^2 \sin^2\alpha]\, dM;$$

das Trägheitsmoment der ganzen Figur NN' aber für die Achse DD ist:

59) $$T_1 = \Sigma T'' = \mu\delta \int [\tfrac{1}{3}(y^2 - y y' + y'^2) + x^2 \sin^2\alpha](y + y')\,dx =$$
$$= \tfrac{1}{3}\mu\delta \int (y^3 + y'^3)\,dx + \mu\delta \sin^2\alpha \int (y + y')\,x^2\,dx.$$

a) Sind y und y' constant, so wird:

60) $$T_1 = \mu\delta(y + y')\,[\tfrac{1}{3}(y^2 - y y' + y'^2)\int dx + \int x^2 \sin^2\alpha\,dx]$$

z. B. beim Rechteck, dessen Seiten parallel mit den Achsen der x und y laufen, sei $y = h_0$, $y' = h_1$, $h_0 + h_1 = h$ und b_0 und b_1 die Integrationsgrenzen für x, $b_0 + b_1 = b$, also $M = \mu\delta bh$; dann ist

$$T_1 = \mu\delta h \frac{b_1 + b_0}{3}\left[h_1^2 - h_1 h_0 + h_0^2 + \frac{b_1^3 + b_0^3}{b_1 + b_0}\sin^2\alpha\right]$$

und wenn die Drehachse durch den Schwerpunkt des Rechtecks geht, wobei $h_1 = h_0 = \frac{h}{2}$ und $b_1 = b_0 = \frac{b}{2}$, so ist

$$T = \tfrac{1}{12} M (h^2 + b^2 \sin^2\alpha),$$

gleichlautend mit 50).

b) Ist die Figur symmetrisch gegen XX', so ist $y' = y$ und

61) $$T_1 = 2\mu\delta\int(\tfrac{1}{3}y^2 + x^2 \sin^2\alpha)\, y\, dx,$$

z. B. beim **Halbkreis**, dessen Durchmesser mit YY' zusammenfällt, für eine Achse durch den Mittelpunkt. Hier ist

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} = R\sin\varphi,\quad x = R\cos\varphi,\quad dx = -R\sin\varphi\, d\varphi,$$

folglich

$$T_1 = 2\mu\delta\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\tfrac{1}{3}R^2\sin^2\varphi + R^2\cos^2\varphi\sin^2\alpha)\, R^2\sin^2\varphi\, d\varphi$$

$$= 2\mu\delta R^4\left[(\tfrac{1}{3} - \sin^2\alpha)\tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{2}\sin^2\alpha\right]\frac{\pi}{2}$$

$$M = \tfrac{1}{2}\mu\delta R^2\pi$$

$$T_1 = \tfrac{1}{4}MR^2(1 + \sin^2\alpha),$$

was wir bereits in 58) gefunden haben.

c) **Die Figur sei unsymmetrisch gegen** XX'.

1) **Parabelfläche** auf der einen Seite der Parabelachse, welche mit XX' zusammenfällt, für eine Achse durch den Scheitel; hier ist

$$y' = 0,\ y = \sqrt{2px},\ b = \sqrt{2ph},\ M = \tfrac{2}{3}\mu\delta bh$$

und

$$T_1 = \mu\delta\int_0^h(\tfrac{1}{3}2px + x^2\sin^2\alpha)\sqrt{2px}\, dx = \mu\delta(\tfrac{1}{3}.\tfrac{2}{5}.2ph.h + \tfrac{2}{7}h^3)\sqrt{2ph}$$

62) $$T_1 = \tfrac{1}{5}M(b^2 + \tfrac{15}{7}h^2\sin^2\alpha),$$

welche Formel für $\alpha = 0$ in 35) und für $\alpha = 90^0$ in 40) übergeht.

2) **Parabelfläche** zu beiden Seiten der Parabelachse, welche mit YY' zusammenfällt, für eine Drechachse durch den Scheitel der Parabel; hier ist $y' = -\dfrac{x^2}{2p}$, $y = h = \dfrac{b^2}{2p}$,

$$M = \tfrac{4}{3}\mu\delta bh,$$

$$T_1 = \tfrac{1}{3}\mu\delta\int_{-b}^{+b}\left(h^3 - \frac{x^6}{8p^3}\right)dx + \mu\delta\sin^2\alpha\int_{-b}^{+b}\left(h - \frac{x^2}{2p}\right)x^2\, dx$$

$$= \tfrac{4}{3}\mu\delta bh(\tfrac{3}{7}h^2 + \tfrac{1}{5}b^2\sin^2\alpha) = \tfrac{1}{5}M(\tfrac{15}{7}h^2 + b^2\sin^2\alpha),$$

gleichlautend mit 54).

VII. Trägheitsmoment gerader prismatischer Körper,

deren Länge l, deren Querschnitt $= F$, und deren Masse demnach $M = \mu Fl$ ist.

A) **Die Drehachse sei parallel zur geometrischen Achse des Körpers**; dann ist

$$M = \mu \int dV = \mu \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{0}^{l} dx\, dy\, dz = \mu l \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} dx\, dy,$$

$$T_1 = \int r^2\, dM = \mu \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{0}^{l} (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz = \mu l \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} (x^2 + y^2)\, dx\, dy,$$

$$63) \quad T_1 = M \frac{\int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_0} (x^2 + y^2)\, dx\, dy}{\int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} dx\, dy} = M \frac{T'}{M'} = \varrho_0^2 M,$$

worin $T_1' = \varrho_0^2 M'$ das nach VI. B) für die Masse M' eines Querschnittes (parallel zu den Grundflächen) in Bezug auf eine Drehachse, welche mit der obigen zusammenfällt, zu bestimmende Trägheitsmoment bedeutet. Verstehen wir aber in den in VI. B) gefundenen Formeln unter M die Masse eines geraden Prismas von der Länge l über der betreffenden Figur als Querschnitt, so geben die dort gefundenen Trägheitsmomente [38) bis 47)] zugleich das Trägheitsmoment des Prismas. Also z. B.:

Kreiscylinder, Drehachse durch den Mittelpunkt der Grundfläche

$$64) \quad T = \tfrac{1}{2} M R^2;$$

Hohler Kreiscylinder, Drehachse durch den Mittelpunkt der Grundfläche

$$65) \quad T = \tfrac{1}{2} M (R^2 + R_0^2);$$

Elliptischer Cylinder, Drehachse durch den Mittelpunkt der Grundfläche

$$66) \quad T = \tfrac{1}{4} M (a^2 + b^2);$$

Parallelepiped, Drehachse durch den Schwerpunkt der Grundfläche

$$67) \quad T = \tfrac{1}{3} M \hat{c}_1^2;$$

Dreiseitiges Prisma, eine Kante als Drehachse

$$68) \quad T_1 = \tfrac{1}{2} M \left(a^2 + \frac{b_1^2 - b_1 b_2 + b_2^2}{3}\right);$$

Prisma mit regelmässiger Figur als Grundfläche, Drehachse durch deren Mittelpunkt

$$69) \quad T = \tfrac{1}{6} M \left(a^2 + \frac{c^2}{2}\right);$$

Prisma, dessen Grundfläche von zwei congruenten Parabeln begrenzt ist, die mit ihren letzten Coordinaten an einander stossen, Drehachse durch den Schwerpunkt der Grundfläche

$$(69) \quad T = \tfrac{1}{5} M (b^2 + \tfrac{8}{7} h^2).$$

B) Die Drehachse DD (s. Taf. III, Fig. 14) gehe durch den

Schwerpunkt S des Prismas und liege parallel zur Grundfläche. Zerlegen wir das Prisma in Elemente durch Schnitte parallel zu den Grundflächen, so ist $dV = F dz$; für das Element MN in der Entfernung $SS_1 = z$ von S lässt sich nach VI. A) das Trägheitsmoment $T' = \varrho_0^2 dM$ in Bezug auf eine Drehachse $D_1 D_1$ parallel zu DD durch den Schwerpunkt S_1 des Elementes bestimmen; dann ist das Trägheitsmoment des Elementes in Bezug auf DD nach 7)

$$T'' = T' + z^2 dM = \varrho_0^2 dM + z^2 dM,$$

und das Trägheitsmoment des ganzen Prismas in Bezug auf DD:

$$T = \Sigma T'' = \int \varrho_0^2 \, dM + \int z^2 dM;$$

weil aber alle Querschnitte des Prismas gleich gross sind und jeder derselben auch genau gleiche Lage gegen die zu ihm gehörige Achse $D_1 D_1$ hat, so sind F und ϱ_0 constant, mithin

$$T = \varrho_0^2 \int dM + \mu F \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} z^2 dz = \varrho_0^2 M + \tfrac{2}{3} \mu F \left(\frac{l}{2}\right)^3$$

70) $$T = (\varrho_0^2 + \tfrac{1}{12} l^2) M.$$

Die Werthe für ϱ_0^2 sind aus VI. A) zu entnehmen, indem man die dort gefundenen Trägheitsmomente mit der dort betrachteten Masse dividirt; denn es ist $\varrho_0^2 = \dfrac{T'}{dM}$.

Z. B. 1) Kreiscylinder; für eine Drehachse durch den Schwerpunkt; nach 27) ist $\varrho_0^2 = \frac{1}{4} R^2$, also

71) $$T = (\tfrac{1}{4} R^2 + \tfrac{1}{12} l^2) M = \tfrac{1}{4} (R^2 + \tfrac{1}{3} l^2) M.$$

Für eine Achse durch den Mittelpunkt einer Grundfläche ist

72) $$T_1 = \left[\tfrac{1}{4} R^2 + \tfrac{1}{12} l^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2\right] M = (\tfrac{1}{4} R^2 + \tfrac{1}{3} l^2) M.$$

Wäre $R = 0$, so würde $T = \frac{1}{12} l^2 M$ und $T_1 = \frac{1}{3} l^2 M$, in Uebereinstimmung mit V. 1), wenn daselbst $\alpha = 90^0$ genommen wird.

2) Parallelepiped; nach 20) ist $\varrho_0^2 = \frac{1}{12} h^2$ (s. Taf. III, Fig. 15), folglich bezüglich DD:

73) $$T = \tfrac{1}{12} (h^2 + l^2) M.$$

Wählt man eine Kante $D_1 D_1$ als Drehachse, so ist

74) $$T_1 = \tfrac{1}{12} (h^2 + l^2) M + \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}^{\,2} . M = \tfrac{1}{3} M (h^2 + l^2).$$

3) Dreiseitiges Prisma, dessen Querschnitte gleichschenklige Dreiecke sind; die Drehachse DD (s. Taf. III, Fig. 16) durch den Schwerpunkt laufe parallel zu der Linie, welche in einer Endfläche sich durch die Spitze und die Mitte der Grundlinie legen lässt; dann ist nach 25):

$$\varrho_0^2 = \tfrac{1}{6} h^2 = \tfrac{1}{6} \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

und

75) $$T = \tfrac{1}{12}\left(\frac{b^2}{2} + l^2\right) M.$$

Für eine parallele Achse $D_1 D_1$ durch die Spitze einer Grundfläche wäre

76) $$T_1 = \tfrac{1}{12}\left(\frac{b^2}{2} + l^2\right) M + \left(\frac{l}{2}\right)^2 M = \tfrac{1}{3} M\left(\frac{b^2}{8} + l^2\right).$$

Läuft die Drehachse $D_2 D_2$ (s. Taf. III, Fig. 16) durch die Spitze L des mittelsten Querschnittes und zwar parallel zu dessen Grundlinie MN, so ist nach 24): $\varrho_0^2 = \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} \overline{LQ}^2$, folglich

77) $$T_1 = \tfrac{1}{2}(a^2 + \tfrac{1}{6} l^2) M,$$

und für eine parallele Achse durch den Schwerpunkt S:

78) $$T = (\tfrac{1}{2} a^2 + \tfrac{1}{12} l^2) M - (\tfrac{2}{3} a)^2 M = \tfrac{1}{6}(\tfrac{1}{3} a^2 + \tfrac{1}{2} l^2) M.$$

C) Die Drehachse DD (s. Taf. III, Fig. 17) gehe durch den Schwerpunkt S des Prismas und sei gegen eine Grundfläche unter dem $\angle\alpha$ geneigt. Ist das Element $MN = Fdz$ parallel zur Grundfläche, so ist sein Trägheitsmoment für die zu DD parallele Drehachse $D_1 D_1$ durch den Schwerpunkt S_1 des Elementes $T' = \varrho_0^2 dM$, worin ϱ_0^2 nach VI. C) zu bestimmen ist; ziehen wir nun $S_1 R \perp DD$ durch S_1, so ist $\angle RS_1S = \alpha$, weil die geometrische Achse AA auch senkrecht auf den Querschnitten (Elementen) parallel zur Grundfläche steht; demnach ist das Trägheitsmoment des Elementes MN bezüglich der Achse DD, wenn $SS_1 = z$ gesetzt wird,

$$T'' = \varrho_0^2 dM + \overline{RS_1}^2 \cdot dM = (\varrho_0^2 + z^2 \cos^2\alpha)\, dM,$$

folglich das Trägheitsmoment des ganzen Prismas für DD:

79) $$T = \Sigma T'' = \varrho_0^2 \int dM + F \cos^2\alpha \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} z^2\, dz = (\varrho_0^2 + \tfrac{1}{12} l^2 \cos^2\alpha) M,$$

z. B. 1) Kreiscylinder; nach 53) ist $\varrho_0^2 = \dfrac{1 + \sin^2\alpha}{4} R^2$, folglich

80) $$T = \tfrac{1}{4}\left[(1 + \sin^2\alpha) R^2 + \tfrac{1}{3} l^2 \cos^2\alpha\right] M;$$

für $\alpha = 0$,

$$T = \tfrac{1}{4}(R^2 + \tfrac{1}{3} l^2) M,$$

wie 71); für $\alpha = 90^0$,

$$T = \tfrac{1}{2} R^2 M, \text{ wie 64).}$$

2) Parabolischer Cylinder; fällt die Achse der Parabel mit YY' (in Fig. 11 und 12) zusammen, so ist nach 55) $\varrho_0^2 = \frac{1}{5}(b^2 \sin^2\alpha + \frac{12}{35} h^2)$, mithin

81) $$T = (\tfrac{1}{5} b^2 \sin^2\alpha + \tfrac{12}{175} h^2 + \tfrac{1}{12} l^2 \cos^2\alpha) M;$$

für $\alpha = 0$,

82) $$T = (\tfrac{12}{175} h^2 + \tfrac{1}{12} l^2) M,$$

für $\alpha = 90^0$,

83) $$T = (\tfrac{1}{5} b^2 + \tfrac{12}{175} h^2) M = \tfrac{1}{5}(b^2 + \tfrac{12}{35} h^2) M.$$

Geht die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt, sondern im mittelsten Querschnitte durch den Durchschnitt der letzten Ordinate mit der Parabelachse, so ist $\varrho_0^2 = \frac{1}{5}(b^2 \sin^2\alpha + \frac{12}{35} h^2) + \frac{4}{25} h^2$, denn die Parabelachse *steht senkrecht auf* der Drehachse; folglich

84) $$T_1 = (\tfrac{1}{5}\, b^2 \sin^2\alpha + \tfrac{8}{35}\, h^2 + \tfrac{1}{12}\, l^2 \cos^2\alpha)\, M,$$
für $\alpha = 90^0$,
$$T_1 = (\tfrac{1}{5}\, b^2 + \tfrac{8}{35}\, h^2)\, M,$$
wie (69).

3) Dreiseitiges Prisma, dessen Querschnitte gleichschenklige Dreiecke sind; ist die Mittelllinie der Querschnitte senkrecht zur Drehachse (wie in VI. C, α, b, 1), so ist nach 52) und 7):
$$\varrho_0^2 = \tfrac{1}{2}\, a^2 + \tfrac{1}{24}\, b^2 \sin^2\alpha - (\tfrac{2}{3}\, a)^2 = \tfrac{1}{18}\, a^2 + \tfrac{1}{24}\, b^2 \sin^2\alpha,$$
also

85) $$T = \tfrac{1}{6}\, (\tfrac{1}{3}\, a^2 + \tfrac{1}{4}\, b^2 \sin^2\alpha + \tfrac{1}{2}\, l^2 \cos^2\alpha)\, M;$$
für $\alpha = 0$,
$$T = \tfrac{1}{6}\, (\tfrac{1}{3}\, a^2 + \tfrac{1}{2}\, l^2)\, M,$$
wie 78); für $\alpha = 90^0$,

86) $$T = \tfrac{1}{6}\, (\tfrac{1}{3}\, a^2 + \tfrac{1}{4}\, b^2)\, M.$$
Liegt dagegen die Mittellinie des mittelsten Querschnittes in XX', so wäre nach 61) und 7), weil $y = \frac{b}{2a} x$, und $dM = \frac{\mu\delta b a}{2} = \frac{\mu b a}{2} dz$,
$$T' = 2\mu\delta \int \left(\tfrac{1}{3} \frac{b^2}{4a^2} + \sin^2\alpha\right) \frac{b}{2a}\, x^3\, dx - (\tfrac{2}{3}\, a \sin\alpha)^2\, dM$$
$$= \tfrac{1}{4} \frac{2\mu\delta b a}{2} (\tfrac{1}{12}\, b^2 + a^2 \sin^2\alpha) - \tfrac{4}{9}\, a^2 \sin^2\alpha\, dM$$
$$\varrho_0^2 = \tfrac{1}{24}\, b^2 + \tfrac{1}{18}\, a^2 \sin^2\alpha$$

87) $$T = \tfrac{1}{6}\, (\tfrac{1}{4}\, b^2 + \tfrac{1}{3}\, a^2 \sin^2\alpha + \tfrac{1}{2}\, l^2 \cos^2\alpha)\, M;$$
für $\alpha = 0$,
$$T = \tfrac{1}{6}\, (\tfrac{1}{4}\, b^2 + \tfrac{1}{2}\, l^2)\, M,$$
wie 75); für $\alpha = 90^0$,

88) $$T = \tfrac{1}{6}\, (\tfrac{1}{4}\, b^2 + \tfrac{1}{3}\, a^2)\, M,$$
und wenn hier die Drehachse noch in die Kante durch die Spitze gelegt wird,
$$T_1 = (\tfrac{1}{24}\, b^2 + \tfrac{1}{18}\, a^2 + \tfrac{4}{9}\, a^2)\, M = \tfrac{1}{2} \left[a^2 + \tfrac{1}{3} \left(\frac{b}{2}\right)^2\right],$$
wie 68, wenn $b_1 = b_2 = \frac{b}{2}$.

VIII. Trägheitsmoment schiefer prismatischer Körper,

deren Querschnitte parallel zu den Grundflächen $= F$, deren Achsen- oder Kantenlänge $= l$, deren geometrische Achse gegen die Querschnitte unter den Winkel $DLX = \alpha$ geneigt ist, deren Höhe also $h = l \sin\alpha$, und deren Masse $M = \mu F l \sin\alpha$ ist.

A) Die Drehachse liege parallel zur geometrischen Achse. Das Element MN (s. Taf. III, Fig. 18) parallel zur Grundfläche hat die Masse $dM = \mu F \sin\alpha\, dz$; sein Trägheitsmoment in Bezug auf die Drehachse sei $T' = \varrho_0^2\, dM$ und kann nach VI. C) bestimmt werden; da nun ϱ_0 für alle

zur Grundfläche parallele Querschnitte dasselbe sein muss, weil alle gleich gross und gegen DD gleichliegend sind, so muss das Trägheitsmoment des ganzen Prismas sein:

89) $$T_1 = \Sigma T' = \int \varrho_0^2 \, dM = \varrho_0^2 \int dM = \varrho_0^2 M.$$

Verstehen wir aber in den in VI. C) gefundenen Formeln unter M die Masse des schiefen Prismas, so geben die dortigen Formeln zugleich das Trägheitsmoment desselben; z. B.

schiefes Prisma mit rechteckigem Querschnitt, Drehachse durch den Schwerpunkt (nach 50),

90) $$T = \tfrac{1}{12} M (b^2 \sin^2 \alpha + h^2);$$

schiefer Kreiscylinder, geometrische Achse als Drehachse (nach 53),

91) $$T = \tfrac{1}{4} M R^2 (\sin^2 \alpha + 1);$$

parabolischer Cylinder, Drehachse durch den Scheitel (nach 54) und 56)

92) $$T_1 = \tfrac{1}{5} M (b^2 \sin^2 \alpha + \tfrac{15}{7} h^2);$$

dreiseitiges Prisma, Querschnitte gleichschenkelig, Kante durch die Spitze der gleichschenkligen Dreiecke als Drehachse (nach 52),

93) $$T_1 = \tfrac{1}{2} M (\tfrac{1}{12} b^2 \sin^2 \alpha + a^2);$$

beliebiges dreiseitiges Prisma, eine Kante als Drehachse (nach 57)

94) $$T_1 = \tfrac{1}{2} M [\tfrac{1}{3} (b_1^2 - b_1 b_2 + b_2^2) \sin^2 \alpha + a^2].$$

Für $\alpha = 90^0$ erhält man aus 89) die entsprechenden Formeln in VII. A).

B) Die Drehachse DD (s. Taf. III, Fig. 19) gehe durch den Schwerpunkt S des Prismas und liege parallel zu einer Grundfläche. Das Element MN, dessen Schwerpunkt S_1 um $SS_1 = z$ von S entfernt ist, hat das Trägheitsmoment $T' = \varrho_0^2 dM$, bezüglich der Achse $D_1 D_1$, welche sich durch S_1 parallel zu DD legen lässt; dieses Trägheitsmoment kann nach VI. A) bestimmt werden. Ist nun $\angle SLX = \angle SS_1A_1$ der Neigungswinkel α der geometrischen Achse gegen die Grundfläche, $\angle SAL = \angle SA_1S_1 = 90^0$, $A_1 C \perp D_1 D_1$ und $\angle A_1 S_1 D_1 = \beta$, so ist nach 9) das Trägheitsmoment des Elementes MN bezüglich der Achse DD:

$$\begin{aligned} T'' &= T' + (\overline{SA_1}^2 + \overline{A_1 S_1}^2 \sin^2 \beta) \, dM \\ &= (\varrho_0^2 + z^2 \sin^2 \alpha + z^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \beta) \, dM \\ &= [\varrho_0^2 + z^2 (1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta)] \, dM. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir aber mit ϑ den $\angle SS_1D_1$, welchen die geometrische Achse mit der Drehachse einschliesst, so ist bekanntlich $\cos \vartheta = \cos \alpha \cos \beta$, und $\sin^2 \vartheta = 1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta$; ferner ist

$$dM = \mu F d(SA_1) = \mu F \sin \alpha \, dz;$$

demnach

$$T'' = (\varrho_0^2 + z^2 \sin^2 \vartheta) \mu F \sin \alpha \, dz,$$

und weil ϱ_0 wieder constant ist, so ist das Trägheitsmoment des ganzen Prismas für die Drehachse DD:

$$T = \varrho_0^2 \int dM + \mu F \sin\alpha \sin^2\vartheta \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} z^2 dz = \varrho_0^2 M + \tfrac{1}{3}\left(\frac{l}{2}\right)^2 \sin^2\vartheta\, M$$

95) $T = (\varrho_0^2 + \tfrac{1}{12} l^2 \sin^2\vartheta) M = [\varrho_0^2 + \tfrac{1}{12} l^2 (1 - \cos^2\alpha \cos^2\beta)] M.$

z. B. 1) Geht bei einem schiefen dreiseitigen Prisma, dessen Querschnitte (s. Taf. III, Fig. 20) gleichschenklige Dreiecke sind, die Achse LX durch das eine Ende der Grundlinie, während die Drehachse DD durch die Mitte der Grundlinie und die Spitze gelegt ist, so ist (vergl. VII. B, 3)

$$\tan\beta = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{1}{3}a}; \quad \cos^2\beta = \frac{1}{1+\tan^2\beta} = \frac{4a^2}{9b^2+4a^2};$$

$$\varrho_0^2 = \tfrac{1}{6}\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

nach 25), folglich

96) $$T = \tfrac{1}{12}\left(\frac{b^2}{2} + \frac{9b^2 + 4a^2 \sin^2\alpha}{9b^2+4a^2} l^2\right) M.$$

Für eine gleichliegende Achse in der Endfläche wäre

97) $$T_1 = T + \left(\frac{l}{2}\sin\vartheta\right)^2 M = \tfrac{1}{3}\left(\frac{b^2}{8} + \frac{9b^2 + 4a^2\sin^2\alpha}{9b^2+4a^2} l^2\right) M.$$

Für $\alpha = 90^0$ wird

$$T_1 = \tfrac{1}{3}\left(\frac{b^2}{8} + l^2\right) M,$$

wie bereits in 76) gefunden wurde.

2) Für den schiefen Kreiscylinder ist $\varrho_0^2 = \tfrac{1}{4} R^2$, also

98) $$T = \tfrac{1}{4}[R^2 + \tfrac{1}{3} l^2 (1 - \cos^2\alpha \cos^2\beta)] M.$$

Wenn man in Formel 95) $\alpha = 90^0$ oder $\beta = 90^0$ setzt, so wird $\sin^2\vartheta = 1$, $\vartheta = 90^0$, und man erhält

99) $$T = (\varrho_0^2 + \tfrac{1}{12} l^2) M,$$

welche mit 70) übereinstimmt. Wäre dagegen $\beta = 0$, d. h. träfe das Perpendikel SA_1 das Element in D_1D_1, oder läge DD in der Ebene des Neigungswinkels SS_1A_1 der geometrischen Achse, so wäre $\sin\vartheta = \sin\alpha$ und

100) $$T = (\varrho_0^2 + \tfrac{1}{12} l^2 \sin^2\alpha) M.$$

C) Die Drehachse DD (s. Taf. III, Fig. 21) geht durch den Schwerpunkt S des Prismas und steht senkrecht auf einer Endfläche. Der Schwerpunkt S_1 des Elementes MN parallel zur Endfläche sei um $SS_1 = z$ von S entfernt; das Trägheitsmoment $T' = \varrho_0^2 dM$ des Elementes in Bezug auf eine Achse $D_1D_1 // DD$ durch S_1 sei nach VI. B) bestimmt; der Winkel SS_1L ist der Neigungswinkel α der geometrischen Achse gegen die Endfläche; folglich ist das Trägheitsmoment des Elementes bezüglich der Achse DD:

$$T'' = T' + \overline{LS_1}^2 . dM = (\varrho_0^2 + z^2 \cos^2\alpha) dM$$

und das Trägheitsmoment des ganzen Prismas für DD ist

$$T = \Sigma T'' = \varrho_0^2 \int dM + \cos^2\alpha \sin\alpha \, F\mu \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} z^2 dz$$

101) $T = (\varrho_0^2 + \frac{1}{12} l^2 \cos^2\alpha) M.$

Wenn sich die geometrische Achse auf einer Kegelfläche um DD als Kegelachse herumbewegt, ändert sich also T keineswegs, was ganz natürlich ist, weil der Trägheitshalbmesser nie einen Punkt, sondern eine Cylinderfläche als Trägheitsmittelpunkt bestimmt. Es ist also im vorliegenden Falle die Grösse von T nur von der Grösse der Neigung, nicht von der Lage der Achse gegen die Drehachse abhängig.

Für $\alpha = 90^0$ liefert 101) die Formeln in VII. A), nämlich allgemein $T = \varrho_0^2 M$, und für $l = 0$ die damit gleichlautenden Formeln in VI. B).

1) Kreiscylinder; $\varrho_0^2 = \frac{1}{2} R^2$, folglich

102) $T = \frac{1}{2} (R^2 + \frac{1}{6} l^2 \cos^2\alpha) M.$

Wird $R = 0$, so wird der Cylinder zur geraden Linie, welche mit der Drehachse den $\angle \alpha_1 = 90^0 - \alpha$ einschliesst; dann ist aber übereinstimmend mit 12)

$$T = \frac{1}{12} l^2 \cos^2\alpha \, . \, M = \frac{1}{12} l^2 \sin^2\alpha_1 \, . \, M.$$

2) Parabolischer Cylinder; nach 47) ist $\varrho_0^2 = \frac{1}{5}(b^2 + \frac{12}{35} h^2)$, daher

103) $T = (\frac{1}{5} b^2 + \frac{12}{175} h^2 + \frac{1}{12} l^2 \cos^2\alpha) M;$

für eine parallele Achse durch den Scheitel des mittelsten Querschnittes ist:

104) $T_1 = T + (\frac{3}{5} h)^2 M = (\frac{1}{5} b^2 + \frac{3}{7} h^2 + \frac{1}{12} l^2 \cos^2\alpha) M,$

was man auch aus 101) erhalten hätte, wenn man $\varrho_0^2 = \frac{1}{5} b^2 + \frac{3}{7} h^2$ aus 46) genommen hätte; für eine Achse durch den Schwerpunkt einer Grundfläche endlich wäre

105) $T_1 = T + \left(\frac{l}{2} \cos\alpha\right)^2 M = (\frac{1}{5} b^2 + \frac{12}{175} h^2 + \frac{1}{3} l^2 \cos^2\alpha) M,$

welche Formel auch aus

$$T = \varrho_0^2 \int dM + F\mu \cos^2\alpha \sin\alpha \int_0^l z^2 dz$$

hergeleitet werden konnte.

3) Für ein schiefes Prisma mit rechteckigem Querschnitte ist nach 38) $\varrho_0^2 = \frac{1}{12}(a^2 + b^2)$, folglich

106) $T = \frac{1}{12} (a^2 + b^2 + l^2 \cos^2\alpha) M.$

Lässt man aber das Rechteck zur geraden Linie (senkrecht zur geometrischen Achse) werden, indem man $a = h$ und $b = 0$ setzt, oder indem man $\varrho_0^2 = \frac{1}{12} h^2$ aus (12) entnimmt, wobei h für l gesetzt wurde, so wird

$$T = \frac{1}{12} (h^2 + l^2 \cos^2\alpha) M,$$

was das Trägheitsmoment für ein Rechteck bezüglich einer Drehachse sein müsste, welche mit der Rechtecktsfläche einen $\angle \alpha_1 = 90^0 - \alpha$ einschliesst; schreibt man aber b für l, so wird in der That $T = \frac{1}{12}(h^2 + b^2 \sin^2\alpha) M$, übereinstimmend mit 50).

D) Die unter VIII. *A*., *B*. und *C*. und unter VII. *A*., *B*. und *C*. entwickelten Formeln sind sämmtlich in einer allgemeinen Formel enthalten, welche sich ergiebt, wenn man das Trägheitsmoment eines Prismas bestimmt, dessen geometrische Achse SS_1 (s. Taf. III, Fig. 22) unter dem $\angle SS_1R = \alpha$ gegen eine Grundfläche geneigt ist, bezüglich einer Drehachse DD durch den Schwerpunkt S des Prismas, welche mit der Grundfläche den $\angle D_1S_1V = \alpha_1$ einschliesst. Bezeichnen wir den $\angle DSS_1$, welchen die Drehachse DD mit der geometrischen Achse SS_1 einschliesst, mit ϑ und den $\angle RS_1Q$, welchen die Normalebenen SS_1R und D_1S_1Q durch die beiden Achsen auf die Grundfläche mit einander einschliessen, mit β; zerlegen wir ferner wieder in Elemente parallel zu den Grundflächen, und sei S_1 der Schwerpunkt eines solchen Elementes in der Entfernung $SS_1 = z$ von S; legen wir endlich durch S_1 die Drehachse $D_1D_1 \parallel DD$, machen $SL \perp D_1D_1$ und bestimmen nach VI. *A*., *B*. oder *C*., wie es α_1 erfordert, das Trägheitsmoment $T' = \varrho_0^2 dM$ des Elementes für D_1D_1, so ist das Trägheitsmoment desselben für DD

$$T'' = T' + \overline{SL}^2 . dM = (\varrho_0^2 + z^2 \sin^2\vartheta)\, dM,$$

mithin das Trägheitsmoment des ganzen Prismas für DD

$$T = \Sigma T'' = \varrho_0^2 \int dM + \mu F \sin^2\vartheta \sin\alpha \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} z^2\, dz.$$

Der Winkel ϑ bestimmt sich auf folgende Weise; legen wir SR und LQ senkrecht auf die Ebene RS_1Q des Elementes, $LU \perp SR$ und $RV \perp S_1Q$, so ist:

$$SL = SS_1 \sin SS_1L = z \sin\vartheta;$$

$$\overline{SL}^2 = \overline{SU}^2 + \overline{UL}^2 = (SR - LQ)^2 + \overline{RQ}^2 = (SR - LQ)^2 + \overline{RV}^2 + \overline{VQ}^2$$

$$z^2\sin^2\vartheta = (z\sin\alpha - z\cos\vartheta\sin\alpha_1)^2 + z^2\cos^2\alpha\sin^2\beta + (z\cos\vartheta\cos\alpha_1 - z\cos\alpha\cos\beta)^2$$

$$\sin^2\vartheta = \sin^2\alpha - 2\cos\vartheta(\sin\alpha\sin\alpha_1 + \cos\alpha\cos\alpha_1\cos\beta) + (\sin^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_1)\cos^2\vartheta + \cos^2\alpha(\cos^2\beta + \sin^2\beta)$$

$$1 - \cos^2\vartheta = 1 - 2\cos\vartheta(\sin\alpha\sin\alpha_1 + \cos\alpha\cos\alpha_1\cos\beta) + \cos^2\vartheta$$

$$\cos\vartheta = \sin\alpha\sin\alpha_1 + \cos\alpha\cos\alpha_1\cos\beta$$

und

107) $$T = (\varrho_0^2 + \tfrac{1}{12} l^2 \sin^2\vartheta)\, M.$$

Setzen wir in dieser Formel:

1) $\alpha_1 = 90^0$, so wird

$\cos\vartheta = \sin\alpha$, $\sin^2\vartheta = \cos^2\alpha$ und $T = (\varrho_0^2 + \frac{1}{12} l^2 \cos^2\alpha)\, M$,

wie 101) in VIII. *C*);

2) $\alpha_1 = 0$, so wird

$\cos\vartheta = \cos\alpha\cos\beta$, $\sin^2\vartheta = 1 - \cos^2\alpha\cos^2\beta$ und $T = [\varrho_0^2 + \frac{1}{12} l^2 (1 - \cos^2\alpha\cos^2\beta)]\, M$,

wie 95) in VIII. *B*);

3) $\beta = 0$, $\alpha = \alpha_1$, so wird

$\cos\vartheta = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\sin^2\vartheta = 0$ und $T = \varrho_0^2 M$,

wie 89) in VIII. *A*);

4) $\alpha = 90^0$, so wird

$$\cos\vartheta = \sin\alpha_1,\ \sin^2\vartheta = \cos^2\alpha_1 \text{ und } T = (\varrho_0{}^2 + \tfrac{1}{12}l^2\cos^2\alpha_1)M,$$

wie 79) in VII. C);

5) $\alpha = 90^0$, $\alpha_1 = 0$, so wird

$$\cos\vartheta = 0,\ \sin^2\vartheta = 1 \text{ und } T = (\varrho_0{}^2 + \tfrac{1}{12}l^2)M,$$

wie 70) in VII. B);

6) $\alpha = 90^0 = \alpha_1$, so wird

$$\cos\vartheta = 1,\ \sin^2\vartheta = 0 \text{ und } T = \varrho_0{}^2 M,$$

wie 63) in VII. A).

IX. Trägheitsmomente pyramidaler Körper,

deren Grundfläche $= F$, deren Höhe $= l$, und deren Masse $M = \frac{\mu F l}{3}$ sein möge. Zerlegen wir die Pyramide in Elemente parallel zur Grundfläche, so sind dieselben ähnliche Figuren, und die Fläche f des Schnittes in der Entfernung z von der Spitze bestimmt sich aus $f : F = z^2 : l^2$; daher ist die Masse dieses Elementes $dM = \mu f dz = \frac{\mu F}{l^2} z^2 dz$. Wegen der Aehnlichkeit der Schnitte wachsen auch die Trägheitshalbmesser der Schnitte für ähnlich liegende Achsen wie irgend eine andere lineare Strecke in dem Schnitte, und da die letztere der Entfernung des Schnittes oder Elementes von der Spitze proportional ist, so muss es auch der Trägheitshalbmesser sein; ist also der Trägheitshalbmesser des Elementes in der Entfernung z von der Spitze $=\varrho$, und der Trägheitshalbmesser der Grundfläche $=\varrho_1$, so ist auch $\varrho : \varrho_1 = z : l$; $\varrho = \frac{\varrho_1}{l} z$.

A) Die Drehachse gehe durch die Spitze der Pyramide und stehe senkrecht auf der Grundfläche. Nach VI. B) ermittelt man das Trägheitsmoment $T' = \varrho^2 dM$ des Elementes im Abstande z von der Spitze und findet daraus das der ganzen Pyramide

$$T_1 = \Sigma T' = \frac{\varrho_1{}^2 \mu F}{l^4} \int_0^l z^4 dz$$

oder

108) $$T_1 = \tfrac{3}{5} M \varrho_1{}^2;$$

z. B. 1) Querschnitt ein gleichschenkliges Dreieck; die Drehachse treffe die Grundfläche in in deren Schwerpunkt. Nach (41) ist

$$\varrho_1{}^2 = \tfrac{1}{3}\left(\frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{3}\right),$$

folglich

109) $$T = \tfrac{1}{5} M \left(\frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{3}\right).$$

Trifft die Drehachse die Grundfläche in deren Spitze, so ist nach 41)

$$\varrho_1^2 = \tfrac{1}{3}\left(a^2 + \frac{c^2}{2}\right),$$

folglich

110) $$T_1 = \tfrac{1}{5} M\left(a^2 + \frac{c^2}{2}\right).$$

Diese Formel 110) gilt zugleich für alle geraden Pyramiden, weil bei diesen alle Querschnitte regelmässige Figuren sind und das Perpendikel (Drehachse) von der Spitze auf die Grundfläche die letztere in ihrem Mittel- und Schwerpunkte trifft, also:

2) Querschnitte Quadrate, die Drehachse gehe durch den Mittelpunkt derselben; hier ist $a^2 = \frac{c^2}{2}$, folglich

111) $$T = \tfrac{1}{5} M c_1^2;$$

oder $\varrho_1^2 = \frac{1}{3} c_1^2$ nach 38), folglich $T = \frac{1}{5} M c_1^2$.

3) Gerader Kreiskegel, geometrische Achse als Drehachse

$$a = c = R, \text{ oder } \varrho_1^2 = \tfrac{1}{2} R^2$$

nach 43), folglich

112) $$T = \tfrac{3}{10} M R^2.$$

4) Elliptischer Kegel, Drehachse durch den Mittelpunkt; nach 44) ist $\varrho_1^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$, folglich

113) $$T = \tfrac{3}{20} M (a^2 + b^2).$$

5) Parabolischer Kegel. Geht die Drehachse durch den Scheitel der Grundfläche, so ist nach 46) $\varrho_1^2 = \frac{1}{5}(b^2 + \frac{15}{7} h^2)$, folglich

114) $$T_1 = \tfrac{3}{25} M (b^2 + \tfrac{15}{7} h^2);$$

geht die Drehachse durch den Durchschnitt der Parabelachse mit der letzten Ordinate, so ist nach 45) $\varrho_1^2 = \frac{1}{5}(b^2 + \frac{8}{7} h^2)$, folglich

115) $$T_1 = \tfrac{3}{25} M (b^2 + \tfrac{8}{7} h^2);$$

geht endlich die Drehachse durch den Schwerpunkt der Grundfläche, so ist nach 47) $\varrho_1^2 = \frac{1}{5}(b^2 + \frac{12}{35} h^2)$, folglich

116) $$T = \tfrac{3}{25} M (b^2 + \tfrac{12}{35} h^2).$$

B) Die Drehachse stehe senkrecht auf der Grundfläche und gehe durch den Schwerpunkt der Pyramide, welcher nicht senkrecht unter der Spitze liegt. Der Schwerpunkt der Pyramide liegt in $\frac{3}{4}$ der Höhe auf der Linie von der Spitze nach dem Schwerpunkte der Grundfläche; ist nun der letztere um e von dem Fusspunkte des Perpendikels durch die Spitze auf die Grundfläche entfernt, so ist die Achse durch den Schwerpunkt um $\frac{3}{4} e$ von jenem Perpendikel entfernt und mithin:

117) $$T = \tfrac{3}{5} M \varrho_1^2 - (\tfrac{3}{4} e)^2 M = \tfrac{3}{5} M (\varrho_1^2 - \tfrac{15}{16} e^2);$$

z. B. bei gleichschenklig dreieckigem Querschnitte treffe das Perpendikel durch die Spitze der Pyramide die Grundfläche in der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks; dann ist $e = \frac{2}{3} a$ und ϱ_1^2 nach 41) $= \frac{1}{3}\left(a^2 + \frac{c^2}{2}\right)$, also

108) $$T = \frac{1}{5} M \left(a^2 + \frac{c^2}{2} - \frac{60}{48} a^2\right) = \frac{1}{10} M \left(c^2 - \frac{1}{2} a^2\right).$$

C) Die Drehachse DD (s. Taf. III, Fig. 23) gehe durch die Spitze E parallel zur Grundfläche ABC. Das Perpendikel $EL = l$ von der Spitze auf die Grundfläche trifft das Element MN in L_1, und es sei $EL_1 = z$. Legen wir nun durch L_1 eine Achse $D_1D_1 // DD$ und bestimmen für diese nach VI. *A*) das Trägheitsmoment $T' = \varrho^2 dM$, des Elementes MN, so ist nach 8) (oder, wenn L_1 der Schwerpunkt des Elementes wäre, nach 7) das Trägheitsmoment des Elementes bezüglich der Achse DD:

$$T'' = T' + z^2 dM = (\varrho^2 + z^2)\, dM = \frac{\mu F}{l^2}\left(\frac{\varrho_1^2}{l^2} + 1\right) z^4 dz$$

und das Trägheitsmoment der ganzen Pyramide in Bezug auf DD:

119) $$T_1 = \Sigma T'' = \frac{\mu F}{l^4}(\varrho_1^2 + l^2)\int_0^l z^4 dz = \frac{3}{5} M (\varrho_1^2 + l^2),$$

wobei ϱ_1 der Trägheitshalbmesser der Grundfläche für eine parallele Achse durch den Fusspunkt des Perpendikels von der Spitze auf die Grundfläche bedeutet; z. B.

1) Querschnitte Ellipsen; das Perpendikel durch die Spitze treffe die Grundfläche in dem Mittelpunkte der Ellipse, die Drehachse liege parallel zur Halbachse $CB = a$ (in Fig. 9, Taf. III); dann ist nach 33): $\varrho_1^2 = \frac{1}{4} b^2$, folglich:

120) $$T_1 = \frac{3}{5} M \left(\frac{b^2}{4} + l^2\right)^{*)}$$

und für eine parallele Achse durch den Schwerpunkt:

121) $$T = T_1 - \left(\frac{3}{4} l\right)^2 M = \frac{3}{20} M \left(b^2 + \frac{1}{4} l^2\right).$$

2) Parabolischer Kegel; Drehachse parallel zur Parabelachse der Grundfläche, das Perpendikel durch die Spitze treffe die Grundfläche in deren Schwerpunkte; dann ist nach 35): $\varrho_1^2 = \frac{1}{5} b_1^2$,

122) $$T_1 = \frac{3}{5} M \left(\frac{b^2}{5} + l^2\right).$$

Ist die Drehachse normal zur Parabelachse und trifft das Perpendikel von der Spitze die Grundfläche in dem Durchschnitt der letzten Ordinate und der Parabelachse, so ist $\varrho_1^2 = \frac{8}{35} h^2$ nach 36), folglich:

123) $$T_1 = \frac{3}{5} M \left(\frac{8}{35} h^2 + l^2\right).$$

3) Bei gleichschenklig dreieckigem Querschnitte treffe das Perpendikel durch die Spitze die Grundfläche in deren Spitze, die Drehachse laufe der Grundlinie der Dreiecke parallel; dann ist $\varrho_1^2 = \frac{1}{2} h^2$ nach 24), folglich:

124) $$T_1 = \frac{3}{5} M \left(\frac{1}{2} h^2 + l^2\right).$$

Ist der Schwerpunkt S der Grundfläche um $LS = e$ von dem Fusspunkte

---

*) Bei kreisförmigem Querschnitte: (120) $T_1 = \frac{3}{5} M \left(\frac{1}{4} R^2 + l^2\right)$.

L des Perpendikels durch die Spitze auf die Grundfläche entfernt, so ist sein Abstand SE von der Spitze $\lambda = \sqrt{l^2 + e^2}$; ist ferner ϱ_0 der Trägheitshalbmesser der Grundfläche für eine parallele Achse $D_2 D_2$ durch den Schwerpunkt der Grundfläche, $\angle LSD_2 = \beta$ und $\angle ESL = \alpha$, so ist nach 7):

$$\varrho_0^2 = \varrho_1^2 - e^2 \sin^2\beta;\ \varrho_1^2 = \varrho_0^2 + e^2 \sin^2\beta = \varrho_0^2 + e^2 - e^2 \cos^2\beta,$$
$$\varrho_1^2 + l^2 = \varrho_0^2 + e^2 \sin^2\beta + l^2 = \varrho_0^2 + \lambda^2 (1 - \cos^2\alpha \cos^2\beta),$$

weil ja $e = \lambda \cos\alpha$ ist; folglich ist auch

125) $$T_1 = \tfrac{3}{5} M (\varrho_1^2 + l^2) = \tfrac{3}{5} M [\varrho_0^2 + \lambda^2 (1 - \cos^2\alpha \cos^2\beta)].$$

Schliesst nun SE mit DD den Winkel $SEF = \vartheta$ ein, so ist das Trägheitsmoment der Pyramide für die parallele Achse durch den Schwerpunkt der Pyramide

$$T = T_1 - \overline{FG}^2 . M (\tfrac{3}{4})^2 = \tfrac{3}{5} M [\varrho_0^2 + (1 - \tfrac{15}{16}) \lambda^2 \sin^2\vartheta];$$

wobei wir wie in VIII. B) wieder $\cos\vartheta = \cos\alpha \cos\beta$ setzen müssen, also:

126) $$T = \tfrac{3}{5} M [\varrho_0^2 + \tfrac{1}{16} \lambda^2 (1 - \cos^2\alpha \cos^2\beta)].$$

Fällt aber der Schwerpunkt S nach L, so ist $\alpha = 90^0$ und $\lambda = l$, daher

(126) $$T = \tfrac{3}{5} M (\varrho_0^2 + \tfrac{1}{16} l^2).$$

D) Die Drehachse gehe durch die Spitze der Pyramide und treffe die Grundfläche unter dem Winkel α_1. Für ein Element parallel zur Grundfläche ist nach VI. C)

$$T' = \varrho^2 dM = \mu \frac{F \varrho_1^2}{l^4} z^4 dz,$$

mithin das Trägheitsmoment der ganzen Pyramide

127) $$T_1 = \Sigma T = \frac{\mu F \varrho_1^2}{l^4} \int_0^l z^4 dz = \tfrac{3}{5} M \varrho_1^2.$$

1) Schiefer Kreiskegel, Drehachse durch den Mittelpunkt der Grundfläche; $\varrho_1^2 = \tfrac{1}{4} R^2 (\sin^2\alpha_1 + 1)$;

128) $$T_1 = \tfrac{3}{20} M (\sin^2\alpha_1 + 1) R^2.$$

2) Querschnitte gleichschenkelige Dreiecke; die Drehachse treffe die Grundfläche in ihrer Spitze und die Normalebene durch die Achse auf die Grundfläche laufe mit der Grundlinie parallel; dann ist nach 52): $\varrho_1^2 = \tfrac{1}{2} (a^2 + \tfrac{1}{12} b^2 \sin^2\alpha_1)$, folglich

129) $$T_1 = \tfrac{3}{10} M (a^2 + \tfrac{1}{12} b^2 \sin^2\alpha_1).$$

Wird $\alpha_1 = 90^0$, so geht 127) in 108) über; für $\alpha_1 = 0$ ist die Formel nicht zu gebrauchen, weil da die Drehachse die Querschnitte erst in unendlicher Ferne schneidet, und nicht in ähnlich liegenden Punkten.

Ist in Fig. 24, Taf. III, die Drehachse DD durch die Spitze O unter dem Winkel $DEQ = D_1 S_1 Q_1 = \alpha_1$ gegen die Grundfläche geneigt, während die Schwerachse SO durch die Spitze den Winkel $OSR = OS_1 R_1 = \alpha$ mit der Grundfläche einschliesst, und legt man durch den Schwerpunkt S_1 des Elementes MN eine Achse $D_1 D_1 \,//\, DD$, so lässt sich für diese nach VI. C) das Trägheitsmoment des Elementes: $T' = \varrho^2 dM$ bestimmen und, wenn

$\angle SOE = \vartheta$ und $\angle R_1 S_1 Q = \angle(RS, EQ) = \beta$ gesetzt wird, so ist wieder wie in VIII. D. (Fig. 22):

$$\cos\vartheta = \sin\alpha \sin\alpha_1 + \cos\alpha \cos\alpha_1 \cos\beta,$$

und das Trägheitsmoment des Elementes für die Drehachse DD ist:

$$T'' = T' + (OS_1 \sin\vartheta)^2 \, dM = (\varrho^2 + \zeta^2 \sin^2\vartheta) \, dM;$$

da aber

$$\zeta = OS_1 = \frac{z}{\sin\alpha} \text{ und } \lambda = \frac{l}{\sin\alpha}$$

ist, so haben wir:

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{l} z = \frac{\varrho_0}{\lambda}\zeta; \quad dM = \frac{\mu F}{\lambda^2}\zeta^2 \sin\alpha \, d\zeta; \quad M = \tfrac{1}{3}\mu F \lambda \sin\alpha;$$

und das Trägheitsmoment der ganzen Pyramide für die Drehachse DD ist:

$$T_1 = \Sigma T'' = \frac{\mu F \sin\alpha}{\lambda^4}(\varrho_0^2 + \lambda^2 \sin^2\vartheta)\int_0^\lambda \zeta^4 d\zeta,$$

130) $$T_1 = \tfrac{3}{5} M(\varrho_0^2 + \lambda^2 \sin^2\vartheta),$$

wobei ϱ_0 den Trägheitshalbmesser der Grundfläche für eine parallele Drehachse durch ihren Schwerpunkt S bedeutet.

$\lambda \sin\vartheta$ ist die Entfernung des Schwerpunktes S der Grundfläche von der Drehachse; nach 7) muss daher $\varrho_1^2 = \varrho_0^2 + \lambda^2 \sin^2\vartheta$ sein, und es sind demnach die beiden Formeln 130) und 127) nicht wesentlich von einander verschieden. Setzt man $\alpha_1 = 0$, so wird $\cos\vartheta = \cos\alpha \cos\beta$ und Formel 130) geht in 125) über. Setzt man $\alpha_1 = 90^0$, so wird $\cos\vartheta = \sin\alpha$ und $\lambda \cos\alpha$ ist der Abstand des Schwerpunktes S der Grundfläche von dem Fusspunkte der Perpendikels durch die Spitze auf die Grundfläche, folglich

$$\varrho_0^2 + \lambda^2 \cos^2\alpha = \varrho_1^2$$

und übereinstimmend mit 108) wird

$$T = \tfrac{3}{5} M(\varrho_0^2 + \lambda^2 \cos^2\alpha) = \tfrac{3}{5} M \varrho_1^2.$$

X. Trägheitsmomente abgestutzter Pyramiden,

deren Höhe $= h$ sein möge und welche entstanden sind aus Pyramiden von der Höhe l durch Wegschneiden eines Stückes von der Höhe $l - h$. Da sich hier gegen IX. ausser der geänderten unteren Integrationsgrenze kein Unterschied findet, so haben wir ohne Weiteres:

$$M = \frac{\mu F}{l^2}\int_{l-h}^{l} z^2 dz = \frac{\mu F}{l^2}(l^2 h - l h^2 + \tfrac{1}{3}h^3) = \tfrac{1}{3}\mu F h\left[3 - 3\frac{h}{l} + \left(\frac{h}{l}\right)^2\right]$$

$$T_1 = \frac{\mu F \sin\alpha}{\lambda^4 \sin^5\alpha}(\varrho_0^2 + \lambda^2 \sin^2\vartheta)\int_{l-h}^{l} z^4 dz = \tfrac{1}{5}\frac{\mu F}{l^4}(\varrho_0^2 + \lambda^2 \sin^2\vartheta)[l^5 - (l-h)^5]$$

131) $$T_1 = \tfrac{3}{5} M(\varrho_0^2 + \lambda^2 \sin^2\vartheta)\frac{5 - 10n + 10n^2 - 5n^3 + n^4}{3 - 3n + n^2},$$

$$\cos\vartheta = \sin\alpha \sin\alpha_1 + \cos\alpha \cos\alpha_1 \cos\beta,$$

wobei $n = \frac{h}{l}$ das Abstutzungsverhältniss, ϑ der Neigungswinkel der Drehachse durch die Spitze gegen die Schwerachse durch die Spitze, α der Neigungswinkel der letzteren, α_1 der Neigungswinkel der ersteren gegen die Grundfläche, β der Neigungswinkel der Normalebenen durch die beiden Achsen auf die Grundfläche und $\lambda = \frac{l}{\sin\alpha}$ ist.

Der Abstand des Schwerpunktes der abgestutzten Pyramide von der Grundfläche ist bekanntlich

$$\eta = \tfrac{1}{4} h \frac{l^2 + 2(l-h)l + 3(l-h)^2}{l^2 + (l-h)l + (l-h)^2} = \frac{nl}{4} \cdot \frac{1 + 2(1-n) + 3(1-n)^2}{1 + (1-n) + (1-n)^2} = \frac{l}{4} \cdot \frac{6n - 8n^2 + 3n^3}{3 - 3n + n^2};$$

der von der Spitze aber ist:

$$\eta_1 = \lambda - \frac{\eta}{\sin\alpha} = \frac{l - \eta}{\sin\alpha} = \frac{3l}{4\sin\alpha} \cdot \frac{4 - 6n + 4n^2 - n^3}{3 - 3n + n^2} = \frac{3h}{4n\sin\alpha} \cdot \frac{4 - 6n + 4n^2 - n^3}{3 - 3n + n^2};$$

daher ist das Trägheitsmoment der abgestutzten Pyramide für eine Drehachse durch den Schwerpunkt:

$$T = T_1 - (\eta_1 \sin\vartheta)^2 M,$$

$$132) \quad T = \tfrac{3}{5} M \left[\left(\varrho_0^2 + l^2 \frac{\sin^2\vartheta}{\sin^2\alpha} \right) \frac{5 - 10n + 10n^2 - 5n^3 + n^4}{3 - 3n + n^2} - \tfrac{5}{3} \left(\frac{3h}{4n} \cdot \frac{4 - 6n + 4n^2 - n^3}{3 - 3n + n^2} \right)^2 \frac{\sin^2\vartheta}{\sin^2\alpha} \right],$$

z. B. 1) Gerader Kreiskegel, Drehachse durch die Spitze und den Schwerpunkt:

$n = \frac{h}{l} = \frac{1}{2}$, $\alpha = \alpha_1 = 90^0$, $\sin^2\vartheta = 0$, $\varrho_0^2 = \frac{1}{2} R^2$;

$$133) \quad T = \tfrac{3}{10} MR^2 \tfrac{31}{16} : \tfrac{7}{4} = \tfrac{93}{280} MR^2.$$

2) Gerader Kreiskegel, Drehachse durch den Schwerpunkt und parallel zu einem Durchmesser der Grundfläche;

$$\alpha = 90^0,\ \alpha_1 = 0,\ \sin^2\vartheta = 1,\ \varrho_0^2 = \tfrac{1}{4} R^2,\ n = \tfrac{1}{2},\ \eta = \tfrac{11}{28} h$$

$$134) \quad T = \tfrac{3}{5} M \left[\left(\frac{R^2}{4} + l^2 \right) \tfrac{31}{28} - \tfrac{5}{3} (\tfrac{45}{28} h)^2 \right] = \tfrac{3}{560} M (31 R^2 + \tfrac{97}{7} h^2);$$

und für eine parallele Achse durch den Mittelpunkt der Abstutzungsfläche:

$$135) \quad T_1 = T + (h - \eta)^2 M = \tfrac{31}{140} M (\tfrac{3}{4} R^2 + 2h^2).$$

3) Schiefer Kreiskegel, Schwerachse durch die Spitze als Drehachse, $\varrho_0^2 = \frac{1}{4} R^2 (\sin^2\alpha + 1)$, $\alpha = \alpha_1$, $\beta = 0$, $\sin^2\vartheta = 0$, $n = \frac{1}{2}$ und

$$136) \quad T = \tfrac{93}{560} MR^2 (\sin^2\alpha + 1).$$

4) Halber gerader Kreiskegel, Drehachse durch den Schwerpunkt, senkrecht zur Grundfläche; $\alpha_1 = 90^0$, da der Schwerpunkt der Grundfläche von deren Mittelpunkte um $e = \frac{4R}{3\pi}$ absteht, so ist

$$\tan\alpha = \frac{3\pi l}{4R},\ \cot\alpha = \frac{4R}{3\pi l},\ \cos\vartheta = \sin\alpha,\ n = \tfrac{1}{2},$$

folglich:

$$T = \frac{3}{5} M \left\{ \left[\varrho_0^2 + \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 \right] \frac{31}{28} - \frac{5}{3} \left(\frac{45}{28} h\right)^2 \left(\frac{4R}{3\pi l}\right)^2 \right\};$$

nun ist aber $\varrho_0^2 + \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 = \varrho_1^2 = \frac{1}{2} R^2$, folglich:

137) $$T = \left(\frac{93}{280} - \frac{225}{196\pi^2}\right) M R^2.$$

XI. Trägheitsmomente von Sectoren der Rotationsflächen.

Der Centriwinkel des Sectors sei ω, und die geometrische (Rotations-) Achse falle mit der Achse der z zusammen, welche von O (s. Taf. III, Fig. 25) aus gerechnet werden, wobei $OC = z$, $OA = z_0$, $OB = z_1$ und $z_1 - z_0 = AB = l$ sein möge. Zerlegen wir nun die Rotationsfläche in Elemente durch Ebenen $\perp$ zur Achse der z, so lässt sich jedes derselben, z. B. EF, betrachten als ein kleines Rechteck, dessen eine Seite ein Kreisbogen, beschrieben mit dem zugehörigen Halbmesser $CE = r$, ist, während die andere Seite das Bogendifferential ds der (die Rotationsfläche erzeugenden) Linie GH ist, in welcher die Ebene $ABGEH$ die Rotationsfläche schneidet; lautet die Gleichung von HEG: $r = f(z)$, so ist $ds = \sqrt{dr^2 + dz^2} = dz \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}$; die Masse des Elementes ist daher $dM = \mu dV = \mu\delta \,.\, r \,.\, \omega \,.\, ds$; die Dicke δ der Fläche und der Centriwinkel ω ist für alle Elemente gleich gross, daher ist die Masse des Sectors:

$$M = \mu\,\delta\,\omega \int_{z_0}^{z_1} r\, ds.$$

A) Wählen wir die Rotationsachse als Drehachse, so hat das Massenelement dM von dieser den Abstand r, folglich ist sein Trägheitsmoment $T' = r^2 dM = \mu\delta\omega \,.\, r^3 ds$ und das Trägheitsmoment des ganzen Sectors:

138) $$T_1 = \Sigma T' = M \frac{\int_{z_0}^{z_1} r^3 ds}{\int_{z_0}^{z_1} r\, ds}.$$

1) Cylinderfläche; $r = R$ constant, $dr = 0$; $ds = dz$, $M = \mu\delta\omega R l$

139) $$T_1 = M \frac{R^3 \int_{z_0}^{z} ds}{R \int_{z_0}^{z_1} ds} = M R^2;$$

vergl. IV.

2) Kegelfläche; die Spitze liege in O, z_0 sei $=0$, $z_1 = l$, der Halbmesser der Grundfläche $= R$, mithin

$$r = \frac{R}{l} z,\ ds = dz \sqrt{1 + \left(\frac{R}{l}\right)^2},$$

140) $$T_1 = M \frac{\left(\frac{R}{l}\right)^3 \int_0^l z^3 dz}{\frac{R}{l} \int_0^l z\, dz} = \frac{\frac{1}{4} R^2 l^2}{\frac{1}{2} l^2} M = \frac{1}{2} M R^2.$$

3) Kugelfläche, deren Mittelpunkt O, deren Gleichung $r^2 = R^2 - z^2$ sein möge;

$$dr = -\frac{z\,dz}{\sqrt{R^2 - z^2}},\quad ds = \frac{R\,dz}{\sqrt{R^2 - z^2}},$$

$$M = \mu\,\delta\,\omega \int_{z_0}^{z_1} \sqrt{R^2 - z^2} \frac{R\,dz}{\sqrt{R^2 - z^2}} = \mu\,\delta\,\omega\,R\,(z_1 - z_0)$$

und

$$T_1 = M \frac{\int_{z_0}^{z_1} (R^2 - z^2)\,dz}{\int_{z_0}^{z_1} dz} = M\left(R^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{z_1^3 - z_0^3}{z_1 - z_0}\right)$$

141) $$T_1 = M\left(R^2 - \frac{z_1^2 + z_1 z_0 + z_0^2}{3}\right).$$

Ist der erzeugende Kreisbogen ein Quadrant, so ist $z_0 = 0$, $z_1 = R$, mithin

142) $$T_1 = M\left(R^2 - \frac{1}{3} R^2\right) = \frac{2}{3} M R^2.$$

Setzen wir dagegen $z_1 = z_0 = z$, so wird $T_1 = (R^2 - z^2) M = M r^2$, in Uebereinstimmung mit IV.

4) Paraboloidfläche, deren Scheitel in O liegt; die Gleichung der erzeugenden Parabel sei: $r^2 = 2pz$, $r\,dr = p\,dz$, $r\,ds = dz \sqrt{r^2 + p^2}$, folglich bei $z_0 = 0$ und $z_1 = l$, $2pl = b^2$

$$T_1 = M \frac{\int_0^l 2pz \sqrt{p^2 + 2pz}\,dz}{\int_0^l \sqrt{p^2 + 2pz}\,dz}.$$

Setzen wir $\sqrt{2pz + p^2} = \zeta$, $2pz = \zeta^2 - p^2$, $p\,dz = \zeta\,d\zeta$, so wird

$$\int_0^l 2pz\sqrt{p^2+2pz}\,dz = \frac{1}{p}\int_p^{\sqrt{b^2+p^2}} (\zeta^2-p^2)\,\zeta^2\,d\zeta = \frac{1}{p}\left(\tfrac{1}{5}\sqrt{b^2+p^2}^5 - \tfrac{1}{5}p^5 + \tfrac{1}{3}\sqrt{b^2+p^2}^3 - \tfrac{1}{3}p^3\right)$$

$$\int_0^l \sqrt{p^2+2pz}\,dz = \frac{1}{p}\int_p^{\sqrt{b^2+p^2}} \zeta^2\,d\zeta = \frac{1}{p}\left(\tfrac{1}{3}\sqrt{b^2+p^2}^3 - \tfrac{1}{3}p^3\right)$$

und

143) $$T_1 = \tfrac{1}{5}M\,\frac{3\sqrt{b^2+p^2}^5 + 5\sqrt{b^2+p^2}^3 - 3p^5 - 5p^3}{\sqrt{b^2+p^2}^3 - p^3}$$

$$= M\left(1 + \tfrac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{b^2+p^2}^5 - p^5}{\sqrt{b^2+p^2}^3 - p^3}\right);$$

$$M = \tfrac{1}{3}\,\frac{\mu\delta\omega}{p}\left(\sqrt{b^2+p^2}^3 - p^3\right).$$

B) Die Drehachse DD (s. Taf. III, Fig. 26) gehe durch den Coordinatenanfang O und stehe senkrecht auf der geometrischen Achse OZ. Der Schwerpunkt S_1 des Elementes $EF = dM$ liegt auf der Linie CL durch die Mitte des Elementes und zwar in der Entfernung $CS_1 = \frac{ru}{2r\sin\frac{1}{2}u}r = \frac{\frac{1}{2}u}{\sin\frac{1}{2}u}r$ von C. Legen wir aber durch C eine Achse $D_1D_1 \parallel DD$ und bestimmen für diese nach 17) das Trägheitsmoment des Elementes $T' = \frac{1}{2}r^2\,dM\left(1 - \frac{\cos\varphi_0\sin\varphi_0 - \cos\varphi_1\sin\varphi_1}{\omega}\right)$, wobei $\angle ECD_1 = \varphi_0$, $FCD_1 = \varphi_1$ und $\varphi_0 - \varphi_1 = \omega$, so ist nach 8) das Trägheitsmoment des Elementes für die Achse DD:

$$T'' = T' + \overline{OC}^2\,.\,dM = T' + z^2\,dM;$$

das Trägheitsmoment des ganzen Sectors ist demnach:

144) $$T_1 = \Sigma T''$$

$$= \mu\delta\omega\int_{z_0}^{z_1} r\left[\tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{\cos\varphi_0\sin\varphi_0 - \cos\varphi_1\sin\varphi_1}{\omega}\right)r^2 + z^2\right]\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2}\,.\,dz.$$

Ist aber EF ein Quadrant von D_1D_1 aus, also $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, so ist:

145) $$T_1 = \mu\delta\omega\int_{z_0}^{z_1} r\left(\tfrac{1}{2}r^2 + z^2\right)\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2}\,dz;$$

ist dagegen $\varphi_1 = -\varphi_0$, also EF symmetrisch gegen D_1D_1, so ist

146) $$T_1 = \mu\delta\omega\int_{z_0}^{z_1} r\left[\tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{2\cos\varphi_0\sin\varphi_0}{\omega}\right)r^2 + z^2\right]\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2}\,dz;$$

ist endlich EF ein voller Kreis, d. h. $\varphi_1 = 0$, $\varphi_0 = 2\pi = \omega$, so ist

147) $$T_1 = 2\mu\delta\pi\int_{z_0}^{z_1} r\left(\tfrac{1}{2}r^2 + z^2\right)\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2}\,dz;$$

z. B. Kugelfläche, deren Mittelpunkt O ist;

$$r^2 = R^2 - z^2,\ \frac{dr}{dz} = -\frac{z}{\sqrt{R^2 - z^2}};\ z_0 = -R,\ z_1 = R,$$

$$T = 2\mu\delta\pi\int_{-R}^{+R} r\,\tfrac{1}{2}(R^2+z^2)\frac{R\,dz}{\sqrt{R^2-z^2}} = \mu\delta\pi R\int_{-R}^{+R}(R^2+z^2)\,dz = \tfrac{8}{3}\mu\delta\pi R^4,$$

$$M = 2\mu\delta\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - z^2}\,ds = 4\mu\delta\pi R^2,$$

148) $T = \frac{2}{3} M R^2,$
wie 142).

C) Die unter A) und B) entwickelten Formeln lassen sich auch aus der allgemeinen Formel 2) herleiten. Setzen wir nämlich in

2) $$T = \mu\int\int\int r_1^2\,dx\,dy\,dz:$$

$$x = r\sin\omega,\ y = r\cos\omega,\ r = f(z),\ dr = \delta\frac{ds}{dz},\ dV = \delta r\,d\omega\,dz\frac{ds}{dz},$$

so wird nach 3)

149) $$T_1 = \mu\delta\Big[\sin^2\alpha\int\int r^3\sin^2\omega\,d\omega\,ds + \sin^2\beta\int\int r^3\cos^2\omega\,d\omega\,ds$$
$$+ \sin^2\gamma\int\int z^2 r\,d\omega\,ds - 2\cos\beta\cos\gamma\int\int r^2 z\cos\omega\,d\omega\,ds$$
$$-2\cos\alpha\cos\gamma\int\int r^2 z\sin\omega\,d\omega\,ds - 2\cos\alpha\cos\beta\int\int r^3\sin\omega\cos\omega\,d\omega\,ds\Big].$$

Ist die geometrische Achse die Drehachse, so wird $\alpha = \beta = 90^0$, $\gamma = 0$ und

$$T_1 = \mu\delta\left[\int\int r^3\sin^2\omega\,d\omega\,ds + \int\int r^3\cos^2\omega\,d\omega\,ds\right]$$
$$= \mu\delta\int\int r^3\,d\omega\,ds = \mu\delta\omega\int_{z_0}^{z_1} r^3\,ds$$

in Uebereinstimmung mit 138).

Steht die geometrische Achse senkrecht auf der Drehachse, ist $=\alpha=\gamma 90^0$, $\beta = 0$, so wird

$$T_1 = \mu\delta\left[\int\int r^3\sin^2\omega\,d\omega\,ds + \int\int z^2 r\,d\omega\,ds\right]$$
$$= \mu\delta\omega\int_{z_0}^{z_1}\left[\tfrac{1}{2}r^3\left(1 - \frac{\cos\varphi_0\sin\varphi_0 - \cos\varphi_1\sin\varphi_1}{\omega}\right) + rz^2\right]ds,$$

in Uebereinstimmung mit 144).

Setzen wir die Elemente als Vollkreise voraus, so wird in 149)

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\omega\, d\omega = \int_0^{2\pi} \cos^2\omega\, d\omega = \pi; \int_0^{2\pi} d\omega = 2\pi;$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\omega\, d\omega = \int_0^{2\pi} \sin\omega\, d\omega = \int_0^{2\pi} \cos\omega \sin\omega\, d\omega = 0;$$

folglich allgemein:

150) $$T_1 = \mu\delta\pi\,[(\sin^2\alpha + \sin^2\beta)\int_{z_0}^{z_1} r^3 ds + 2\sin^2\gamma \int_{z_0}^{z_1} r z^2 ds].$$

XII. Trägheitsmomente von Sectoren der Rotationskörper.

Der Centriwinkel des Sectors sei wieder ω, auch werde die übrige Bezeichnung aus XI. beibehalten und die geometrische Achse als Achse der z genommen; setzen wir nun nicht volle, sondern ringförmige Sectoren (im Querschnitte wie $ABCE$ in Fig. 8) voraus, und sei bei dem Elemente $FKLE$, Fig. 25, (senkrecht zur geometrischen Achse) der äussere Radius $CE = r$, der innere $CL = r_0$, so ist die Masse des Elementes:

$$dM = \mu \tfrac{1}{2}(r^2 - r_0^2)\,\omega\,.\,dz$$

und die Masse des ganzen Sectors:

$$M = \tfrac{1}{2}\mu\omega \int_{z_0}^{z_1} (r^2 - r_0^2)\,dz;\; r = f(z),\; r_0 = f_0(z).$$

A) Ist die geometrische Achse die Drehachse, so ist nach 42) das Trägheitsmoment des Elementes $T' = \frac{1}{2} dM\,(r^2 + r_0^2)$ und das Trägheitsmoment des ganzen Sectors:

151) $$T_1 = \tfrac{1}{4}\mu\omega \int_{z_0}^{z_1} (r^4 - r_0^4)\,dz = \tfrac{1}{2} M \frac{\int_{z_0}^{z_1} (r^4 - r_0^4)\,dz}{\int_{z_0}^{z_1} (r_1^2 - r_0^2)\,dz};$$

wäre der Sector voll, so wäre $r_0 = 0$ zu setzen.

1) Cylinder; $r_0 = 0$, $r = R$,

$$T_1 = \tfrac{1}{2} MR^2,$$

wie 64).

2) Kegel; $r_0 = 0$, Halbmesser der Grundfläche $= R$, $r = \frac{R}{l} z$

$$T_1 = \tfrac{1}{2} M \frac{\frac{1}{5} R^4 l}{\frac{1}{3} R^2 l} = \tfrac{3}{10} R^2 M,$$

wie 112).

3) Kugel; $r_0 = 0$, $r = \sqrt{R^2 - z^2}$

$$T_1 = \tfrac{1}{2} M \frac{\int\limits_{z_0}^{z_1} (R^2 - z^2)^2 dz}{\int\limits_{z_0}^{z_1} (R^2 - z^2)\, dz} = \tfrac{1}{2} M \left(\frac{R^4 - \frac{2}{3} R^2 z^2 + \frac{1}{5} z^4}{R^2 - \frac{1}{3} z^2}\right)_{z=z_0}^{z=z_1}.$$

Ist aber die erzeugende Kreisfläche ein Quadrant, und zwar $z_0 = 0$, $z_1 = R$, so ist

152) $$T_1 = \tfrac{1}{2} M \frac{\frac{8}{15} R^4}{\frac{2}{3} R^2} = \tfrac{2}{5} M R^2.$$

4) Rotationsellipsoid; $r_0 = 0$, $r = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - z^2}$

$$T_1 = \tfrac{1}{2} M \frac{b^2}{a^2} \frac{\int\limits_{z_0}^{z_1} (a^2 - z^2)^2 dz}{\int\limits_{z_0}^{z_1} (a^2 - z^2)\, dz} = \tfrac{1}{2} M \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{a^4 - \frac{2}{3} a^2 z^2 + \frac{1}{5} z^4}{a^2 - \frac{1}{3} z^2}\right)_{z=z_0}^{z=z_1}$$

oder wenn die erzeugende Fläche ein Ellipsenquadrant, $z_0 = 0$ und $z_1 = a$ ist, so ist

153) $$T_1 = \tfrac{1}{2} M \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\frac{8}{15} a^4}{\frac{2}{3} a^2} = \tfrac{2}{5} M b^2.$$

5) Rotationshyperboloid, Drehung um die grosse Achse, $r_0 = 0$, $r = \frac{b}{a}\sqrt{z^2 - a^2}$

154) $$T_1 = \tfrac{1}{2} M \frac{b^2}{a^2} \frac{\int\limits_{a}^{z_1} (z^2 - a^2)^2 dz}{\int\limits_{a}^{z_1} (z^2 - a^2)\, dz} = \tfrac{1}{2} M \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{\frac{1}{5} z_1^4 - \frac{2}{3} a^2 z_1^2 + a^2}{\frac{1}{3} z_1^2 - a^2} + \tfrac{4}{5} a^2\right).$$

Ist aber $z_1 = 2a$, so ist:

$$T_1 = \tfrac{1}{2} M \frac{b^2}{a^2} \left(\tfrac{23}{5} a^2 + \tfrac{4}{5} a^2\right) = \tfrac{27}{10} M b^2.$$

6) Rotationsparaboloid; $r^2 = 2pz$, $b^2 = 2ph$, $r_0 = 0$

155) $$T_1 = \tfrac{1}{2} M \frac{\int\limits_0^h 4p^2 z^2 dz}{\int\limits_0^h 2pz\, dz} = \tfrac{2}{3} M p h = \tfrac{1}{3} M b^2.$$

7) **Ringstück mit rechtwinkelig dreieckigem Querschnitt** ABC (s. Taf. III, Fig. 27), dessen eine Kathete $AB = l$ parallel zur Drehachse DD in der Entfernung $EA = a$; ist $BC = b$, so ist

$$r_0 = a,\ FG = r_1 = a + \frac{b}{l} z,\ r_1^2 - r_0^2 = \frac{2ab}{l} z + \frac{b^2}{l^2} z^2,$$

$$r_1^4 - r_0^4 = \frac{4a^3 b}{l} z + \frac{6a^2 b^2}{l^2} z^2 + \frac{4ab^3}{l^3} z^3 + \frac{b^4}{l^4} z^4$$

und

$$T_1 = \tfrac{1}{2} M \frac{2a^3 bl + 2a^2 b^2 l + ab^3 l + \frac{1}{5} b^4 l}{abl + \frac{1}{3} b^2 l}$$

156) $$T_1 = \tfrac{1}{2} M \frac{2a^3 + 2a^2 b + ab^2 + \frac{1}{5} b^3}{a + \frac{1}{3} b}.$$

Für $a = 0$ wird $T_1 = \frac{3}{10} Mb^2$, wie bereits 112).

8) **Ringstück, dessen Querschnitt** FHG (s. Taf. III, Fig. 28) **im Innern einen Kreisquadrant** ($r_0^2 = R^2 - z^2$) **und nach aussen einen damit concentrischen Ellipsenquadrant** $r_1^2 = \frac{b^2}{R^2}(R^2 - z^2)$ **zur Grenze hat.**

$$r_1^2 - r_0^2 = \frac{b^2 - R^2}{R^2}(R^2 - z^2),\ r_1^4 - r_0^4 = \frac{b^4 - R^4}{R^4}(R^2 - z^2)^2$$

und

157) $$T_1 = \tfrac{1}{2} M \frac{b^2 + R^2}{R^2} \cdot \frac{\int\limits_0^R (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4)\, dz}{\int\limits_0^R (R^2 - z^2)\, dz} = \tfrac{2}{5} MR^2.$$

9) **Ringstück mit elliptischem Querschnitte**; der Mittelpunkt der Ellipse $\left(y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - z^2}\right)$, stehe um c von der Drehachse ab, welche mit der Halbachse a parallel sein möge; dann ist

$$r_0 = c - y,\ r_1 = c + y,\ r_1^2 - r_0^2 = 4cy = 4\frac{bc}{a}\sqrt{a^2 - z^2},$$

$$r_1^4 - r_0^4 = 8cy(c^2 + y^2) = \frac{8bc}{a^3}\sqrt{a^2 - z^2}\,[c^2 a^2 + b^2(a^2 - z^2)]$$

$$T_1 = \tfrac{1}{2} M \frac{\int\limits_{-a}^{+a} (r_1^4 - r_0^4)\, dz}{\int\limits_{-a}^{+a} (r_1^2 - r_0^2)\, dz} = \tfrac{1}{2} M \frac{\int\limits_0^a (r_1^4 - r_0^4)\, dz}{\int\limits_0^a (r_1^2 - r_0^2)\, dz},$$

oder, wenn $z = a\cos\varphi$, $dz = -a\sin\varphi\, d\varphi$, $\sqrt{a^2 - z^2} = a\sin\varphi$ gesetzt wird:

$$T_1 = \tfrac{1}{2} M \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8cb}{a^3} a^2 \sin^2\varphi\,(c^2 a^2 + b^2 a^2 \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4cb}{a} a^2 \sin^2\varphi\,d\varphi}$$

158) $$T_1 = M \frac{c^2 \tfrac{1}{2} \frac{\pi}{2} + b^2 \frac{3.1}{4.2}.\frac{\pi}{2}}{\tfrac{1}{2}\frac{\pi}{2}} = M(c^2 + \tfrac{3}{4} b^2);$$

nach der Guldin'schen Regel ist $M = \mu . ab\pi . wc$.

B) Die Drehachse gehe durch den Coordinatenanfang und stehe senkrecht auf der geometrischen Achse. (Vergl. XI. *B*.) Legen wir durch den Mittelpunkt des sectorförmigen Elementes eine Drehachse parallel zu der durch den Coordinatenanfang gehenden, so ist für erstere nach 30) $T' = \tfrac{1}{4} dM (r^2 + r_0^2)\left(1 - \frac{\cos\varphi_0' \sin\varphi - \cos\varphi_0 \sin\varphi_0}{\omega}\right)$, wobei $\omega = \omega_1 - \omega_0 = \varphi_0 - \varphi_1$, und nach 8) das Trägheitsmoment des Elementes für die Drehachse durch den Coordinatenanfang $T'' = T' + z^2\,dM$ und das Trägheitsmoment des Sectors für diese Achse:

$$T_1 = \Sigma T'' = \tfrac{1}{2}\mu\omega \int_{z_0}^{z_1} \left[\frac{r^2 + r_0^2}{4}\left(1 - \frac{\cos\varphi_0 \sin\varphi_0 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_1}{\omega}\right) + z^2\right](r^2 - r_0^2)\,dz$$

159) $$T_1 = M \frac{\int_{z_0}^{z_1} \left[\frac{r^4 - r_0^4}{4}\left(1 - \frac{\cos\varphi_0 \sin\varphi_0 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_1}{\omega}\right) + z^2(r^2 - r_0^2)\right] dz}{\int_{z_0}^{z_1} (r^2 - r_0^2)\,dz}$$

z. B. 1) Quadrant eines Rotationsparaboloides;

$$\varphi_0 = 0,\ \varphi_1 = \frac{\pi}{2} = \omega,\ r_0 = 0,\ r = \sqrt{2pz},\ b = \sqrt{2ph};$$

160) $$T_1 = M \frac{\int_0^h \left(\tfrac{1}{4}\sqrt{2pz}^4 + z^2\sqrt{2ph}^2\right) dz}{\int_0^h 2pz\,dz} = (\tfrac{2}{3}ph + \tfrac{1}{2}h^2)M = \tfrac{1}{2}(h^2 + \tfrac{1}{3}b^2)M.$$

2) Abgestutzter Kegel mit cylindrischer Aushöhlung, ein Durchmesser *EA* (s. Taf. III, Fig. 27) der Abstutzungsfläche als Dreh-

achse und zwar wieder $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} = \omega$; der Schnitt durch die geometrische Achse sei $MACN$ und es sei

$$r_0 = EM = a, \quad r = EA + \frac{BC}{MN} z = b + \frac{c}{h} z,$$

und

$$161) \quad T_1 = M \frac{\frac{b^4 - a^4}{4} + \frac{1}{2} b^3 c + \frac{1}{2} b^2 c^2 + \frac{b^2 - a^2}{3} h^2 + \frac{c^4 + 4 h^2 c^2}{20} + \frac{b c^3 + 2 b c h^2}{4}}{b^2 - a^2 + b c + \frac{1}{3} c^2};$$

Ist aber $a = 0$ und $b = c = \frac{1}{2} R$, so wird:

$$T_1 = M \frac{\frac{31}{20} b^4 + \frac{31}{30} b^2 h^2}{\frac{7}{8} b^2} = \frac{31}{140} M \left(\frac{3}{4} R^2 + 2 h^2\right),$$

wie schon 135).

3) **Rotationsellipsoid**, dessen Mittelpunkt um l von der Drehachse entfernt ist;

$$\varphi_0 = 0, \ \varphi_1 = 2\pi = \omega, \ r_0 = 0, \ r^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \ x = z = l,$$

$$r^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - l^2 + 2 l z - z^2)$$

$$162) \quad T_1 = \frac{b^2}{4 a^2} M \frac{\int\limits_{l-a}^{l+a} (a^2 - l^2 + 2 l z - z^2)\left(a^2 - l^2 + 2 l z + \frac{b^2 + 4 a^2}{b^2} z^2\right) dz}{\int\limits_{l-a}^{l+a} (a^2 - l^2 + 2 l z - z^2)\, dz} = M\left(\frac{b^2 + a^2}{5} + l^2\right)$$

Setzt man $a = b = R$, so wird das Rotationsellipsoid zur **Kugel** und für diese ist:

$$163) \qquad T_1 = M\left(\tfrac{2}{5} R^2 + l^2\right)$$

und wenn $l = 0$ ist:

$$T_1 = \tfrac{2}{5} M R^2,$$

wie schon 152).

C) Auch Formel 151) und 159) lassen sich unmittelbar ableiten. Setzen wir nämlich in

$$(2) \qquad T = \int\!\!\int\!\!\int r_1^2 \, dx \, dy \, dz$$

wieder

$$x = r \sin\omega, \ y = r \cos\omega, \ r = f(z), \ dV = r\, d\omega\, dr\, dz,$$

so wird nach 3):

$$164) \quad T_1 = M \Big[\sin^2\alpha \int\!\!\int\!\!\int r^3 \sin^2\omega \, d\omega\, dr\, dz + \sin^2\beta \int\!\!\int\!\!\int r^3 \cos^2\omega \, d\omega\, dr\, dz$$
$$+ \sin^2\gamma \int\!\!\int\!\!\int z^2 r \, d\omega\, dr\, dz - 2 \cos\beta \cos\gamma \int\!\!\int\!\!\int r^2 z \cos\omega \, d\omega\, dr\, dz$$
$$- 2 \cos\alpha \cos\gamma \int\!\!\int\!\!\int r^2 z \sin\omega \, d\omega\, dr\, dz - 2 \cos\alpha \cos\beta \int\!\!\int\!\!\int r^2 d\omega\, dr\, dz \Big].$$

Ist aber die geometrische Achse die Drehachse, so wird $\alpha=\beta=90^0$, $\gamma=0$ und

$$T_1=\mu\int\int\int r^3 d\omega\, dr\, dz=\tfrac{1}{4}\mu\omega\int_{z_0}^{z_1}(r^4-r_0^4)\,dz,$$

wie 151); steht dagegen die Drehachse senkrecht auf der geometrischen Achse, so wird bei $\alpha=\gamma=90^0$, $\beta=0$:

$$T_1=\mu\left[\int\int\int r^3\sin^2\omega\, d\omega\, dr\, dz+\int\int\int z^2 r\, d\omega\, dr\, dz\right]$$

$$=\tfrac{1}{2}\mu\omega\int_{z_0}^{z_1}\left[\frac{r^4-r_0^4}{4}\left(1-\frac{\cos\varphi_0\sin\varphi_0-\cos\varphi_1\sin\varphi_1}{\omega}\right)+z^2(r^2-r_0^2)\right]dz,$$

wie 159).

Setzen wir wieder die Elemente als Vollkreise voraus, so wird in 164):

$$\int_0^{2\pi}\sin^2\omega\, d\omega\, dr\, dz=\int_0^{2\pi}\cos^2\omega\, d\omega\, dr\, dz=\pi;\quad\int_0^{2\pi}d\omega=2\pi;$$

$$\int_0^{2\pi}\cos\omega\, d\omega=\int_0^{2\pi}\sin\omega\, d\omega=\int_0^{2\pi}\cos\omega\sin\omega\, d\omega=0,$$

und allgemein:

$$165)\quad T_1=\mu\pi\left[(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)\int_{z_0}^{z_1}\frac{r^4-r_0^4}{4}dz+2\sin^2\gamma\int_{z_0}^{z_1}\frac{r^2-r_0^2}{2}z^2dz\right].$$

Ist die Drehachse unter den Winkel γ gegen die geometrische Achse geneigt und man legt die ZX-Ebene durch die Drehachse, so ist $\alpha=90^0=\gamma$ und $\beta=90^0$, folglich

$$T_1=\mu\Big[\cos^2\gamma\int\int\int r^3\sin^2\omega\, d\omega\, dr\, dz+\int\int\int r^3\cos^2\omega\, d\omega\, dr\, dz$$
$$+\sin^2\gamma\int\int\int z^2 r\, d\omega\, dr\, dz-2\sin\gamma\cos\gamma\int\int\int r^2 z\sin\omega\, d\omega\, dr\, dz\Big]$$

$$166)\quad T_1=\mu\left\{\left[1-\tfrac{1}{2}\sin^2\gamma\left(\frac{\cos\varphi_0\sin\varphi_0-\cos\varphi_1\sin\varphi_1}{\omega}\right)\right]\omega\int_{z_0}^{z_1}\frac{r^4-r_0^4}{4}dz\right.$$
$$\left.+\omega\sin^2\gamma\int_{z_0}^{z_1}\frac{r^2-r_0^2}{4}z^2dz+2\sin\gamma\cos\gamma(\cos\varphi_0-\cos\varphi_1)\int_{z_0}^{z_1}\frac{r^3-r_0^3}{3}z\,dz\right\}.$$

Für diesen Fall kann man aber auch mit Hilfe der Formeln in VI. *C.*) einen Ausdruck für das Trägheitsmoment erlangen. Die Drehachse gehe z. B. durch den Coordinatenanfang; legen wir aber durch den Mittelpunkt des Elementes eine parallele Drehachse, so ist für diese das Trägheitsmoment des Elementes $T'=\varrho^2 dM$, für die Drehachse aber

$$T'' = T' + (z \sin\gamma)^2 \, . \, dM = z^2 \sin^2\gamma \, dM,$$

mithin das Trägheitsmoment des Sectors:

167) $$T_1 = \int (\varrho^2 + z^2 \sin^2\gamma) \, dM.\text{*)}$$

Ist $r_0 = 0$, $r = \frac{R}{l} z$ und sind die Elemente Vollkreise $\omega = 2\pi$, so ist

$$dM = \tfrac{1}{2} \mu r^2 \omega \, dz = \tfrac{1}{2} \mu \omega \frac{R^2}{l^2} z^2 dz,$$

und nach 53):

$$\varrho^2 = \tfrac{1}{4} r^2 (\sin^2\alpha + 1) = \tfrac{1}{4} (\sin^2\alpha + 1) \frac{R^2}{l^2} z^2,$$

folglich:

$$T_1 = \tfrac{1}{2} \mu \omega \frac{R^2}{l^2} \left[\tfrac{1}{4} (1 + \sin^2\alpha) \frac{R^2}{l^2} + \sin^2\gamma \right] \int_0^l z^4 dz,$$

$$M = \tfrac{1}{6} \mu \omega R^2 l$$

168) $$T_1 = \tfrac{3}{5} M \left[\tfrac{1}{4} (1 + \sin^2\alpha) R^2 + l^2 \cos^2\alpha \right] = \tfrac{3}{5} M \left[\tfrac{1}{4} (1 + \cos^2\gamma) R^2 + l^2 \sin^2\gamma \right],$$

was sich auch aus 166) ergiebt, wenn man nur, wie nöthig, $\varphi_0 = 2\pi$ und $\varphi_1 = 0$ setzt. Für $\alpha = 0$ und $\alpha = 90^0$ erhält man wieder (120) und 112).

XIII. Trägheitsmomente von Körpern, bei denen sämmtliche parallele Querschnitte Figuren derselben Art sind und nach einem bestimmten Gesetze wachsen.

1) Octant des dreiachsigen Ellipsoides mit den Halbachsen a_1, b_1 und c_1 für eine seiner Achsen als Drehachse; das Element senkrecht zur Drehachse hat die Masse $dM = \frac{\pi}{4} ab\mu \, dz$ und nach 44) das Trägheitsmoment $T' = \frac{a^2 + b^2}{4} dM$, folglich ist das Trägheitsmoment des Octanten, weil

$$a = \frac{a_1}{c_1} \sqrt{c_1^2 - z^2} \text{ und } b = \frac{b_1}{c_1} \sqrt{c_1^2 - z^2},$$

$$T_1 = \frac{\pi}{16} \mu a_1 b_1 \frac{a_1^2 + b_1^2}{c_1^4} \int_0^{c_1} (c_1^2 - z^2)^2 dz;$$

$$M = \frac{\pi}{4} \frac{a_1 b_1}{c_1^2} \int_0^{c_1} (c_1^2 - z^2) \, dz$$

169) $$T_1 = \tfrac{1}{5} M (a_1^2 + b_1^2).$$

---

*) Vergl. 107) und 130).

Rotationsellipsoid:

$$a_1 = b_1 = b; \quad T_1 = \tfrac{2}{5} M b^2,$$

wie 153);

Kugel:

$$a_1 = b_1 = c_1 = R; \quad T_1 = \tfrac{2}{5} M R^2,$$

wie 152).

2) Elliptisches Paraboloid:

$$\frac{z}{l} = \frac{b^2}{b_1^2} = \frac{a^2}{a_1^2}; \quad dM = \pi \mu \, ab \, dz;$$

a) geometrische Achse als Drehachse:

$$T' = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2)\, dM,$$

$$T = \tfrac{1}{4} \mu \pi \, a_1 b_1 \frac{a_1^2 + b_1^2}{l^2} \int_0^l z^2 dz;$$

$$M = \tfrac{1}{2} \pi \mu \, a_1 b_1 l;$$

170)
$$T = \tfrac{1}{2} M \cdot \frac{a_1^2 + b_1^2}{3}.$$

b) Drehachse senkrecht zur geometrischen Achse und parallel zu b_1 durch den Scheitel; nach 33) und 7) ist:

$$T' = \tfrac{1}{4} dM \, a^2 + z^2 dM$$

$$T_1 = \frac{\pi \mu \, a_1 b_1}{l} \int_0^l \left(\tfrac{1}{4} \frac{a_1^2}{l} z^2 + z^3 \right) dz$$

$$T_1 = \tfrac{1}{2} M \left(\tfrac{1}{3} a_1^2 + l^2 \right).$$

3) Die Querschnitte seien Quadrate, deren Eckpunkte in zwei congruenten Parabeln liegen, deren Ebenen sich senkrecht schneiden; die Drehachse stehe normal auf den Quadraten in deren Schwerpunkte und sei zugleich die geometrische Achse. Ist die halbe Diagonale $\partial^2 = \frac{\partial_1^2}{l} z$, so ist

$$dM = 2\partial^2 \mu \, dz; \quad M = 2\mu \frac{\partial_1^2}{l} \int_0^l z \, dz = \mu \partial_1^2 l;$$

$$T' = \tfrac{1}{3} dM \, \partial^2,$$

172)
$$T = \tfrac{2}{3} \mu \frac{\partial_1^4}{l^2} \int_0^l z^2 dz = \tfrac{2}{9} M \partial_1^2.$$

4) Alle Querschnitte seien Kreise, die geometrische Achse aber, welche die Mittelpunkte derselben verbindet, stehe unter dem Winkel α auf der Ebene jedes Kreises; die Halbmesser der Kreise mögen proportinal z^2 wachsen, also $r = Rz^2$; ist die geometrische Achse Drehachse, so ist

$$dM = \mu\pi r^2 dz = \mu\pi R^2 z^4 dz;$$

$$M = \mu\pi R^2 \int_0^l z^4 dz = \tfrac{1}{5}\mu\pi R^2 l^5;$$

$$T' = \tfrac{1}{4} r^2 (\sin^2\alpha + 1)\, dM,$$

nach 53);

173) $$T = \tfrac{1}{4} R^4 \mu\pi (\sin^2\alpha + 1) \int_0^l z^8 dz = \tfrac{1}{36} R^4 \mu\pi (\sin^2\alpha + 1) l^9$$
$$= \tfrac{5}{36} (\sin^2\alpha + 1) R^2 l^4 M.$$

Wäre dagegen $r^2 = R^2 z$, so wäre

$$dM = \mu\pi r^2 dz;\quad M = \tfrac{1}{2}\mu\pi R^2 l^2$$

174) $$T = \tfrac{1}{4} R^4 \mu\pi (\sin^2\alpha + 1) \int_0^l z^2 dz = \tfrac{1}{6} M R^2 l (\sin^2\alpha + 1),$$

setzen wir aber $R^2 l = b^2$, so wird für $\alpha = 90^0$:

$$T = \tfrac{1}{3} M b^2,$$

wie 155).

5) Querschnitte regelmässige Sechsecke, deren Ecken auf einer Kugeloberfläche liegen; die Drehachse sei der Durchmesser der Kugel, welcher die geometrische Achse des Körpers ist und normal auf den Querschnitten steht; ist c_1 der Radius der Kugelfläche, so lautet deren Gleichung $c^2 = c_1^2 - z^2$; und in 41) haben wir $b = c$, $a^2 = c^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} c^2$ zu setzen; es ist daher:

$$T' = \tfrac{1}{3} dM \left(\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2}\right) c^2 = \tfrac{5}{12} dM\, c^2,\quad dM = 6\mu \frac{ab}{2} dz = \frac{3\sqrt{3}}{2} \mu c^2 dz,$$

$$M = \frac{3\sqrt{3}}{2} \mu \int_{-c_1}^{+c_1} (c_1^2 - z^2)\, dz = 2\sqrt{3}\,\mu c_1^3$$

175) $$T_1 = \frac{5\sqrt{3}}{8} \mu \int_{-c_1}^{+c_1} (c_1^2 - z^2)^4 dz = \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\,\mu c_1^5 = \tfrac{1}{3} M c_1^2.$$

XIV. Trägheitsmomente von Körpern, welche aus einzelnen homogenen Theilen von verschiedener Dichte bestehen.

Nach dem Vorhergehenden bestimmt man die Trägheitsmomente der einzelnen homogenen Theile und addirt dieselben. z. B. Eine homogene Kugel von Halbmesser R der Gesammtmasse $M = \frac{4}{3}\mu_1 \pi R^3$ und der Masse μ_1 in der Volumeinheit befindet sich am Ende eines ebenfalls homogenen *Kreiscylinders* von der Länge l, dem Halbmesser r der Gesammtmasse

$M_2 = \pi \mu_2 r^2 l$ und der Masse μ_2 in der Volumeinheit; Drehachse sei ein Durchmesser der andern Endfläche des Cylinders.

Trägheitsmoment der Kugel

für eine parallele Achse durch ihren Mittelpunkt nach 152):

$$T' = \tfrac{2}{5} M_1 R^2,$$

für die Drehachse:

$$T_1 = T' + (R+l)^2 M_1 = (\tfrac{7}{5} R^2 + 2lR + l^2) M_1;$$

Trägheitsmoment des Cylinders nach 72):

$$T_2 = (\tfrac{1}{4} r^2 + \tfrac{1}{3} l^2) M_2,$$

Trägheitsmoment des ganzen Körpers:

176) $$T_3 = T_1 + T_2 = \tfrac{4}{3} \mu_1 \pi R^3 (\tfrac{7}{5} R^2 + 2lR + l^2) + \pi \mu_2 r^2 l (\tfrac{1}{4} r^2 + \tfrac{1}{3} l^2).$$

XV. Trägheitsmomente von Körpern mit variabeler Dichte.

Allgemein ist $\mu = f(x, y, z)$, $T = \int \mu r^2 dV = \int f(x, y, z) r^2 dV$ und $M = \int f(x, y, z) dV$.

A) Ist μ von x und y unabhängig, also $\mu = f(z)$, so ist allgemein $T = \int f(z) r^2 dV$. Sind aber die Querschnitte senkrecht zur Achse der z (Schwerachse) ähnliche Figuren, also der Querschnitt in der Entfernung z vom Coordinatenanfang gegeben als $q = f_1(z)$, so ist $dM = q\mu\, dz = f_1(z) \cdot f(z)\, dz$, sein Trägheitsmoment $T' = \varrho^2 dM$ lässt sich nach VI. für eine parallele Achse durch seinen Schwerpunkt ermitteln; daraus findet sich für die wirkliche Drehachse durch den Coordinatenanfang

$$T'' = (\varrho^2 + z^2 \sin^2 \vartheta)\, dM,$$

durch ähnliche Schlüsse wie in VIII. *D*), IX. *D*), X. und XII. *C*) und endlich

177) $$T = \Sigma T'' = \int (\varrho^2 + z^2 \sin^2 \vartheta)\, dM;$$

z.B. für einen geraden Cylinder, dessen geometrische Achse Drehachse ist, ist $q = R^2\pi$, $\varrho^2 = \tfrac{1}{2} R^2$, $\sin^2\vartheta = 0$, folglich

$$T = \int_0^l \tfrac{1}{2} R^2 \cdot f(z) R^2 \pi\, dz = \tfrac{1}{2} \pi R^4 \int_0^l f(z)\, dz,$$

$$M = \pi R^2 \int_0^l f(z)\, dz$$

178) $$T = \tfrac{1}{2} R^2 \cdot M = \varrho^2 M.$$

Die Formel $T = \varrho^2 M$ gilt allgemein für alle Prismen, wenn $\vartheta = 0$ ist, weil dann $T = \varrho^2 \int dM$, da alle Elemente dasselbe ϱ haben.

Wäre nun $\mu = \mu_0 (1 + z)$, so wäre in 178):

$$M = \pi \mu_0 R^2 \int_0^l (1 + z)\, dz = \pi \mu_0 R^2 l\, (1 + \tfrac{1}{2} l)$$

$$T = \tfrac{1}{2} \pi \mu_0 R^4 l\, (1 + \tfrac{1}{2} l) = \tfrac{1}{2} \mu_0 R^2 V,$$

worin $V = \pi R^2 l$ das Volumen des Cylinders ist.

B) Ist μ unabhängig von z, also $\mu = f(x, y)$, und der Körper also ein gerades Prisma, mithin q constant, so lässt sich

$$dM = \int dm = dz \int\int \mu\, dx\, dy = dz \int\int f(x, y)\, dx\, dy = dz\, F_1$$

setzen und es ist das Trägheitsmoment des Elementes für eine parallele Achse durch seinen in der Achse der z liegenden Schwerpunkt

$$T' = \int r^2\, dm = dz \int\int r^2 f(x, y)\, dx\, dy, \quad = dz\, F_2{}^{*})$$

und für die wirkliche Drehachse durch den Coordinatenanfang:

$$T'' = T' + z^2 \sin^2 \vartheta\, dM,$$

und endlich das Trägheitsmoment des ganzen Prismas für die Drehachse

$$179) \quad T = \Sigma T'' = F_2 \int_0^l dz + F_1 \int_0^l z^2 \sin^2 \vartheta\, dz = F_2 l + \tfrac{1}{3} F_1 \sin^2 \vartheta\, l^3$$

z. B. Querschnitt ein Rechteck $= ab$, $\mu = \mu_0 (1 + x^2) = f(x, y)$, $\vartheta = 0$, d. h. Achse der z als Drehachse:

$$F_1 = \mu_0 \int_{-\frac{1}{2}a}^{+\frac{1}{2}a} \int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} (1 + x^2)\, dx\, dy = b \mu_0 \int_{-\frac{1}{2}a}^{+\frac{1}{2}a} (1 + x^2)\, dx = \mu_0 b a\, (1 + \tfrac{1}{12} a^2)$$

$$F_1 = = \mu_0 \int_{-\frac{1}{2}a}^{+\frac{1}{2}a} \int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} (x^2 + y^2)(1 + x^2)\, dx\, dy = \mu_0 b \left[\int_{-\frac{1}{2}a}^{+\frac{1}{2}a} x^2 (1 + x^2)\, dx + \tfrac{1}{12} b^2 \int_{-\frac{1}{2}a}^{+\frac{1}{2}a} (1 + x^2)\, dx \right]$$

$$= \mu_0 a b\, [\tfrac{1}{12} a^2 + \tfrac{1}{80} a^4 + \tfrac{1}{12} b^2 + \tfrac{1}{144} a^2 b^2)$$

$$180) \quad T = \mu_0 a b l\, [\tfrac{1}{12} a^2 + \tfrac{1}{80} a^4 + \tfrac{1}{12} b^2 + \tfrac{1}{144} a^2 b^2].$$

Aehnlich ist es bei schiefen Prismen, nur dass da $z = \zeta \sin \alpha$ zu setzen wäre.

C) Aendert sich die Dichte nach andern Gesetzen, so kann man in einer Weise verfahren, welche aus folgenden 2 Beispielen ersichtich wird.

1) Trägheitsmoment einer hohlen Kugel, welche aus gleich dichten, concentrisch um den Mittelpunkt liegenden Kugelschalen besteht; die Drehachse gehe durch den Mittelpunkt und die Dichte ändere sich sich von Schale zu Schale nach der Gleichung $\mu = f(R) = \mu_0 \frac{1}{R^2}$. Nach 152) ist das Trägheitsmoment einer Kugel für

---

*) Es ist hier nicht allgemein $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ zu setzen, sondern $r = \sin \psi \sqrt{x^2 + y^2}$ wobei $\sin \psi$ der mit x und y veränderliche Winkel r und der Drehachse ist; bei $\vartheta = 0$ ist $\sin \psi = 1$; bei $\vartheta = 90^0$ ist $r = y$, wenn die X-Achse Drehachse ist; liegt die Drehachse in der ZX-Ebene, so ist allgemein $\sin \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \frac{x^2}{x^2 + y^2}}$ und $\sqrt{y^2 + x^2 \cos^2 \vartheta}$.

einen Durchmesser als Drehachse $T' = \frac{2}{5} M R^2 = \frac{8}{15}\pi\mu R^5$; wächst R um dR, so wächst T' um $dT' = \frac{8}{15}\pi\mu\, 5 R^4\, dR = \frac{8}{3}\pi\mu\, R^4\, dR$ oder es ist:

$$dT' = \frac{8}{3}\pi R^4 f(R)\, dR\text{*)}$$

das Trägheitsmoment einer kugelförmigen Schicht von der Dicke dR, dem Halbmesser R und der Masse $\mu = f(R)$ in der Volumeneinheit. Das Trägheitsmoment der Hohlkugel ist demnach:

$$181)\quad T = \int_{R_0}^{R_1} \frac{8}{3}\pi R^4 f(R)\, dR = \frac{8}{3}\pi\mu_0 \int_{R_0}^{R_1} R^2\, dR = \frac{8}{9}\pi\mu_0 (R_1^2 - R_0)$$

und ihre Masse

$$M = \int_{R_0}^{R_1} \frac{4}{3}\mu\pi\, 3R^2\, dR = 4\mu_0\pi(R_1 - R_0),$$

also

$$T = \frac{2}{9} M (R_1^2 + R_1 R_0 + R_0^2).$$

2) **Trägheitsmoment eines hohlen Würfels, welcher aus gleichdichten, kastenartig würfeligen Schichten besteht,** die mit dem Würfel parallelen Seiten und denselben Mittelpunkt besitzen; die Drehachse $D_1 D_1$ liege in einer Kante, und die veränderliche Dichte sei $\mu = \mu_0 \dfrac{1}{a} = f(a)$. Nach 63) und 38)**) ist das Trägheitsmoment eines Würfels von der Seite a für eine Achse durch den Mittel- und Schwerpunkt $T' = \frac{1}{12} M (2a^2) = \frac{1}{6} a^5 \mu$; wächst a um da, so wächst T' um $dT' = \frac{5}{6} a^4 \mu\, da = \frac{5}{6}\mu_0 a^3\, da$, mithin ist das Trägheitsmoment des ganzen Würfels für diese Achse DD:

$$182)\quad T = \frac{5}{6}\mu_0 \int_{a_0}^{a_1} a^3\, da = \frac{5}{24}\mu_0 (a_1^4 - a_0^4) = \frac{5}{36} M (a_1^2 + a_0^2),$$

weil

$$M = 3\int_{a_0}^{a_1} \mu a^2\, da = 3\mu_0 \int_{a_0}^{a_1} a\, da = \frac{3}{2}\mu_0 (a_1^2 - a_0^2);$$

folglich ist das Trägheitsmoment des ganzen Würfels für die Kante $D_1 D_1$ als Drehachse:

$$T_1 = T + \left(\frac{a_1}{\sqrt{2}}\right)^2 M = \frac{5}{24}\mu_0 (a_1^4 - a_0^4) + \frac{3}{4} a_1^2 (a_1^2 - a_0^2)\mu_0$$
$$= \left(\frac{23}{24} a_1^4 - \frac{3}{4} a_1^2 a_0^2 - \frac{5}{24} a_0^4\right)\mu_0.$$

$$183)\quad T_1 = \left(\frac{23}{36} a_1^2 + \frac{5}{36} a_0^2\right) M.$$

*) Vergl. Lehrbuch der analytischen Mechanik von Duhamel, deutsch herausgegeben von Schlömilch, 2. Aufl. 2. Bd. S. 118.

**) Oder auch nach 73); falsch dagegen wäre es, wollte man aus 74) nehmen $dT' = \frac{5}{6} d(Ma^2) = \frac{10}{3}\mu_0 a^3\, da$ und $T' = \frac{10}{3}\mu_0 \int_{a_0}^{a_1} a^3\, da$ setzen; denn man hätte dann das Trägheitsmoment jedes Elementes auf eine andere Drehachse bezogen.

Kleinere Mittheilungen.

XVIII. Ueber ein gewisses mathematisches Princip. Von G. ZEHFUSS, Privatdocent in Heidelberg. 1) Manche Betrachtungen der höheren Analysis führen zu Gleichungen, welche gleichzeitig algebraische und transcendente Functionen enthalten, und somit meist wenig weitere Behandlung zulassen. In manchen Fällen jedoch kann man aus derartigen Gleichungen andere einfachere durch Zerfällung ableiten, was nachstehender Lehrsatz, der das in der Ueberschrift dieses Aufsatzes erwähnte Princip enthält, bestätigen möge.

Wenn F ein transcendentes Functionszeichen bedeutet, und die Function A irgend einer Variabeln t algebraisch durch die Function a von t ausdrückbar ist, so kann die Gleichung

$$\alpha) \qquad F(a) = A$$

nur bestehen, wenn das Argument a, mithin auch A und F, die Variable t nicht mehr enthalten, sondern sich auf Constante reduciren, d. h. aus der Gleichung α folgt

$$\beta) \qquad a = c, \; A = C, \text{ und } F(a) = C.$$

In der That, so lange die Gleichungen β) nicht bestehen, enthält die Gleichung α) den Widerspruch, dass eine transcendente Function einer Variabeln a einer algebraischen Function derselben Variabeln gleich sein könne.

Unser Lehrsatz findet unter anderen bei allen solchen Aufgaben Anwendung, wo mehrere Transcendenten sich mit Zuziehung algebraischer Functionen durch eine einzige Transcendente ausdrücken lassen, wie dies z. B. bei der Gleichung

$$F(a_1) \pm F(a_2) = A,$$

statthat, wenn F ein elliptisches oder ultraelliptisches Integral bedeutet, in welchem Falle sich dieselbe auf die Form α) zurückführen lässt.

Eine geometrische Aufgabe von einiger Allgemeinheit ist nachstehende:

Um eine Curve wird ein sich zurücklaufender, also *geschlossener* Faden geschlungen, dessen Länge den Umfang

jener Curve übertrifft, und ausserhalb mittelst eines Stiftes angespannt, den man um die Curve herumführt. Welche krumme Linie beschreibt der Stift?

Es sei M irgend eine Lage des Stiftes, P_1 und P_2 seien die Berührungspunkte der von ihm auslaufenden geraden Fadenstücke mit der Curve, deren Längen MP_1 und MP_2 algebraische Wurzelausdrücke A_1 und A_2 der Coordinaten der Punkte M, P_1, P_2 sind, welche man überdies mittelst der beiden Gleichungen der Tangenten MP_1 und MP_2 nach Elimination der Coordinaten von M als blose Functionen der Coordinaten von P_1 und P_2 ausdrücken kann. Alsdann liefert die Bedingung, dass der Faden immer einerlei Länge l behalten solle, die Gleichuug

$$\gamma)\qquad \int\limits_{a_0}^{a_1} ds - \int\limits_{a_0}^{a_2} ds = L - l + A_1 + A_2,$$

wo die Grössen a_1, a_2 von der Art des Coordinatensystems abhängen, L den Umfang der Curve bezeichnet, und A_1, A_2 algebraische Functionen von a_1, a_2 sein sollen.

So oft nun die durch $\int\limits_{a_0}^{a_1} ds$, $\int\limits_{a_0}^{a_2} ds$ dargestellten, im Allgemeinen transcendenten Functionen $f(a_1)$, $f(a_2)$ sich auf eine einzige Transcendente zurückführen lassen, z. B. wenn

$$\delta)\qquad f(a_1) - f(a_2) = F(a) + a_3$$

ist, wo a und a_3 algebraisch von a_1 und a_2 abhängen, so geht die Gleichung γ) in die Form α) über, und

$$a = Const.$$

giebt, wenn A durch a algebraisch ausdrückbar ist, die algebraische Bedingung, welche zwischen den Coordinaten a_1 und a_2 stattfindet. Um die Gleichung der von dem Stifte beschriebenen Curve zu finden, genügt es, a_1 und a_2 zwischen der vorigen Gleichung und denjenigen der Tangenten MP_1 und MP_2 zu eliminiren. — Zwar drückt schon die Gleichung γ) dieselbe Relation, wie die in der letzten Gleichung ausgesprochene, zwischen a_1 und a_2 aus, allein die Elimination würde mit ihrer Hülfe auf eine transcendente Gleichung zwischen den Coordinaten des Punktes M führen. Unser Princip lehrt also, an die Stelle einer transcendenten Relation eine algebraische zu setzen.

Diese aus $F(a) = A$ abgeleitete algebraische Gleichung $a = const$ könnte auch durch die zweite algebraische Gleichung $A = F(const)$ ersetzt werden. Beide drücken das Additionstheorem der Functionen $f(a_1)$, $f(a_2)$ aus, und ergänzen einander, indem aus der Gleichung $A = F(const)$ deren linke Seite sich nach Substitution von $a = const$ von selbst auf eine Constante reduciren muss, die in die Auflösung eingeführte willkührliche Constante bestimmbar ist.

2) Als erste Anwendung unseres Lehrsatzes wollen wir den Fall eines um die Lemniscate geschlungenen Fadens betrachten, wobei, wenn a_1 und a_2 die Radiivectores der auf Polarcoordinaten bezogenen Berührungspunkte der tangirenden Fadenstücke mit der Lemniscate vorstellen, die Integrale

$$f(a_1)=\int_{a_0}^{a_1} ds,\quad f(a_2)=\int_{a_0}^{a_2} ds$$

elliptische Integrale der ersten Art sind, und sich mithin auf ein einziges elliptisches Integral derselben Art zurückführen lassen, so dass aus

$$Arc\,(a_1, a_2)=f\,(a_1)-f\,(a_2)=f\,(a)=A$$

folgt $a=const$, also auch $f(a)=Const$ und $Arc\,(a_1, a_2)=Const$; d. h. **Wird um die Lemniscate ein geschlossener ausserhalb mittelst eines Stiftes gespannter Faden geschlungen, so ist zwischen den Berührungspunkten der gerade angespannten Fadenstücke in jeder Lage des Stiftes dieselbe Bogenlänge der Lemniscate enthalten**, woraus zugleich folgt, dass alle gleichen Lemniscatenbögen auch für die Summe der an ihren Endpunkten gezogenen Tangentenstücke, vom Berührungspunkte bis zum gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte gezählt, gleiche Werthe liefern. — Dieselben Eigenschaften gelten nicht allein für die Lemniscate, sondern für alle algebraischen Curven, deren Bögen transcendente, der Gleichung δ) gehorchende Functionen sind, wenn darin $a_3=0$ ist.

3) Eine andere Anwendung bietet unser Theorem dar, wenn man als ursprüngliche Curve einen Kegelschnitt anwendet, in welchem Falle die Rechnung eine sehr elegante Durchführung gestattet. Im 11. Bande von Liouville's *Journ. de math.* beweist Chasles, angeregt durch die Vortheile, welche Liouville und Roberts aus einer Transformation der Differentialgleichung gezogen hatten, (*Compt. rend. T. XIX. p.* 1261) die von Jacobi für die geodätische Linie auf dem Ellipsoide aufgestellt worden ist, folgenden Lehrsatz (*V. Sur les lign. géod. et les lign. de courb. des surf. du II dégré*):

Wenn um eine Krümmungslinie des Ellipsoides ein geschlossener, ausserhalb mittelst eines Stiftes auf das Ellipsoid festgespannter Faden geschlungen wird, so ist der geometrische Ort des Stiftes gleichfalls eine Krümmungslinie des Ellipsoides. — Lassen wir die kleinste Achse des Ellipsoides in Null übergehen, so entsteht ein Satz für die ebene Ellipse, den man übrigens auch auch auf die Kegelschnitte im Allgemeinen ausdehnen kann:

Wird um einen Kegelschnitt ein ausserhalb desselben mittelst eines Stiftes straff gespannter Faden gelegt, so beschreibt der Stift in allen seinen möglichen Lagen gleichfalls einen Kegelschnitt, der überdies dem gegebenen *confocal ist.*

Es seien (x_1, y_1), (x_2, y_2) die orthogonalen Coordinaten der Berührungspunkte der geraden Fadenstücke, und es sei

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

die Gleichung des Kegelschnittes. Man setze

$$x_1 = a \sin\varphi, \text{ also } y_1 = b\cos\varphi$$
$$x_2 = a \sin\psi, \quad ,, \quad y_2 = b\cos\psi;$$

alsdann sind die geraden Fadenstücke A_1 und A_2 gleich

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}, \quad \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2},$$

d. h. nach Substitution der vorigen Werthe, denen man noch aus den Gleichungen der tangirenden Fadenstücke

$$x=\frac{a^2(y_2-y_1)}{x_1 y_2 - x_2 y_1}, \quad y=\frac{b^2(x_1-x_2)}{x_1 y_2 - x_2 y_1}$$

beifügen kann:

$$A_1 = a\,.\,\frac{1-\cos(\varphi-\psi)}{\sin(\varphi-\psi)}\,.\,\Delta\varphi, \quad A_2 = a\,.\,\frac{1-\cos(\varphi-\psi)}{\sin(\varphi-\psi)}\,\Delta\psi,$$

wo

$$\Delta\mu=\sqrt{1-k^2\sin^2\mu}, \qquad k^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$$

gesetzt worden. Die Bedingungsgleichung, welche direct den Sinn der Aufgabe ausdrückt, ist nun, wenn wir uns den Kegelschnitt im normalen Falle als eine Ellipse denken, und

$$\int_0^t \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt = E_t$$

gesetzt wird, augenscheinlich nach (γ)

$$E\varphi - E\psi = \frac{1}{a}\,[L - l + A_1 + A_2].$$

Nach einem bekannten Satze ist aber

$$E\varphi - E\psi = E\delta - k^2 \sin\delta \sin\varphi \sin\psi,$$

wobei, wenn c eine Hilfsgrösse vorstellt, und

$$\varphi = am\,(u+c, K), \quad \psi = am\,(u-c, K)$$

gesetzt wird, δ bekanntlich den Werth hat

$$\delta = am\,[(u+c)-(u-c)] = am\,2c.$$

Also entsteht:

$$E\delta = \frac{L-l}{a}+\frac{1-\cos(\varphi-\psi)}{\sin(\varphi-\psi)}\,(\Delta\varphi+\Delta\psi)+k^2\sin\delta\sin\varphi\sin\psi.$$

Unserem Princip zufolge muss nun $\delta = am2c$ constant sein, d. h. c ist gleichfalls constant. Um die Gleichung der resultirenden Curve zu finden, und c zu bestimmen, müssen nun die nöthigen Eliminationen vorgenommen werden. Die aus den Tangentengleichungen gefundenen Werthe von x und y, nämlich

$$x = a \cdot \frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin(\varphi - \psi)}, \quad y = b \cdot \frac{\cos\psi - \cos\varphi}{\sin(\varphi - \psi)}$$

verwandeln sich, da $\sin\varphi = \sin am\,(u + c)$, $\sin\psi = \sin am\,(u - c)$, unter Berücksichtigung der Formel

$$\sin(\varphi - \psi) = \frac{2 \sin am\, c \cos am\, c\, \Delta\, am\, u}{1 - k^2 \sin^2 am\, c \sin^2 am\, u},$$

welche sich nebst anderen hierhergehörigen Formeln aus den *fund. nov. pag.* 32 — 34 entnehmen lässt, in

$$x = a \cdot \frac{\Delta\, am\, c}{\cos am\, c} \cdot \sin am\, u; \quad y = b \cdot \frac{1}{\cos am\, c} \cdot \cos am\, u,$$

woraus durch Elimination von u folgt

$$\varepsilon) \qquad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

die Gleichung einer Ellipse, deren Halbachsen durch

$$\zeta) \qquad A = a \cdot \frac{\Delta\, am\, c}{\cos am\, c}, \quad B = b \cdot \frac{1}{\cos am\, c}$$

gegeben sind. Aus diesen Werthen ergiebt sich durch Elimination von c:

$$\eta) \qquad A^2 - B^2 = a^2 - b^2,$$

die Curve ist also der ursprünglichen confocal.

Ein bemerkenswerther Umstand ist, dass der Schnittpunkt (x, y) zweier Tangenten immer den Gleichungen $\varepsilon)$, $\zeta)$, $\eta)$ genügt, nur ist c, also auch A und B im Allgemeinen variabel.

Um die Constante c zu bestimmen, müssen die Werthe φ und ψ in die letzte transcendente Gleichung eingesetzt werden, deren rechte Seite dann sich bezüglich der Variabeln u als constant herausstellen und auf eine Function von c reduciren muss. Diese Forderung unseres Principes wird in der That erfüllt. Setzt man nämlich daselbst (*vid l. c*).

$$N = 1 - k^2 \sin^2 am\, c \sin^2 am\, u,$$
$$\cos(\varphi - \psi) = (\cos^2 am\, c - \sin^2 am\, c\, \Delta^2\, am\, u) : N$$
$$\sin(\varphi - \psi) = (2 \sin am\, c \cos am\, c\, \Delta\, am\, u) : N$$
$$\Delta\varphi + \Delta\psi = (2\, \Delta\, am\, c\, \Delta\, am\, u) : N$$
$$\sin\varphi \sin\psi = (\sin^2 am\, u - \sin^2 am\, c) : N$$
$$\sin\delta = 2 \sin am\, c \cos am\, c\, \Delta\, am\, c : N$$

so entsteht nach einigen Reductionen die von u unabhängige Gleichung

$$E_{(am\, 2c)} = \frac{L - l}{a} + 2 \cdot \frac{\Delta^3\, am\, c \sin am\, c}{\cos am\, c}.$$

Die Form der Rechnung bleibt dieselbe, wenn die ursprüngliche Curve eine Hyperbel ist, in welchem Falle nämlich B^2 mit b^2 nach Formel $\zeta)$ gleichzeitig negativ ausfällt, da $\cos am\, c$ auch für $k > 1$ nach den Formeln

$$\Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}, \qquad k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

wenigstens für alle in Betracht kommenden Werthe von φ una ψ, reel ausfällt. — *Im* Uebergangsfalle von Ellipse zu Hyperbel gilt also der Satz,

dass die von dem Stifte beschriebene Curve ein confocaler Kegelschnitt sei, auch noch für die Parabel, wenn man eine leicht zu errathende Modification in der Art, den Faden anzulegen, anbringt, wie dies auch schon für die Hyperbel erfordert wird. Der Faden muss nämlich an zwei Punkten des Kegelschnittes befestigt werden, jedoch von hinreichender Kürze sein, damit nach dem Anspannen die geraden Theile noch tangiren.

XIX. Beurtheilung der bis jetzt üblichen Auflösungen der Aufgaben über Verlegung der Zahlungstermine, mittlere Zahlungstermine und Gesellschaftsrechnungen. Von Dr. Schlechter. Ist man ein Kapital k nach n Jahren unverzinslich zu zahlen schuldig und es wird die jährliche Vergütung fürs Hundert zu p % und der gegenwärtige Werth zu x angenommen, so ist k zu zerschlagen in den baaren gegenwärtigen Werth x und den Abzug, Rabatt, Disconto D; somit $k = x + D$. D drückt offenbar die Benutzung des Kapitals x zu p% für n Jahre aus, so dass dann $D = \frac{pnk}{100}$ gesetzt werden kann:

$$1)\qquad k = x + \frac{pnx}{100};$$

folglich

$$2)\qquad x = \frac{100k}{100 + pn}.$$

$\frac{100k}{100+pn}$ wird zum Zinsfusse p in n Jahren zu k wieder anwachsen. Bedeutet n Tage, so erhält man:

$$3)\qquad x = \frac{36500k}{100 + pn}.$$

Der Disconto beträgt: $D = k - \frac{100k}{100 + pn}$.

$$4)\qquad D = \frac{pnk}{100 + pn}.$$

Sind also $k_1, k_2, k_r \ldots, k_r$ Kapitalien nach $a, b, c, \ldots, y$ Jahren unverzinslich zu entrichten, so ist ihr gegenwärtiger Werth W

$$5)\qquad W = \frac{100k_1}{100 + ap} + \frac{100k_2}{100 + bp} + \ldots + \frac{100k_r}{100 + py}.$$

Sind $a, b, c, \ldots y$ Tage, so ist:

$$6)\qquad W = \frac{36500k_1}{36500 + ap} + \frac{36500k_2}{36500 + bp} + \ldots + \frac{36500k_r}{36500 + py},$$

der Disconto

$$D = k_1 + k_2 + \ldots + k_r - \frac{100k_1}{100 + ap} - \frac{100k_2}{100 + bp} - \ldots - \frac{100k_r}{100 + py},$$

somit:

$$7)\qquad D=\frac{apk_1}{100+ap}+\frac{bpk_2}{100+bp}+\ldots+\frac{ypk_r}{100+py}.$$

Die Gleichungen, wenn a, b, c etc. Monate oder Tage bezeichnen, sind leicht aus 7) abzuleiten.

Wird nun die Aufgabe so gestellt, dass die Kapitalien $k_1, k_2, \ldots k_r$, welche man unverzinslich nach $a, b, c \ldots y$ Jahren schuldig ist, an einem und demselben Tage bezahlt werden sollen, so wird also der Nutzniesser bei baarer Zahlung aller Kapitalien den Werth

$$7_2)\qquad W=\frac{100k_1}{100+ap}+\frac{100k_2}{100+bp}+\ldots+\frac{100k_r}{100+py}$$

entrichten; der Minderbetrag, Disconto D wäre

$$8)\qquad D=\frac{abk_1}{100+ap}+\frac{bpk_2}{100+bp}+\ldots+\frac{ypk_r}{100+py}.$$

Es muss daher dem Schuldner der Werth W so lange in Händen gelassen werden, bis durch Verzinsung desselben zu p % der Disconto D erzielt worden ist. Nennt man diese Zeit x, so ist

$$9)\qquad D=\frac{pWx}{100};$$

oder

$$10)\qquad x=\frac{100D}{pW},$$

$$11)\qquad x=\frac{100}{W}\left(\frac{ak_1}{100+ap}+\frac{bk_2}{100+bp}+\ldots+\frac{yk_r}{100+py}\right).$$

Oder was offenbar dasselbe ist; der baare Werth W und der Zins von W zum Zinsfusse p muss gleich sein der Summe der in den einzelnen Terminen zu zahlenden Kapitalien. Somit

$$11_2)\qquad W+\frac{pWx}{100}=k_1+k_2+\ldots+k_r,$$

was wiederum

$$x=\frac{100}{W}\left(\frac{ak_1}{100+ap}+\frac{bk_2}{100+bp}+\ldots+\frac{yk_r}{100+py}\right)$$

giebt. Es kann somit dieser Auflösungsweise die Richtigkeit nicht widersprochen werden; um so mehr, wenn man sich überzeugt, dass wenn der Werth von x in 11_2) eingesetzt $k_1+k_2+\ldots+k_r=k_1+k_2+k_3+\ldots+k_r$ giebt.

Bei Betrachtung der Gleichung 11) wird in die Augen fallen, dass jeder einzelne Posten in der Klammer im Nenner p hat, somit wird die ganze Summe um so grösser sein, je kleiner p ist und so umgekehrt; dasselbe gilt für die Zeit x. Die gemeinschaftliche Verfallzeit aller Kapitalien wird also um so früher fallen, je grösser der Zinsfuss p angenommen wird und umgekehrt.

Man erkennt aus dieser Entwickelung, dass der mittlere Zahlungster-

min nicht allein von der Zeit, nach welcher die Kapitalien zu entrichten sind und von ihrer Grösse, sondern auch vom Zinsfusse abhängt. Die gestellte Aufgabe ist daher so lange eine völlig unbestimmte, so lange nicht der Werth p gegeben und durch Vereinbarung festgestellt ist. Die Richtigkeit dieser Behauptung kann unmöglich bestritten werden. Gegen diese Wahrheit werden in allen mir bekannten Lehrbüchern Verstösse gemacht. Es soll nun der innere Grund, wie man zu dieser falschen Aufgabenstellung und natürlich dann auch zur falschen Lösung kam, näher erläutert werden. Wir stellen zu diesem Behufe die Aufgabe, wie sie gewöhnlich gestellt und gelöst wird.

Man habe $k_1, k_2, \ldots k_r$ nach a, b, c etc. Jahren unverzinslich zu bezahlen, welches ist die mittlere Verfallzeit?

Auflösung 1. Zahlt der Schuldner alle Kapitalien statt nach seinem vorgeschriebenen Termine baar und man nimmt den Zinsfuss, zu welchem die Verzinsung geschehen könne, zu p an, so sind die Verluste des Nutzniessers

$$12)\qquad D = \frac{apk_1}{100} + \frac{bpk_2}{100} + \ldots + \frac{ypk_r}{100}.$$

Die Kapitalien $(k_1, k_2, \ldots k_r)$ müssen dem Schuldner so lange gelassen werden, bis er zum Zinsfusse p den Disconto D gewonnen hat. Es ist also

$$13)\qquad \frac{apk_1}{100} + \frac{bpk_2}{100} + \ldots + \frac{ypk_r}{100} = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_r)}{100} px,$$

$$14)\qquad \frac{ak_1 + bk_2 + \ldots + yk_r}{k_1 + k_2 + \ldots + k_r} = x.$$

Auflösung 2. Entrichtet der Nutzniesser diese Kapitalien baar, so verliert er die Benützung von k_1, a Jahren, also ak_1, 1 Jahr; ebenso von k_2, bk_2, von bk_3 etc. 1 Jahr. Es müssen ihm also sämmtliche Kapitalien $(k_1 + k_2 + \ldots + k_r)$ so lange gelassen werden, bis er die Benützung von $(ak_1 + bk_2 + \ldots + yk_r)$ für ein Jahr gewonnen hat. Nennen wir diese Zeit x, so ist

$$15)\qquad x = \frac{ak_1 + bk_2 + \ldots + yk_r}{k_1 + k_2 + \ldots + k_r}.$$

Es ist also nach diesen Auflösungen der mittlere Zahlungstermin vom Zinsfuss unabhängig. Auflösung 2 ist jedenfalls aus Auflösung 1 hervorgegangen. Schon darin liegt offenbar ein Widerspruch, dass man einen Zinsfuss annimmt, durch die Art und Weise der Auflösung der Aufgabe aber erkennt, dass er gar nicht in Anschlag gebracht wird. Dies tritt noch greller in die Augen, wenn man in Gleichung 11) $p = 0$ setzt, d. h. gar keine Nutzniessung für's Hundert jährlich annimmt. Es wird dann

$$16)\qquad x = \frac{ak_1 + bk_2 + \ldots + yk_r}{k_1 + k_2 + \ldots + k_r},$$

man erhält also aus 11) durch diese Annahme die Gleichung 15. Meier Hirsch, *S. 195, Frage 125—132.* Es soll nun die Unrichtigkeit noch mehr

beleuchtet werden. Der auf diese Weise berechnete Disconto bei baarer Zahlung beträgt nach Gleichung 12)

$$17)\qquad D=\frac{apk_1+bpk_2+cpk_r+\ldots+ypk_r}{100},$$

daher der baare Werth W aller Kapitalien

$$18)\qquad W=k_1+k_2+\ldots+k_r-\frac{apk_1}{100}-\frac{bpk_2}{100}-\ldots-\frac{ypk_r}{100},$$

$$19)\qquad W=k_1\left(1-\frac{ap}{100}\right)+k_2\left(1-\frac{bp}{100}\right)+\ldots+k_r\left(1-\frac{py}{100}\right).$$

Da aber $a, b, c, \ldots y$ und p alle mögliche positive Werthe annehmen kann, so wird, wenn man $ap=100$, $bp=100$, $yp=100$ setzt,

$$20)\qquad W=\Theta.$$

Der Schuldner oder Nutzniesser hat also gar kein Kapital mehr in Händen, um seine Verluste durch Umsetzung zu decken. Dass der Schuldner aus den Kapitalien $(k_1+k_2+\ldots+k_r)$ den Verlust in zu bestimmender Zeit wieder gewinne, ist eine beliebige Annahme und entbehrt jeden Grundes, da offenbar die Abzüge so beschaffen sein müssen, dass die Reste die baaren Werthe der Kapitalien zur Verzinsung ausgeliehen, zur ursprünglichen Summe wieder anwachsen müssen. Es müsste $W=\frac{Wpx}{100}=k_1+k_2+..+k_r$ und wenn man den Werth x aus 16) einsetzt $k_1+k_2+..k_2=k_1+k_2+..+k_r$ sein, was unmöglich ist.

Diese Lösungsweise ist durch die Peickard'sche oder Carpzow-sche Berechnung des Interusuriums hervorgerufen worden und Oettinger sagt mit Recht Seite 111 seiner politischen und juridischen Arithmetik, dass dieser Methode schon längst kein Denkender mehr beipflichtet. Er selbst lösst zwar keine Aufgabe über mittlere Zahlungstermine, welche zwar in einem solchen Werke nicht fehlen sollten, spricht sich aber, gestützt auf die Ansicht vieler Gelehrten, dahin aus, dass jeweils bei unverzinslichen Kapitalien, die erst später zu entrichten sind, der Werth der Nutzniessung angegeben werden müsse, denn sonst könnte die Mathematik solche Aufgaben nicht lösen.

Es soll nun ein Zahlenbeispiel gelöst werden. N soll 500 fl. in 5 Jahren, nämlich nach jedem Jahre 100 fl. bezahlen; wenn kann er dieses Geld auf einmal erlegen, damit es eben so viel Zins trage, als wenn es nach und nach abgetragen würde. (Gruber Aufgabenbuch S. 67 *c*; Auflösungen S. 187.) — Auflösung. Nach Gleichung 16) ist nach der unrichtigen Lösung die Zeit 3 Jahre. Nach Gleichung 11) der richtigen Lösung ist die Zeit 2 Jahre und 28, ... Tage; ein Unterschied von 1 Monat und 2 Tage. So werden dergleichen Aufgaben, wie Gruber sie löst, in allen Rechenbüchern gelöst; Meier Hirsch verfährt ebenso.

Wird einmal angenommen, dass nach dem einfachen Zins die Nutzniessung stattfinden soll, so kann die Mathematik diese Aufgaben nur nach

der von mir aufgestellten Methode lösen. Schweins verfährt durch Anwendung von Zinseszins ganz analog. S. 71, Nr. 49, Zinsrechnungen für Geschäftsmänner.

In gleicher Weise verhält es sich mit den meisten sogenannten Gesellschaftsrechnungen. Dies soll ebenfalls an einem Beispiele gezeigt werden. A verwendet am Anfange des Jahres zu einem Gesellschaftshandel a fl. Am 1. April desselben Jahres trat B mit b und am 1. Juni C mit c fl. bei. Am Ende dieses Jahres theilen sie den Gewinn mit d fl.; wie viel erhält A, B und C am Gewinne, wenn der landesübliche Zinsfuss zu p angenommen wird?

Auflösung. Da B am 1. April beigetreten ist, so hat er eigentlich baar $\frac{400b}{400+p}$ fl. eingelegt. Desgleichen ist der baare Einsatz von $C = \frac{1200c}{1200+5c}$. Nach der baaren Einlage vertheilt sich der Gewinn wie folgt:

A erhält

$$\frac{ad(400+p)(1200+5p)}{a(400+p)(1200+5p)+400b(1200+5c)+1200c(400+p)},$$

$$B=\frac{ab(400+p)(1200+5p)}{a(400+p)(1200+5p)+400b(1200+5c)+1200c(400+p)},$$

$$C=\frac{ac(400+p)(1200+5c)}{a(400+p)(1200+5c)+400b(1200+5c)+1200c(400+p)}.$$

Nach der gewöhnlichen Auflösung erhält

$$A=\frac{ad}{12a+9b+7c},$$

$$B=\frac{bd}{12a+9b+7c},$$

und

$$C=\frac{cd}{12a+9b+7c}.$$

Das Vorgetragene wird beleuchten, dass auch letzte Aufgabe unrichtig gelöst ist.

XX. Zur Theorie paralleler Curven. Bekanntlich nennt man eine Curve A einer zweiten B in der Entfernung a parallel, wenn sie den geometrischen Ort derjenigen Punkte der Normalen zu B ist, welche von letzterer Curve um a abstehen. Die Theorie dieses Gegenstandes ist von den ältesten Zeiten der Differentialrechnung an mehrfacher Bearbeitung unterworfen worden.

Leibnitz entwickelte den Gedanken des Parallelismus aus dem der Evolution, indem die zu einer und derselben Evolution gehörigen Evolventen in dem *angegebenen Sinne* parallel sind. In dem Aufsatze De novo usu

centri gravitatis ad dimensiones (*acta eruditorum* 1695) verallgemeinerte er die Betrachtung durch die Bemerkung, dass wenn man einen Kreis auf irgend einer Curve rollen lasse, der Mittelpunkt des Kreises eine der gegebenen Curve parallele Curve beschreibe. Derselbe Aufsatz wurde in der Gesammtausgabe von Joh. Bernoulli's Werken I, 156 abgedruckt, woran sich alsdann Zusätze von Bernoulli anschliessen. In diesen heisst es (S. 158): *Quae insuper habet G. G. L. de curvis parallelis pro more ejus ingeniose excogitata sunt. Omnino mihi placet ejus constructio ducendarum parallelarum non adhibita evolutione, quam etiam contra ac ipse sentit praefero altero illi per evolutionem factae: tum quod facilius circulus construatur quam evoluta, tum etiam quod per rotationem non minus quam per evolutionem parallela per punctum datum duci possit, si modo radius circuli fiat aequalis perpendiculari ex puncto dato ad curvam ductae.* Der dritte Mathematiker, welcher mit dem genannten Gegenstande sich beschäftigte, war Kästner, welcher seine Untersuchungen zuerst in Woltmann's Beiträgen zur hydraulischen Architectur (Göttingen 1792, Bd. II, §. 24, S. 33—34) dann in ausführlicherer Weise in der Abhandlung *De curvis aequidistantibus* (*Commentationes soc. reg. scient. Gotting. ad a.* 1791 *et* 92. *Vol. XI.*) mittheilte. Er beantwortete die Frage, wie man die Gleichung der Curve finde, welche einer gegebenen Curve in gleichfalls gegebener Entfernung parallel laufe und fand die meisten Sätze, welche dabei auftreten. So die Gegenseitigkeit des Parallelismus, Sätze über die Rectification, sowie über die Quadratur der Parallelcurve u. s. w. In demselben Jahre 1792 scheinen zwei italienische Mathematiker Cagnazzi und Lotteri den Gegenstand so weit bewältigt zu haben, dass sie die Gleichung der Parallelcurve zu einer Curve derselben Ebene fanden. So citirt wenigstens Bordoni ohne weitere Angabe, wo jene Untersuchungen zu finden seien. Bordoni's Abhandlung selbst wäre nun zunächst anzuführen. Sie führt die Ueberschrift: *Sopra le linee e le superficie parallele* und ist abgedruckt im XVI. Bande der *Memorie di matematica e di fisica della Società Italiane delle scienze, Verona* 1813. Der Titel bezeugt schon, dass in diesem Aufsatze ein Fortschritt vorhanden ist, indem nicht blos einfach gekrümmte Curven besprochen werden, sondern auch Curven doppelter Krümmung, sowie Oberflächen. Bei den Betrachtungen, die sich auf die Ebene beschränken, finden sich indessen auch zwei Bemerkungen, auf die man zu wenig Rücksicht genommen hat. Die eine, dass die Parallelcurve die Einhüllende jenes rollenden Kreises sei, den schon Leibnitz annahm, dass also die Theorie der singulären Lösungen hier in Betracht komme (*l. c. pag.* 73); die andere, dass man von der Differentialgleichung der Parallelcurve zu ihrer Gleichung durch Elimination der Differentialquotienten gelangen könne, dass es aber in jedem gegebenen Falle auch möglich sein müsse, eine directe Integration eintreten zu lassen (*pag.* 78). Die chronologische Angabe der einschlagenden Literatur führt nun zu dem Aufsatze von Crelle, *Mémoire sur le parallélisme des lignes et surfaces courbes*

welcher zuerst in den Gergonne'schen *Annales de Mathématiques*, Bd. XII, 1821—22 erschien und dann ein Jahr später in deutscher Uebersetzung im 2. Bande von Crelle's Sammlung mathematischer Aufsätze und Bemerkungen. Ein Aufsatz, der indessen nur in dem französischen Texte lesbar ist, da in dem deutschen Abdrucke die Crelle eigenthümlichen Bezeichnung der Differentialquotienten ihn fast unverständlich, jedenfalls ungeniessbar macht, während der eigentliche Inhalt eine recht klare Uebersicht des Gegenstandes liefert. Unabhängig von diesen Schriften ist die in Göttingen 1826 vertheidigte Inauguraldissertation von Dr. Michael Reiss: *De lineis et superficiebus aequidistantibus.* Der Verfasser, welcher ausserdem durch interessante Abhandlungen über Determinanten (in *Quételet Correspondance mathématique* 1829) und in neuester Zeit über das Solitairespiel und ähnliche Gegenstände der mit Zahlentheorie gemischten Combinatorik den Mathematikern wohl bekannt ist, gelangte dabei zu denselben Resultaten, wie seine Vorgänger durch Anwendung geometrischer Methoden, welche den Exhaustionsmethoden der Alten sehr nahe stehen; dadurch wird die Abhandlung zu einer höchst lesenswerthen, auch für den, welcher mit den bewiesenen Sätzen schon bekannt ist. Von noch neueren Arbeiten endlich ist dem Verfasser nur eine *Note sur les courbes parallèles à l'ellipse* von Breton (de Champ) in dem 3. Bde. der *Nouvelles annales de mathématiques* und eine Abhandlung von Brenner über Normallinien und Normalcurven im 13. Bde. von Grunert's Archiv bekannt geworden, welche der Vollständigkeit wegen erwähnt werden müssen.

Es scheint nun auffallend, dass selbst nach der Abhandlung Bordoni's kein Mathematiker den Versuch gemacht hat, die Differentialgleichung der Parallelcurve zu einer gegebenen Curve in allgemeinster Form zu integriren, ein Versuch, der nach einer Methode, welche Woisard im 15. Bande der Gergonne'schen Annalen gelehrt hat, sehr leicht zum Ziele führt.

Es sei nämlich die Curve

$$1)\qquad f(x, y) = 0$$

bekannt und die derselben in der Entfernung a parallele Curve sei

$$2)\qquad F(X, Y, a) = 0.$$

Aus irgend einer der citirten Abhandlungen entnimmt man leicht die Formeln

$$3)\qquad X = x + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}},\quad Y = y - \frac{a}{\sqrt{1+p^2}},$$

wo $p = \frac{dy}{dx}$. Der gewöhnliche Weg, die Gleichung 2) zu finden, ist nun der der Elimination. Man sucht nämlich p aus der Gleichung 1) durch Differentiation, substituirt diesen Werth in die Doppelgleichung 3) und schafft alsdann aus 1) und der umgewandelten 3) die x, y weg. Allein wegen der Reciprocität des Parallelismus ist bekanntlich $p = P$, wo

$P = \frac{dY}{dX}$, darnach lässt sich aus 3) eine neue Doppelgleichung ableiten:

4) $$x = X - \frac{aP}{\sqrt{1+P^2}},\ y = Y + \frac{a}{\sqrt{1+P^2}}$$

und die Differentialgleichung der gesuchten Parallelcurve heisst

5) $$f\left(X - \frac{aP}{\sqrt{1+P^2}},\ Y + \frac{a}{\sqrt{1+P^2}}\right) = 0$$

d. i. eine Gleichung von der Gestalt

I) $$f(X - M,\ Y - N) = 0,$$

wo M, N Functionen von P sind, und diese Gleichungen können nach Woisard immer integrirt werden, wenn, wie es hier der Fall ist,

II) $$\frac{dN}{dP} = P.\frac{dM}{dP}.$$

Setzen wir nämlich zur Abkürzung $\frac{\partial f}{\partial(X-M)} = G$ und $\frac{\partial f}{\partial(Y-N)} = H$, so liefert die Differentiation von I) die neue Gleichung:

III) $$G.dX - G.\frac{\partial M}{\partial P}.dP + H.dY - H.\frac{\partial N}{\partial P}.dP = 0$$

und

$$dY = P.dX,\ \frac{\partial N}{\partial P} = P.\frac{\partial M}{\partial P}$$

(wegen II) gesetzt, giebt:

$$G.dX - G.\frac{\partial M}{\partial P}.dP + H.P.dX - H.P.\frac{\partial M}{\partial P}.dP = 0$$

oder

$$(G + HP)\left(dX - \frac{\partial M}{\partial P}.dP\right) = 0;$$

dieser Gleichung wird aber genügt, wenn

$$dX = \frac{\partial M}{\partial P}.dP,$$

d. h. wenn

IV) $$X = M + C_1.$$

Wird in III) die umgekehrte Substitution $dX = \frac{dY}{P}$, $\frac{\partial M}{\partial P} = \frac{1}{P}.\frac{\partial N}{\partial P}$ vollzogen, so geht sie über in

$$\left(\frac{G}{P} + H\right)\left(dP - \frac{\partial N}{\partial P}.dP\right) = 0$$

und dieser wird genügt, wenn

$$dY = \frac{\partial N}{\partial P}.dP,$$

d. h. wenn

V) $$Y = N + C_2.$$

Nun kann P zwischen IV) und V) eliminirt werden und es entsteht die Gleichung

VI) $$F(X, Y, C_1, C_2) = 0$$

die beiden willkührlichen Constanten, welche dabei vorkommen, repräsentiren nur eine einzige, da zwischen ihnen durch Verbindung der Gleichungen I), IV), V) der Zusammenhang besteht:

VII) $$f(C_1, C_2) = 0.$$

Wenden wir diese allgemeinen Betrachtungen auf unsere Differentialgleichung 5) an, so entsprechen den Gleichungen IV), V jetzt die specielleren Formeln:

6) $$X = \frac{aP}{\sqrt{1+P^2}} + C_1,\quad Y = -\frac{a}{\sqrt{1+P^2}} + C_2.$$

Folglich

7) $$\frac{X - C_1}{Y - C_2} = -P$$

und durch Substitution dieses Werthes in 6)

$$Y = -\frac{a}{\sqrt{1 + \left(\frac{X - C_1}{Y - C_2}\right)^2}} + C_2$$

oder endlich

8) $$a^2 = (X - C_1)^2 + (Y - C_2)^2,$$

während

9) $$f(C_1, C_2) = 0.$$

Das allgemeine, mit einer willkührlichen Constante versehene Integral bedeutet folglich einen Kreis und zwar, wie aus der Bedingungsgleichung 9) mit 1) zusammengehalten hervorgeht, einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der ursprünglich gegebenen Curve sich befindet; d. h. es ist derselbe Kreis, der in seinen Rollen die wirkliche Parallelcurve als Einhüllende, als singuläres Integral erzeugt.

CANTOR.

XXI. Einige Bemerkungen über die Bedeutung der Fusspunktcurven und Fusspunktflächen in der Katoptrik. Von Dr. FRANZ MELDE in Marburg.

§. 1. Die ebene Curve L möge als Basis ein in der Ebene derselben gelegener Punkt C als Pol einer Fusspunktcurve betrachtet werden. Zieht man demnach in einem Punkt M der Basis eine Tangente und fällt von C aus ein Perpendikel auf diese, so erhält man einen bestimmten Fusspunkt p. Gesetzt nun, wir hätten dieses Perpendikel in der Richtung Cp verlängert, um ein Stück $pq = n.Cp$ (wo n eine constante Grösse bedeutet) und diese Construction für alle Punkte ausgeführt, so werden die Punkte q eine der ursprünglichen Fusspunktcurve ähnliche Curve liefern. Wird zugleich C als Mittelpunkt eines rechtwinkligen Coordinatenkreuzes ange-

nommen, so leuchtet ein, dass man aus der Gleichung der eigentlichen Fusspunktcurve sofort die für die ähnliche Fusspunktcurve erhält, wenn man in jener statt x und y nur $\frac{x}{n}$ und $\frac{y}{n}$ setzt.

Für den Fall, dass die Basis L eine Gerade, erhält man nur einen Fusspunkt und auch nur einen ähnlichen Fusspunkt.

§. 2. Denken wir ferner, es wäre F eine beliebige Fläche, C ein beliebig im Raum gelegener Punkt, so wird ein von letzterem auf eine im Punkte M an die Fläche gelegte Tangentialebene gefälltes Perpendikel diese Tangentialebene in einem bestimmten Punkte P treffen. Alle diese Punkte P liefern das der Basis F und dem Pol C zugehörende Fusspunktgebilde, das nach der Beschaffenheit der Fläche F entweder sein kann eine Fusspunktfläche, oder eine Fusspunktcurve sowohl eben wie doppeltgekrümmt, oder auch nur ein Fusspunkt, wenn F eine Ebene ist. Gesetzt wiederum wir hätten sämmtliche Perpendikel CP verlängert, um ein Stück $PQ = n \,.\, CP$, so werden die Punkte Q ein zur Fläche F und dem Pol C gehörendes Fusspunktgebilde liefern, welches dem ursprünglichen ähnlich ist.

§. 3. Unter der bestimmten Voraussetzung, dass $n = 1$, gewinnen diese ähnlichen Fusspunktgebilde, eine Bedeutung in der Katoptrik, worauf ich in der Kürze hinweisen möchte. Ich werde im folgenden demgemäss unter der Benennung „ähnlicher Fusspunkt,“ „ähnliche Fusspunktcurve,“ „ähnliche Fusspunktfläche“ also nur solche Gebilde verstehen, für welche obige Annahme gilt.

Gesetzt nämlich, die Curve L §.1 sei spiegelnd, C ein leuchtender Punkt, von dem aus ein Lichtstrahl CM ein Lichtstrahl die spiegelnde Linie im Punkte M treffe, so ist klar, dass der im Punkte M reflectirte Strahl so reflectirt wird, als käme er von dem zum Punkte M gehörenden ähnlichen Fusspunkt q und da dies an für jeden Punkt M gilt, an welchem ein Strahl reflectirt wird, so ergiebt sich der Satz:

„Die von irgend welchen Punkten einer spiegelnden ebenen Linie reflectirten Strahlen werden so reflectirt, als kämen sie von den zugehörenden Punkten der ähnlichen Fusspunktcurve.“

Gehen wir zu einer spiegelnden Fläche über, so leuchtet ebensoleicht ein, dass der Satz gilt:

„Die von irgend welchem Punkte einer Spiegelfläche reflectirte Strahlen werden so reflectirt, als kämen sie von den zugehörenden Punkten des zur Fläche gehörenden ähnlichen Fusspunktgebildes.“

§. 4. Conische Flächen besitzen als ähnliches Fusspunktgebilde im Allgemeinen eine doppeltgekrümmte Curve, cylindrische Flächen dagegen eine ebene, welche liegt in der Ebene, die senkrecht zu irgend einer Lage der Erzeugungslinie und zugleich durch den Pol läuft. Sind diese Flächen spiegelnd, so gewinnen die ähnlichen Fusspunktcurven

noch eine weitere Bedeutung. Der Ort nämlich, wo sich zwei reflectirte Strahlen schneiden, ist ein Bildort; liegt dieser Bildort für das Auge hinter dem Spiegel, so kann man ihn einen virtuellen, liegt er vor demselben, so kann man ihn einen reellen nennen. Sämmtliche Strahlen nun, welche längs einer und derselben Erzeugslinie reflectirt werden, scheinen von dem zu dieser Erzeugslinie gehörenden ähnlichen Fusspunkt zu kommen, schneiden sich mithin in diesem, wodurch er zugleich die Eigenschaft eines Bildpunktes erhält. Betrachtet man die Erzeugslinien in allen ihren Lagen, so ergiebt sich der Satz:

„Die zu einem conischen und cylindrischen Spiegel gehörende ähnliche Fusspunktcurve ist aus lauter Bildpunkten zusammengesetzt und kann also zugleich eine Bildcurve genannt werden.“

Ob aber diese Bildcurve lauter virtuelle oder lauter reelle oder beide Arten von Bildpunkten enthält, wird aus der Beschaffenheit der Spiegelfläche sich ergeben müssen. Desgleichen ist in obigem Satze durchaus nicht gesagt, dass die ähnliche Bildcurve alle Bildorte, welche der Spiegel liefert, enthielte, sondern es ist wohl zu denken, wie gewisse reflectirte Strahlen, die zweien Erzeugungslinien angehören, sich noch in anderen Punkten schneiden, als in den zwei betreffenden ähnlichen Fusspunkten.

Ich theile diese Betrachtungen hier mit nicht als das Resultat allgemeiner Untersuchungen, sondern nur eine als Idee, deren weitere Verfolgung mir eben nicht gestattet ist, von der sich aber ohne Zweifel weiteres erwarten lässt.

XXII. Der Distanzmesser des Genie-Oberlieutenants Biagio de Benedictis in Neapel. Die Beziehung zwischen der wirklichen linearen Grösse A eines Gegenstandes, welcher sich in der Entfernung d von dem Mittelpunkte des Objectivs eines Fernrohrs befindet, und der linearen Grösse b des durch das Objectiv erzeugten Bildes lautet:

$$1)\qquad b=\frac{f}{d-f}A,$$

wobei f die Brennweite des Objectivs ist. Löst man diese Gleichung nach d auf, so geht sie über in:

$$2)\qquad d=f+\frac{fA}{b}$$

und kann zur Bestimmung der Entfernung d des Gegenstandes dienen, sobald man dessen Grösse A und die Brennweite f kennt und das Fernrohr selbst so einrichtet, dass man die Bildhöhe b messen kann. Bei den verschiedenen Distanzmessern, welche die Distanz d, nach der Gleichung 2) ermittelt, angeben, ist A entweder ein beliebiges Stück einer Scalenlatte, welches man beim Visiren auf letzterer abliest, oder man visirt stets die-

selbe, constante Höhe der Distanzlatte an. In beiden Fällen muss di Latte auf dem Punkte aufgestellt werden, dessen Entfernung vom Stand punkte des Fernrohrs man messen will. Dies ist aber für militärisch Zwecke besonders häufig unmöglich, oder doch unthunlich, und man nahn deshalb seine Zuflucht zu mittleren Grössen und bestimmte die Distanz an genähert aus der Bildgrösse eines auf dem entfernten Punkte befindliche Gegenstandes, z. B. eines Mannes, eines Reiters, eines Hauses, einer Wind mühle u. dergl.*), indem man eine der Erfahrung entnommene mittler Grösse dieser Gegenstände als wirkliche Grösse A des beobachteten Gegenstandes gelten lässt. Wenn man denselben Gegenstand zweimal beobachtet und zwar von zwei in gerader Linie mit dem Gegenstande liegenden hinreichend weit von einander entfernten Punkten, deren gegenseitige Entfernung bekannt ist, so kann man aus diesen beiden Beobachtungen de Distanz d mittels eines Fernrohres mit gutem Micrometer bestimmen,**) denn man erhält so zwei von einander unabhängige Gleichungen zwischen d und A. Mit einem solchen Distanzmesser, deren *Biagio de Benedictis* in seinem Schriftchen: *di un nuovo instrumento per misurare le distanze inaccessibili, Napoli* 1859, mehrere erwähnt und näher bezeichnet, wird die Distanzmessung zwar genauer als bei Benutzung von Mittelgrössen, aber auch um vieles unbequemer und aufhältlicher; deshalb schlägt *Biagio de Benedictis* folgenden Ausweg vor, durch welchen man bequem und ohne die Genauigkeit zu opfern, die Distanzmessung von der Grösse A des beobachteten Gegenstandes unabhängig, mithin eine Distanzlatte entbehrlich machen kann.

Man beobachte denselben Gegenstand noch mit einem zweiten Fernrohre, dessen Objectiv die Brennweite f_1 hat, von demselben Standpunkte aus; hat nun in diesem Fernrohre das Bild die Grösse b_1, so ist natürlich auch

$$3)\qquad b_1 = \frac{f_1}{d - f_1} A;$$

aus dieser Gleichung und aus 1) lässt sich aber A eliminiren; man erhält

$$4)\qquad \frac{b}{b_1} = \frac{f}{f_1} \cdot \frac{d - f_1}{d - f}$$

oder

$$6)\qquad d = \frac{f f_1 (b - b_1)}{b f_1 - b_1 f} = f \cdot \frac{b - b_1}{b - \alpha b_1},$$

wobei $\frac{f}{f_1} = \alpha$ gesetzt wurde. Ist $f > f_1$, so ist $\frac{f}{f_1} = \alpha > 1$, $d - f_1 > d - f$, $b > b_1$, und weil nach 4) $b = \alpha \frac{d - f_1}{d - f} b_1$ ist, so ist auch

---

*) Vergl. u. A.: *Le Louterel, delle ricognizioni militari, Torino* 1852, *pag.* 54.

**) *Guépratte, problèmes d'astronomie nautique et de navigation, Brest* 1839.

$$b - \alpha b_1 = \alpha b_1 \left(\frac{d - f_1}{d - f} - 1\right) > 0.$$

Man braucht aber in Formel 5) gar nicht einmal die absoluten Werthe von b und b_1 einzusetzen, sondern es genügt, wenn man nur Zahlen hat, welche den absoluten Zahlen proportional sind; denn setzt man nb anstatt b und nb_1 anstatt b_1, so liefert Formel 5) dennoch denselben Werth für d. Dies ist gerade von grossem Vortheil, weil man da aus den Micrometerablesungen nicht erst die absoluten Werthe von b und b_1 zu berechnen braucht, sondern die Ablesungen an einem beliebigen Micrometer ohne Weiteres einführen kann. Derselbe Distanzmesser kann natürlich auch, ebenfalls ohne Latte, zur Bestimmung einer unzugänglichen Höhe gebraucht werden; denn wenn man d anstatt A aus 1) und 3), oder aus 3) und 5) eliminirt, findet man:

6) $$A = b_1 \left(\frac{\alpha (b - b_1)}{b - \alpha b_1} - 1\right).$$

Um den Genauigkeitsgrad des Distanzmessers in einem bestimmten Falle zu ermitteln, wählt *Biagio de Benedictis* folgendes Beispiel: es sei die Brennweite f des einen Fernrohres $= 1{,}4$ *palmo**), die des andern $f_1 = 1$ *palmo*, mithin $\alpha = 1{,}4$; es sei ferner die Bildhöhe b (zwischen zwei feststehenden Kreuzfäden enthalten, mithin ganz genau) $= 0{,}02$ Palmen und die Distanz $d = 500$ Palmen; dann wäre nach 1)

$$A = \frac{0{,}02\,(500 - 1{,}4)}{1{,}4} = 7{,}122857 \text{ Palmen}$$

und dies in 3) eingesetzt, giebt:

$$b_1 = \frac{1}{500 - 1} \,.\, 7{,}122857 = 0{,}014274 \text{ Palmen},$$

und dieses b_1 ist nur mit einem Fehler behaftet, welcher kleiner ist als 0,000001 *palmo*; setzen wir nun voraus, b und b_1 wären bei der Beobachtung abgelesen worden, so würden wir nach 5) erhalten:

$$d = 1{,}4 \frac{0{,}02 - 0{,}014774}{0{,}02 - 1{,}4 \,.\, 0{,}014274} = 488{,}8 \text{ Palmen},$$

also eine Unrichtigkeit von 11,2 Palmen, d. h. 2/89 oder 2,24 % der Distanz. Die Genauigkeit der Ablesung selbst hängt natürlich von der Güte der Fernröhre, von der Feinheit der Theilung der Micrometer und der Sorgfalt des Arbeiters ab.

Das Verhältniss der absoluten Werthe der Bildhöhen b und b_1 nähert sich aber um so mehr dem Verhältniss der Brennweiten, je grösser d ist; denn die Formel 4) $\frac{b}{b_1} = \frac{f}{f_1} \,.\, \frac{d - f_1}{d - f}$, geht um so mehr in $\frac{b}{b_1} = \frac{f}{f_1} = \alpha$ über, je grösser d gegen f und f_1 ist und je weniger f und f_1 von einander verschieden sind; im obigen Beispiele war $\alpha = 1{,}4$, $\frac{b}{b_1}$ aber ist $= 1{,}40114$.

*) 1 *palmo* $= 0{,}2645$ Meter, also 38 *palmi* nahezu $= 10$ Meter.

Biagio de Benedictis versieht demnach seinen Distanzmesser mit 2 Fernröhren von verschiedener Brennweite und in beiden muss die Bildhöhe desselben Gegenstandes gemessen werden; zu diesem Behufe werden nun entweder in beiden Fernröhren die Fäden des Fadenkreuzes beweglich gemacht, oder blos in dem einen und in dem andern werden sie festgestellt; im letztern Falle wäre zwar die eine Bildhöhe constant und deshalb frei von einem Fehler beim Ablesen, allein man würde auch eben nur einen Gegenstand von einer gewissen Grösse anvisiren können, wenn sein Bild ganz zwischen den beiden Kreuzfäden enthalten sein soll; weit häufiger würde nur ein Theil des anvisirten Gegenstandes zwischen die Kreuzfäden fallen und denselben Theil müsste man dann auch zwischen die verstellbaren Fäden des andern Fernrohrs fassen. Damit man nun in diesem Falle leichter einen scharf begrenzten Theil des Gegenstandes wählen kann, wird man am besten in dem Fernrohre mit den festen Kreuzfäden mehrere Fäden ausspannen und es so einrichten, dass die äussersten die Bildhöhe b, ein anderes Paar $\frac{1}{2}b$, ein drittes Paar $\frac{1}{3}b$ u. s. f. zwischen sich enthalten.

Das Micrometer besteht aus zwei Fäden, von denen der eine im Instrumente fest liegt, während der andere durch eine Schraube parallel zu sich bewegt werden kann. Diese Schraube ist in dem Fernrohre senkrecht zu dessen Achse angebracht, ihr Kopf steht daraus hervor und es ist an ihm ein horizontaler Zeiger angebracht, welcher auf einem Theilkreise der Bewegung der Schraube folgt; wenn die beiden Kreuzfäden sich berühren, steht der Zeiger auf dem Nullpunkte, bei jeder vollen Umdrehung des Zeigers entfernen sich die beiden Fäden um eine Ganghöhe der Schraube; die ganzen Umdrehungen zählt ein kleines Zahnrad, das bei jeder um 1 Zahn fortschreitet. Je grösser der Theilkreis, desto genauer kann man die Entfernung der Fäden von einander ablesen.

Wenn die Fäden in beiden Fernröhren verstellbar gemacht werden, so muss man einen und denselben Theilkreis für beide Micrometer verwendbar zu machen suchen.

Wenn man die Bildhöhe b constant, also die Fäden in dem einen Fernrohre fest macht, so kann man leicht Tafeln berechnen, in denen neben den Bildhöhen b_1 die zugehörigen Distanzen stehen, z. B. von 10 zu 10 Palmen; noch einfacher aber schreibt man dann diese berechneten Distanzen gleich auf den Theilkreis. Dr. ZETZSCHE.

XXIII. Ueber einen arithmetischen Satz. Bei manchen elementaren Betrachtungen über unendliche Reihen braucht man die Ungleichung

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n > (\sqrt{n})^n;$$

diese lässt sich am einfachsten auf folgende Weise entwickeln.

Für $a > b > 0$ ist bekanntlich

$$m a^{m-1} > \frac{a^m - b^m}{a - b},$$

mithin, wenn $a = m + 1$ und $b = m$ gesetzt wird,

$$m (m+1)^{m-1} > (m+1)^m - m^m$$

oder

$$m^m > (m+1)^{m-1}$$

und

$$(m+1)^2 > \frac{(m+1)^{m+1}}{m^m}.$$

Multiplicirt man die für $n = 1, 2 \ldots (n-1)$ hieraus entspringenden Ungleichungen, so erhält man

$$2^2 . 3^2 \ldots . n^2 > n^n,$$

woraus der obige Satz augenblicklich folgt.

Als gelegentliche Awendung desselben mag hier der Beweis stehen, dass die Grösse

$$S_n = \frac{log 1}{n+1} + \frac{log 2}{n+2} + \ldots + \frac{log n}{n+n}$$

bei unendlich wachsenden n nicht verschwindet, sondern unendlich wird. Setzt man nämlich statt jedes Nenners den letzten, so hat man

$$S_n > \frac{log (1 . 2 . 3 \ldots n)}{2n},$$

d. i. nach dem Vorigen

$$S_n > \tfrac{1}{4} log\, n,$$

mithin $S_\infty = \infty$, wie behauptet wurde. SCHLÖMILCH.

XV. Dr. Reitlinger's Versuche über flüssige Isolatoren der Elektricität. (Sitzungsber. der Wiener Akademie, Bd. 35, S. 73). Sobald man einen festen Körper an dem einen Ende mit der Hand anfasst und hierauf sein anderes Ende an den Knopf eines geladenen Elektroscopes bringt, fliesst die auf der Oberfläche des Elektroscopes befindliche Elektricität je nach der Beschaffenheit des Körpers mehr oder minder schnell nach der Erde ab. Erfolgt die Entladung des Elektroscopes durch den Körper hindurch fast augenblicklich, so pflegt man den Körper unter die Leiter der Elektricität zu zählen, beträgt die Entladungszeit jedoch einige Secunden bis nahe eine Minute, so rechnet man ihn zu den Halbleitern; Nichtleiter pflegt man jedoch diejenigen Körper zu nennen, bei welchen die Entladung erst nach mehr als einer Minute erfolgt. (Riess, Reibungselektricität, Th. I. S. 27.) Diese Eintheilung der Körper in Beziehung auf ihr elektrisches Verhalten ist allerdings nicht aus einem tieferen Studium der elektrischen Bewegung in Körpern hervorgegangen, genügt jedoch für den praktischen Zweck elektrischer Experimente vollkommen. Um auch flüssi-

gen Körpern ihren Platz unter einer der drei Classen anzuweisen, pflegte man dieselben in isolirende Gefässe einzuschliessen, das eine Ende der flüssigen Schicht mit dem Elektroscope, das andere Ende jedoch mit dem Erdboden in leitende Verbindung zu setzen, oder man wendete irgend ein anderes dem genannten ähnliches Verfahren an, wobei Elektricität von geringer Spannung genöthigt war, durch die zu prüfende Flüssigkeit hindurch zu gehen. Auf diesem Wege ist man zu dem Resultate gelangt, dass unter anderen ätherische Oele Nichtleiter der Elektricität sind; ein Resultat, welches hier besonders hervorzuheben sein möchte, da sich die Versuche des Dr. Reitlinger vorzugsweise auch auf ein ätherisches Oel, das Terpentinöl, beziehen.

Das Verhalten der Körper zur Elektricität lässt sich sicherlich nur durch genaue messende Versuche mit gewünschter Schärfe ermitteln, wozu freilich eine lange Reihe mühsamer Experimente erforderlich sein wird. Durch einen Halbleiter von regelmässiger Form z. B. müssten genau gemessene Elektricitätsmengen nach der Erde entladen werden, an den Resultaten solcher Versuche wären die Hypothesen zu prüfen, die man sich über die Entladung machen kann etc., so dass man endlich zu bestimmteren Vorstellungen über die Vertheilung oder Bewegung der Elektricität in Körpern gelangt, welche einerseits mit dem Erdboden, andrerseits mit der auf gut isolirten Leitern aufgehäuften Elektricität in Verbindung stehen. Die messenden Versuche, die bis jetzt in dem angegebenen Sinne angestellt worden sind, verdankt man hauptsächlich Kohlrausch (Pogg. Ann. Bd. 91) welcher in der citirten Abhandlung die Resultate seiner Versuche über den elektrischen Rückstand der Leydener Flasche mittheilt. Bekanntlich sinkt ein mit einer ebengeladenen Leydener Flasche in Verbindung gebrachtes Elektrometer zuerst rasch, dann langsam, indem die Spannung der auf ihrem inneren Belege befindlichen Elektricität allmälig abnimmt. Entladet man die Flasche zur Erde, indem man beide Belege momentan mit den Enden eines zur Erde geführten Drahtes in metallischen Contact bringt, so zeigt sich dennoch hierauf wieder Elektricität auf dem inneren Belege, deren Spannung allmälig zunimmt. Man nennt nach Kohlrausch die Elektricität, welche in der geladenen Flasche keine Einwirkung auf das Elektrometer mehr hervorbringt, den verborgenen Rückstand, diejenige Elektricität jedoch, welche nach dem Entladen der Flasche auf's Neue zum Vorschein kommt, den wiederaufgetretenen Rückstand. Man glaubte früher, dass der verborgene Rückstand dadurch zu Stande käme, dass die auf jedem Belege vorhandene Elektricität ihre eigenen Theile in das Glas hineinpresse, während sich Kohlrausch auf Grund seiner Versuche veranlasst fand, anzunehmen, dass durch die Fernewirkung der Elektricität auf den Belegen die neutrale Elektricität im Innern des Glases geschieden werde, so dass sich eine eine elektrische Wirkung vom Glase aus auf die Elektricität der Belege ergebe, welche einen Theil der Ladung festhalte. Diese Ver-

suche von Kohlrausch sind die ersten, welche einen etwas tieferen Blick in das Verhalten der Isolatoren zur Elektricität gestatten. Dr. Reitlinger, welcher leider noch nicht bis zu messenden Versuchen gekommen ist, theilt in der Eingangs citirten Abhandlung seine Versuche über den Durchgang stark gespannter Elektricität durch Terpentinöl mit, aus denen das Resultat hervorgeht, dass dasselbe und wahrscheinlich auch andere flüssige Isolatoren, das elektrische Fluidum in diesem Falle nicht zu isoliren vermögen.

Der genannte Verfasser construirte sich Leydener Flaschen, bei denen Terpentinöl, welches zwischen die die Belege bildenden Metallplatten gegossen worden war, dieselben isoliren sollte. Die metallischen Belege hatten oben isolirende Fortsätze, so dass die Elektricität nur durch das Terpentinöl hindurchgehen konnte, welches die Belege überragte. Als nun Dr. Reitlinger den Knopf des inneren Beleges mit dem Conductor einer in Thätigkeit versetzten Winter'schen Elektrisirmaschine in Verbindung setzte, während das äussere Belege leitend mit der Erde verbunden war, gerieth das Terpentinöl in lebhaft wallende Bewegungen, an dem äusseren Belege stieg eine scharf geränderte Schicht von Terpentinöl empor, welche bei recht energischer Thätigkeit der Elektrisirmaschine sogar zum Ueberfliessen gebracht werden konnte. Wurde hierauf die Flasche auf ihre Ladung untersucht, so fand sich keine dergleichen vor. Für die Erklärung der Erscheinung ist folgender Versuch wichtig: ein Glasgefäss ohne Belegungen wurde mit Terpentinöl bis nahe an den obern Rand gefüllt, hierauf eine Metallröhre in selbiges gestellt, welche mit dem Conductor der Elektrisirmaschine verbunden wurde. Das Terpentinöl wurde nun durch eine genügende Anzahl von Umdrehungen der Elektrisirmaschine geladen, wobei dasselbe in lebhafte Bewegung gerieth und starkes Bestreben zur Schichtenaufsteigung zeigte. Die metallene Ladungsröhre wurde hierauf herausgenommen und der Finger der Oberfläche des Terpentinöls allmälig genähert. Das Terpentinöl stieg hierbei im Allgemeinen dem genäherten Finger trompenförmig entgegen, während, wie bekannt ist, Wasser bei einem solchen Versuche seine Elektricität durch Funkenentladung an den genäherten Leiter abgiebt.

Hält man diese Versuche zusammen, so erkennt man, dass Terpentinöl, welches mit Elektricität geladen worden ist, an jeder Stelle im Innern der Flüssigkeit mit elektrischem Fluidum versehen sein muss, und dass sich in ihm die Elektricität nur sehr langsam von einem Körpertheilchen zum andern hin bewegen kann, denn sonst würde ebenfalls Funkenentladung zwischen geladenem Terpentinöl und einem Leiter stattfinden. Das Terpentinöl lässt sich leicht laden, weil es sehr beweglich ist, die am Leiter anliegenden Theile werden elektrisch und von diesen abgestossen, so dass immer neue Theilchen zu der Elektricitätsübertragung an den Leiter hingeführt werden. Terpentinöl ist wegen der leichten Beweglichkeit seiner

Theile nicht geeignet, als Isolator bei einer Leydener Flasche zu dienen, welche stark geladen werden soll, da in diesem Falle die stärkere elektrische Abstossung der gleichartig elektrischen Theilchen eine schnelle Hin- und Herbewegung der flüssigen Theile veranlasst und somit eine schnelle Ausgleichung der entgegengesetzten Elektricitäten stattfindet. Diese Erklärung gewinnt um so mehr an Wahrscheinlichkeit, als durch Kohlrausch's Versuche bekannt geworden ist, dass die Bildung eines Rückstandes im Glase, also die Scheidung der Elektricitäten in demselben durch die Elektricität auf den Belegen längere Zeit erfordert, so dass von der Bildung eines solchen Rückstandes im Terpentinöl und vom Beitrag desselben zur Ausgleichung der Elektricitäten der Belege überhaupt nicht die Rede sein kann.

Die eben gegebenen Erklärungen stimmen mit den Ansichten Dr. Reitlinger's überein und es geben die aus seinen Versuchen gezogenen Schlüsse einen Fingerzeig über die Anstellung von messenden Versuchen zur Ausmittelung des Verhaltens der Elektricität gegen Flüssigkeiten, wobei man ebenfalls Kohlrausch's werthvolle Versuche über den elektrischen Rückstand immer im Auge behalten muss. Zunächst erkennt man, dass man die Versuche von der Bewegung der Flüssigkeitstheilchen um so mehr unabhängig macht, je schwächer die Spannung der mit der Flüssigkeit in Berührung gelassenen Elektricitätsquelle ist, ferner bemerkt man, dass bei schwachen Elektricitätsquellen die Bildung eines elektrischen Rückstandes in Flüssigkeiten *a priori* nicht in Abrede gestellt werden darf, da die Möglichkeit nicht fern liegt, dass die elektrischen Kräfte hierbei zu schwach sind, um eine merkliche elektrische Bewegung hervorzubringen. Endlich möchte noch hervorzuheben sein, dass sich die Methode, die Isolationsfähigkeit von Flüssigkeiten in der Eingangs erwähnten Weise zu bestimmen, um so mehr an diejenige für feste Körper anschliesst, je schwächer die angewendete Elektricitätsquelle ist, weil dann um so mehr die Fortbewegung der Elektricität durch den ponderabeln Träger vermieden wird.

Dr. E. Kahl.

IX.

Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer beliebigen Grenze.

Von Dr. W. Scheibner,
Professor an der Universität zu Leipzig.

1.

Die Beantwortung der Frage, wie viele Primzahlen in einer arithmetischen Reihe von der Form a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b \dots a+nb$ enthalten seien, — wo natürlich a und b ohne gemeinschaftlichen Divisor vorausgesetzt werden, — ist von jeher als eines der schwierigsten Probleme auf dem Gebiete der höheren Arithmetik angesehen worden. Selbst wenn man sich zunächst zur Vereinfachung der Aufgabe specielle Annahmen gestattet und z. B. $n = \infty$ oder $b = 1$ setzt, ist die Lösung mit grossen Schwierigkeiten verbunden, deren Beseitigung erst in neuerer Zeit gelungen ist. Nur für den Fall des gleichzeitigen Stattfindens der beiden erwähnten Specialisirungen ist der betreffende Satz alt und schon in den Elementen des Euklides enthalten, welcher beweist,*) „dass es der Primzahlen mehrere gibt, als jede vorgelegte Menge von Primzahlen.“ In der unbegrenzten Reihe der aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen gibt es folglich unendlich viele Primzahlen.

Den gleichen Satz hat im Jahre 1837 mittelst einer „glänzenden Analysis“ Dirichlet für die unbegrenzte Reihe a, $a+b$, $a+2b \dots$ streng bewiesen, nachdem die früheren Versuche Legendre's**) gescheitert waren. Der Nerv dieses berühmten Beweises***) beruhet in einer kunstvollen Transformation der unendlichen Reihe

$$\Sigma \frac{1}{p_1{}^s} + \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{1}{p_2{}^{2s}} + \tfrac{1}{3} \Sigma \frac{1}{p_3{}^{3s}} + \text{etc.} = \varphi s,$$

*) Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν, *Eucl. elem. lib. IX. prop. 20.*

**) Vergl. *Théorie des Nombres, Tome II, p. 77.*

***) Abhandlungen der Berliner Akademie aus dem Jahre 1837.

wo sich die einzelnen Summen resp. auf alle Primzahlen $p_1, p_2, p_3 \ldots$ erstrecken, deren erste, zweite, dritte ... Potenzen in der vorgelegten arithmetischen Reihe vorkommen, so dass nach einer bekannten Bezeichnung allgemein

$$p_n^{\,n} \equiv a \bmod b$$

sein muss. Es ist leicht zu sehen, dass der Ausdruck φs eine endliche und stetige Function von s bedeutet, so lange s grösser als 1 ist, da offenbar

$$\varphi s < \frac{1}{a^s} + \frac{1}{(a+b)^s} + \frac{1}{(a+2b)^s} + \cdots$$

Nähert sich s ohne Ende der Einheit, so bleibt zwar die Summe

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{p_2^{\,2}} + \tfrac{1}{3}\Sigma\frac{1}{p_3^{\,3}} + \ldots$$

endlich, es muss aber φs über alle Grenzen wachsen, sobald $\Sigma\frac{1}{p_1}$ unendlich wird und umgekehrt. Durch die vorhin erwähnte Transformation ist von Dirichlet gezeigt worden, dass dieser Fall in Bezug auf φs in der That eintritt, woraus man schliesst, dass $\Sigma\frac{1}{p_1} = \infty$, d. h. dass es unendlich viele Primzahlen $p_1 \equiv a$ gibt.

2.

Was die zweite der oben angedeuteten Annahmen $b = 1$ betrifft, so führt dieselbe auf die Frage nach der Anzahl der unter einer beliebigen Grenze liegenden Primzahlen. Fragt man zunächst nach einem approximativen Ausdrucke für diese Anzahl, so hat sich Gauss sehr zeitig die Bemerkung dargeboten, dass das Integral

$$\int \frac{dx}{\log x} = Li\,x$$

mit der Anzahl der Primzahlen kleiner als x in Verbindung zu stehen scheine, und es hat Bessel,*) dadurch veranlasst, schon im Jahre 1810 die folgende Tabelle berechnet und an Gauss geschickt:

Argument.	Integral.	Primzahlen.	Diff.
1000	177.609655	169	+ 8.61
10000	1246.137247	1230	+ 16.14
100000	9629.809041	9593	+ 36.81
200000	18036.052159	17983	+ 53.05
300000	26080.215589	25997	+ 83.21
400000	33922.621995	33859	+ 63.62
1000000	78627.549277	78493	(Legendre.)

Für kleinere Zahlen, fügt Bessel hinzu, sind die Unterschiede der Primzahlen und der *Logarithmes intégraux*:

*) Olbers und Bessel, Briefwechsel, Bd. I, S. 235 und 238 (1. Septbr. 1810).

100	200	300	400	500
+ 4.13	+ 3.19	+ 5.33	+ 6.42	+ 5.78

Legendre hat in seiner *Théorie des Nombres**) durch Induction den genäherten Ausdruck

$$\frac{x}{log\,nat\,x - 1.08366}$$

für die Anzahl der Primzahlen unter x gefunden, und Dirichlet erwähnt in einer auf dergleichen von ihm genannte asymptotische Functionen (*expressions-limites ou lois finales*) sich beziehenden Mittheilung,**) dass ihm die Ableitung der Legendre'schen Formel durch strenge Methoden gelungen sei. Doch findet sich eine speciellere Auslassung darüber weder in Crelle's Journal,***) noch in den Abhandlungen der Berliner Akademie für 1849.†)

Spätere Untersuchungen über die Genauigkeit, mit welcher die Ausdrücke

$$\frac{x}{log\,x - 1} \text{ und } \int_2^x \frac{dx}{log\,x}$$

die Anzahl der Primzahlen, die eine gegebene Grenze nicht übersteigen, darstellen, sind von Tchebicheff in den Jahren 1848 und 1850 der Petersburger Akademie mitgetheilt und im 17. Bande des Liouville'schen Journals abgedruckt worden. In neuester Zeit endlich hat Polignac††) den allgemeineren Satz aufgestellt, dass das Integral

$$\int \frac{fx}{log\,x}\,dx$$

eine asymptotische Function für die Summe der Reihe

$$f1 + f2 + f3 + f5 \ldots + fp$$

ausdrücke, in welcher die successiven Primzahlen die Argumente der Functionen bilden. Was die Convergenzbedingungen einer solchen ins Unendliche fortgesetzten Reihe betrifft, so hat darüber Tchebicheff in seinen erwähnten Arbeiten†††) gehandelt.

Eine strenge Auflösung der Aufgabe, für die Häufigkeit der Primzahlen einen analytischen Ausdruck abzuleiten, hat zuerst Prof. Riemann in Göttingen, im Novemberheft 1859 der Monatsberichte der Berliner Akademie, S. 171—180, gegeben. Es möge mir vergönnt sein, den Lesern dieser Zeitschrift die Hauptzüge dieser neuen eben so wichtigen wie originellen Untersuchung des geistvollen Mathematikers im Folgenden vorzuführen.

*) *Tome II, p.* 65.
**) Monatsberichte der Berliner Akademie, Februar 1838.
***) Bd. 18, S. 272.
†) Ueber die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie, S. 69.
††) Siehe die *Comptes rendus* der Pariser Akademie, 1859, 2. *sémestre.*
†††) *Liouville, Journal de mathématiques, Tome XVII,* S. 384.

3.

Den Ausgangspunkt bildet die unendliche Reihe

$$1)\qquad \varphi s = \Sigma \frac{1}{p^s} + \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{p^{2s}} + \tfrac{1}{3}\Sigma \frac{1}{p^{3s}} + \cdots,$$

wo jetzt die einzelnen Summationen in Bezug auf alle Primzahlen p auszuführen sind. Die Stetigkeit und Endlichkeit der Function φs leuchtet ein, so lange der reelle Theil von s grösser als 1 genommen wird. Denn wenn s den imaginären Zuwachs ti erhält, so wird

$$\frac{1}{p^{s+ti}} = \frac{1}{p^s} e^{-ti \log p} = \frac{1}{p^s} [\cos (t \log p) - i \sin (t \log p)],$$

und es kann die Convergenz durch das Hinzutreten solcher periodischen Experimentalfactoren keine Aenderung erleiden.

Es kommt zunächst darauf an, die obige Reihe umzukehren, d. h. die Summe

$$\Sigma \frac{1}{p^s} = \chi s$$

durch die Function φs auszudrücken. Die Vorschriften für eine derartige Reversion sind in einer sehr merkwürdigen Abhandlung von Möbius enthalten, der im 9. Bande des Crelle'schen Journals für Mathematik*) für zwei beliebige Functionen fx und Fx die zusammengehörigen Formeln aufgestellt und bewiesen hat:

$$2)\qquad fx = Fx + 2^n F(x^2) + 3^n F(x^3) + 4^n F(x^4) + 5^n F(x^5) + \ldots$$

$$3)\qquad Fx = fx - 2^n f(x^2) - 3^n f(x^3) - 5^n f(x^5) + 6^n f(x^6) - \ldots$$

Setzt man hier

$$s = \log x,\quad n = -1,\quad fx = \varphi s,\quad Fx = \chi s,$$

so wird die Gleichung 2) mit 1) identisch, und die Gleichung 3) geht über in die gesuchte

$$4)\qquad \chi s = \varphi s - \tfrac{1}{2}\varphi(2s) - \tfrac{1}{3}\varphi(3s) - \tfrac{1}{5}\varphi(5s) + \tfrac{1}{6}\varphi(6s) \ldots,$$

wo nur solche Vielfachen von s vorkommen, welche durch eine gerade oder ungerade Anzahl von lauter ungleichen Primfactoren theilbar sind. Im ersten Falle ist das Vorzeichen positiv, im zweiten negativ.

Wir drücken jetzt χs durch ein bestimmtes Integral aus und erhalten wegen

$$\int_x^\infty e^{-sx}\, dx = \frac{1}{s e^{sx}}$$

$$\chi s = \Sigma \frac{1}{p^s} = \Sigma s \int_{\log p}^\infty e^{-sx}\, dx.$$

Wenn Fx die Anzahl der Primzahlen kleiner als x bezeichnet, so überzeugt man sich leicht, dass die Summe von Integralen sich auf das Integral

*) S. 119.

$$5)\qquad \frac{\chi s}{s} = \int_0^\infty F(e^x)\, e^{-sx}\, dx$$

reducirt. Denn bedenkt man, dass $F(e^x)$ die Werthe $0, 1, 2, 3 \ldots$ annimmt, je nachdem x in einem der Intervalle von 0 bis $log 2$ bis $log 3$ bis $log 5$ bis $log 7$ u. s. w. enthalten ist, so folgt

$$\int_0^\infty F(e^x)\, e^{-sx}\, dx = \left\{ \int_{lg 2}^{lg 3} + 2 \int_{lg 3}^{lg 5} + 3 \int_{lg 5}^{lg 7} + 4 \int_{lg 7}^{lg 11} + \ldots \right\} e^{-sx}\, dx$$

$$= \int_{lg 2}^\infty + \int_{lg 3}^\infty + \int_{lg 5}^\infty + \ldots = \Sigma \int_{lg p}^\infty e^{-sx}\, dx$$

4.

Es handelt sich jetzt darum, auch die Gleichung 5) umzukehren, um $F(e^x)$ durch ein von χs abhängiges Integral auszudrücken. Diess geschieht durch Anwendung des Fourier'schen Theorems

$$6)\qquad fx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{xti} \int_a^b fx\, e^{-xti} dx,$$

welches auch unter der Form zweier einander gegenseitig sich bedingenden Gleichungen geschrieben werden kann:

$$7a)\qquad fx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi t\, e^{txi} dt$$

$$7b)\qquad \varphi t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b fx\, e^{-txi} dx.$$

Auf die Reciprocität dieser Formeln haben Cauchy und Poisson in ihren Arbeiten über die Theorie der Wellen aufmerksam gemacht,*) und diese Eigenschaft zu interessanten Folgerungen benutzt. Die hingeschriebenen Gleichungen werden übrigens nicht specieller, wenn man, um die Reciprocität in der äusseren Form vollständig zu machen, in 7b) statt $\int_a^b$ die Integrationsgrenzen $\pm\infty$ einführt, weil man über die ganz beliebige Function fx offenbar so disponiren kann, dass dieselbe ausserhalb des Intervalles von a bis b verschwindet. Die Gültigkeit der obigen Gleichungen ist bekanntlich für das Argument x in 7a) auf alle diejenigen (reellen) Werthe beschränkt, welche in 7b) die Integrationsvariable x zwischen a und b durchläuft, um

*) Vergl. zwei Notizen von Cauchy „*Sur une loi de réciprocité qui existe entre certaines fonctions*" im *Bulletin de la société philomatique*, 1817, *p.* 121 und 1818, *p.* 178.

von der unteren zur oberen Grenze zu gelangen; für jeden anderen Werth des Arguments x verschwindet das Fourier'sche Doppelintegral. Auch sind solche Functionen auszuschliessen, für welche das Integral $\int\limits_a^x fx\,dx$ unstetig wird, so lange x auf dem gedachten Wege zwischen a und b variirt.*) Bei eintretender Unstetigkeit der Function fx aber geben die Gleichungen 6) oder 7a) an einer solchen Stelle das arithmetische Mittel aus den Sprungwerthen; an den Grenzen erhält man daher bloss die halben Werthe $\frac{1}{2}fa$ und $\frac{1}{2}fb$.

Zur Anwendung auf 5) schreiben wir $s+ti$ an der Stelle von s und setzen

$$\varphi t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\chi(s+ti)}{s+ti},\quad fx = e^{-sx}F(e^x),$$

dann folgt aus 7a) der gesuchte Ausdruck

$$e^{-sx}F(e^x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi(s+ti)}{s+ti}\,e^{xti}\,dt.$$

Derselbe ist für alle positiven Werthe von x gültig, wird unstetig, so oft x dem Logarithmus einer Primzahl gleich wird, und setzt ausserdem voraus, dass $s>1$ angenommen ist. Schreibt man der Kürze halber wieder s statt $s+ti$ (wodurch s eine Function von t mit constantem reellen Theile grösser als 1 wird), so folgt

8) $$F(e^x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi s}{s}\,e^{sx}\,dt.$$

Dieser Ausdruck ist der weiteren Discussion zu unterwerfen.

5.

Da im Vorhergehenden mittelst Gleichung 4) die Function χs auf lineare Weise durch die Function φs ausgedrückt worden ist, so genügt die Untersuchung des Integrals

9) $$fx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi s}{s}\,e^{sx}\,dt.$$

Zunächst lässt sich φs durch den Logarithmus einer bekannten Reihe darstellen. Denn wie längst bekannt**) besteht die Gleichung

10) $$\zeta s = \sum_n \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Pi\, 1-\frac{1}{p^s}},$$

*) Siehe Dirichlet in Crelle's Journal, Bd. XVII, S. 55.
**) Vergl. Euler, *introd. in anal. infin.*, *T. I*, *cap. XV*, §. 274.

wo die Summe auf alle Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, das Product auf alle Primzahlen sich erstreckt, und wiederum der reelle Theil von $s > 1$ zu nehmen ist. Nimmt man auf beiden Seiten die Logarithmen, so folgt sogleich

$$11)\qquad log\,\zeta s = \Sigma\, log \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \varphi s.$$

Wir werden im Folgenden versuchen, die Function ζs in Factoren aufzulösen, und hierzu Ausdrücke durch bestimmte Integrale aufsuchen. Bezeichnet man das Euler'sche Integral der zweiten Gattung wie üblich durch Γs, so wird, wie bekannt,

$$12)\qquad \frac{\Gamma s}{n^s} = \int_0^\infty e^{-nx}\, x^{s-1}\, dx$$

und folglich

$$13)\qquad \zeta s = \Sigma \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma s} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx,$$

so lange der reelle Theil von s die Einheit übersteigt. Das Product nähert sich gleichzeitig mit s ohne Ende der Einheit, während ζs über alle Grenzen wächst. Dieser auch sonst bekannte*) Satz ergibt sich aus Gleichung 13), wenn man sie unter der Gestalt schreibt

$$\Gamma s \,.\, \zeta s = \Gamma(s-1) + \int_0^\infty \left(\frac{x^{s-1}}{e^x - 1} - e^{-x}\, x^{s-2} \right) dx$$

oder was dasselbe ist,

$$14)\qquad (s-1)\,\zeta s = 1 + \frac{1}{\Gamma s - 1} \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} \right) e^{-x}\, x^{s-1}\, dx = \eta s.$$

Hiernach kann man setzen

$$\varphi s = log\,\zeta s = log \frac{1}{s-1} + log\,\eta s$$

$$15)\qquad f x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} log \frac{1}{s-1} \frac{e^{sx}}{s}\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} log\,\eta s \frac{e^{sx}}{s}\, dt.$$

6.

In vorstehendem Ausdrucke lässt sich der Werth des ersten Integrals ohne besondere Schwierigkeit finden. Man gelangt am einfachsten zum Ziele, wenn man

---

*) Vergl. Lejeune-Dirichlet in den mathematischen Abhandlungen der Berliner Akademie für 1837, S. 50.

$$\log\frac{1}{s-1}=\log\frac{1}{s}-\log\left(1-\frac{1}{s}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n s^n}-\log s$$

setzt, wo die Reihe convergirt, da $mod(s+ti)=\sqrt{s^2+t^2}$ für jeden Werth von t die Einheit übersteigen muss. Damit wird

$$16)\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\log\frac{1}{s-1}\frac{e^{sx}}{s}\,dt=\Sigma\frac{1}{2\pi n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{sx}}{s^{n+1}}\,dt-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\log s\frac{e^{sx}}{s}\,dt.$$

Zur Ausführung der Integration setzen wir in Gleichung 6) des Fourier'schen Integrals

$$fx=e^{-sx}x^{\lambda-1},$$

wo λ und s positive Grössen (oder mit positivem reellen Theile) bedeuten mögen, und erhalten

$$x^{\lambda-1}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{0}^{\infty}y^{\lambda-1}e^{(x-y)(s+ti)}\,dy.$$

Substituirt man hier den bekannten Werth des Integrals nach y

$$\int_{0}^{\infty}e^{-(s+ti)y}y^{\lambda-1}\,dy=\frac{\Gamma\lambda}{(s+ti)^{\lambda}}$$

und schreibt zur Abkürzung wieder s statt $s+ti$, so wird für alle positiven Werthe von x

$$17)\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{sx}}{s^{\lambda}}\,dt=\frac{x^{\lambda-1}}{\Gamma\lambda},$$

während für negative Werthe von x die linke Seite der Gleichung verschwindet.*) Differentiirt man die gefundene Formel nach λ, so folgt

$$18)\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\log s\frac{e^{sx}}{s^{\lambda}}\,dt=\frac{x^{\lambda-1}}{\Gamma\lambda}\left(\frac{\Gamma'\lambda}{\Gamma\lambda}-\log x\right).$$

Die Anwendung dieser Ausdrücke ergibt sogleich

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\log\left(1-\frac{1}{s}\right)\frac{e^{sx}}{s^{\lambda}}\,dt=-\Sigma\frac{x^{n+\lambda-1}}{n.\Gamma(n+\lambda)}$$

und wenn man $\lambda=1$ setzt

$$19)\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\log\frac{1}{s-1}\frac{e^{sx}}{s}\,dt=\log x-\Gamma'1+\Sigma\frac{x^n}{n.n!}.$$

Bezeichnet man endlich für positive Werth von x durch das Functionszeichen des Integrallogarithmus das stets convergirende Aggregat

*) Siehe Laplace, *Théorie des Probabilités*, p. 134, Poisson im *Journal de l'école polytechnique*, cah. XIX, S. 481, und Cauchy, ebendas. S. 560, sowie in seinem *Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires*, p. 34 und 36.

20) $$Li\,(e^x) = \log x - \Gamma'1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \,.\, n!},$$

so folgt für den ersten Theil der Function fx:

21) $$fx = Li\,(e^x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \log \eta s \, \frac{e^{sx}}{s} \, dt.$$

7.

Weit schwieriger ist die Untersuchung des von $\log \eta s$ abhängigen Integrals, welche im Wesentlichen darauf hinauskommt, den Differentialquotienten dieses Logarithmen nach den absteigenden Potenzen von s in Reihen von der Form

$$\frac{\partial}{\partial s} \log \eta s = c + \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s^2} + \frac{c_3}{s^3} + \dots$$

zu entwickeln. Durch Integration folgt hieraus zunächst

$$\log \eta s = c_0 + cs + c_1 \log s - \frac{c_2}{s} - \frac{c_3}{2s^2} - \dots,$$

wo der imaginäre Theil der Constante c_0 mit Rücksicht auf die Vieldeutigkeit des Logarithmen so zu bestimmen ist, dass der Werth der Reihe für $t=0$ reell wird. Aus der erwähnten Vieldeutigkeit entspringt eine scheinbare Indetermination, sofern das der ersten Potenz von s proportionale Glied in der Entwickelung von ηs auf das Integral

$$\lim \frac{c}{2\pi} \int_{-t}^{t} e^{sx} \, dt$$

führen würde, dessen Werth mit wachsendem t sich offenbar keiner Grenze nähert. Man vermeidet diese Schwierigkeit, wenn man das vorliegende Integral durch partielle Integration transformirt. Dann wird

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{sx}}{s} \log \eta s \, dt = -\frac{1}{2\pi x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} \, \frac{\partial}{\partial s} \frac{\log \eta s}{s} \, dt,$$

weil das Glied

$$\frac{1}{2\pi x i} e^{sx} \frac{\log \eta s}{s}$$

an den Integrationsgrenzen verschwindet.

Die Entwickelung von $\log \eta s$ gibt

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\log \eta s}{s} = -\frac{c_0}{s^2} + c_1 \frac{\partial}{\partial s} \frac{\log s}{s} + \frac{2c_2}{s^3} + \frac{3c_3}{2s^4} + \dots$$

Damit folgt durch Anwendung von 17) ähnlich wie in dem vorhergehenden Paragraphen, wenn man bedenkt, dass

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{sx}\frac{\log s}{s}\,dt = -\frac{1}{2\pi x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{sx}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\log s}{s}\,dt = \Gamma'1 - \log x$$

$$u = c_0 + c_1(\Gamma' 1 - \log x) + c_2 x - \frac{c_3 x^2}{2.2!} - \frac{c_4 x^3}{3.3!} - \text{etc.},$$

wo die geeignete Bestimmung des imaginären Theils der Constante c_0 bewirkt, dass das Resultat, wie es seiner Natur nach sein muss, reell wird.

8.

Um die Ausführung der im Vorigen angedeuteten Entwickelung zu bewerkstelligen, construirt Riemann einen neuen Ausdruck für die Function ζs. Setzen wir hierzu in Gleichung 12) $n\pi x^2$ statt x und $\frac{s}{2}$ statt s, so wird

$$\frac{\Gamma\frac{s}{2}}{2\pi^{\frac{s}{2}} n^s} = \int\limits_0^{\infty} e^{-n^2\pi x^2} x^{s-1}\,dx$$

und damit

22)
$$\zeta s = \frac{2\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\frac{s}{2}}\int\limits_0^{\infty} x^{s-1}\sum_1^{\infty} e^{-n^2\pi x^2}\,dx.$$

Bezeichnet man die Summe unter dem Integralzeichen durch ψx, und reducirt das Integral auf das Intervall von 1 bis ∞, indem man zwischen den Grenzen 0 und 1 den reciproken Werth von x als Variable einführt, so folgt

23)
$$\zeta s = \frac{2\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\frac{s}{2}}\int\limits_1^{\infty}\left\{x^s\psi(x) + x^{-s}\psi\left(\frac{1}{x}\right)\right\}\frac{dx}{x}.$$

In dieser Formel lässt sich die Function $\psi\left(\frac{1}{x}\right)$ mittelst einer merkwürdigen, von Cauchy erfundenen,*) durch Jacobi und Abel der Theorie der elliptischen Functionen einverleibten Relation zwischen ψx und $\psi\frac{1}{x}$ wegschaffen.

Die a. a. O. mehr angedeutete als ausgeführte Ableitung Cauchy's beruht im Wesentlichen auf folgenden Schlüssen. In Gleichung 7 a) des Art. 4 schreibe man nx statt x und bilde die Summe

$$\sum_{-n}^{n} f(nx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi t \sum_{-n}^{n} e^{nxti}\,dt,$$

oder wenn man die Exponentialgrössen summirt, und $\frac{2t}{x}$ an der Stelle von t einführt:

*) *Bulletin de la société philomatique, Août* 1817, *p.* 124.

$$x\sum_{-n}^{n} f(nx) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{2t}{x}\right) \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\, dt.$$

Lässt man auf beiden Seiten dieser Gleichung n über alle Grenzen wachsen, so nähert sich nach den bekannten und vielfach reproducirten Untersuchungen Dirichlet's das Integral dem Werthe der Summe $\pi\sum_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(\frac{2n\pi}{x}\right)$, während auf der linken Seite $\Sigma f(nx)$ über alle Argumentenwerthe von der Form nx auszudehnen ist, welche zwischen den Grenzen a und b der Gleichung 7b)

$$\varphi t = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_a^b fx\, e^{-xti}\, dx$$

enthalten sind. Fällt nx mit a oder b zusammen, so ist der betreffende Functionswerth halb zu nehmen. Setzt man daher $xy = 2\pi$, so ergibt sich die bemerkenswerthe symmetrische Relation

24) $$\sqrt{x}\,\Sigma f(nx) = \sqrt{y}\,\Sigma\varphi(ny)$$

Um zur Function ψx überzugehen, setzen wir zunächst etwas allgemeiner als Cauchy

$$fx = e^{-\pi(x+h)^2}$$

und dehnen das Intervall von a bis b über alle reellen Werthe aus, wodurch

$$\varphi t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+h)^2 - txi}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{hti - \frac{t^2}{4\pi}}$$

wird. Die Substitution dieser Werthe in 24) gibt

25) $$x\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(nx+h)^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{2nh\pi i}{x} - \frac{n^2\pi}{x^2}}.$$

Die hier bewiesene Formel rührt von Jacobi her,*) und spielt in der Theorie der elliptischen Functionen eine wichtige Rolle zur Reduction imaginärer Amplituden auf reelle. Man kann sie ohne Schwierigkeit auf directem Wege aus der Bemerkung herleiten, dass die Summe auf der linken Seite eine periodische Function von h mit dem Modul x ist, denn eine Aenderung von h um x entspricht einer Vermehrung des Summenindex n um die Einheit. Jede in der gedachten Weise periodische Function aber lässt sich in eine nach den Potenzen von $e^{\frac{2h\pi i}{x}}$ fortschreitende Fourier'sche Reihe entwickeln, deren Coefficienten durch bestimmte Integrale gegeben sind. Die Ausführung dieser Operation ergibt genau die oben gefundene Formel.

---

*) *Fundamenta nova th. funct. ell. p.* 165, *No.* 9.

9.

Cauchy betrachtet in seiner Untersuchung den speciellen Fall $h=0$,*) welcher sofort auf die von uns anzuwendende Relation

26) $$x(1+2\psi x)=1+2\psi\left(\frac{1}{x}\right)$$

führt. Dieselbe zeigt zugleich, dass für abnehmende Werthe von x das Product $2x\psi(x)$ die Einheit zur Grenze hat. Durch Differentiation leitet man leicht die Gleichung

$$1+2\psi x+2x\psi' x=-\frac{2}{x^2}\psi'\left(\frac{1}{x}\right)$$

ab, welche für $x=1$ sich auf die einfachere reducirt:

27) $$1+2\psi 1+4\psi' 1=0.$$

Eliminirt man jetzt $\psi\left(\frac{1}{x}\right)$ in der Gleichung 23) für ζs, so erhält man

$$\zeta s=\frac{2\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\frac{s}{2}}\int_1^\infty\left[(x^s+x^{1-s})\psi x-\tfrac{1}{2}x^{-s}+\tfrac{1}{2}x^{1-s}\right]\frac{dx}{x},$$

oder nach theilweiser Ausführung der Integration

28) $$\zeta s=\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{s(s-1)\Gamma\frac{s}{2}}\left[1+2s(s-1)\int_1^\infty(x^{s-1}+x^{-s})\psi x\,dx\right].$$

Dieser Ausdruck ist vor Allem dadurch wichtig, dass seine rechte Seite einen Sinn behält, auch wenn der reelle Theil von s kleiner als 1 ist, und somit eine Definition der Function ζs für jeden beliebigen complexen Werth von s liefert. Diese Eigenschaft fehlte den früheren Ausdrücken 13) und 22), in denen der reelle Theil von s die Einheit übersteigen musste, wenn die Elemente an der unteren Integrationsgrenze die Werthe der Integrale nicht unendlich machen sollten.

Die neue Gleichung zeigt ferner, dass das Product

29) $$s(s-1)\Gamma\frac{s}{2}\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta s=\xi(s-\tfrac{1}{2})$$

seinen Werth nicht ändert, wenn man s mit $1-s$ vertauscht, oder was dasselbe ist, wenn man das Zeichen von $s-\frac{1}{2}$ umkehrt.**) Die dadurch eingeführte Function

*) Vergl. auch Poisson im 19. Hefte des *Journal de l'école polytechnique*, S. 420; Cauchy im 2. Bande der *Exercices de mathématiques*, S. 141—156; Jacobi in Crelle's Journal, III, S. 307; Abel ebendas. IV, S. 93; u. s. w.

**) Ein hierher gehöriges Beispiel hat Schlömilch gegeben; s. Zeitschr. Jahrg. III, S. 130, wo der in folgender Formel enthaltene Satz ausgesprochen ist:

$$1-\frac{1}{3^{1-s}}+\frac{1}{5^{1-s}}-\frac{1}{7^{1-s}}\pm\ldots=\left(\frac{2}{\pi}\right)^s\Gamma s\sin\frac{s\pi}{2}\left(1-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}\pm\ldots\right)$$

Man kann die analoge Gleichung hinzufügen:

$$1-\frac{1}{5^{1-s}}-\frac{1}{7^{1-s}}+\frac{1}{11^{1-s}}+\frac{1}{13^{1-s}}\ldots=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{6}{\pi}\right)^s\Gamma s\cos\frac{s\pi}{2}\left(1-\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{13^s}\ldots\right)$$

$$30)\qquad \xi s = 1 + (2s^2 - \tfrac{1}{8})\int_1^\infty (x^s + x^{-s})\,\psi x \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

ist folglich eine gerade Function von s, und lässt sich nach den aufsteigenden Potenzen von s^2 entwickeln. Es bedarf kaum der Bemerkung, dass, wenn durch die erwähnte Vertauschung von s und $1-s$ der reelle Theil des Arguments negativ wird, die Γ-Function nicht mehr als Euler'sches Integral, sondern nach Gauss und Bessel*) allgemeiner als Grenze des unendlichen Products

$$31)\quad \Gamma\frac{s}{2} = \lim \frac{1.2.3\ldots.n}{\frac{s}{2}\cdot\frac{s}{2}+1\cdot\frac{s}{2}+2\ldots\frac{s}{2}+n-1}\, n^{\frac{s}{2}-1} \text{ für } n=\infty$$

definirt werden muss.

10.

Die für ζs und ξs aufgestellten Gleichungen zeigen, dass beide Functionen für alle endlichen (complexen) Werthe des Arguments endlich und eindeutig bleiben; nur für $s=1$ nähert sich das Product $(s-1)\,\zeta s$ der Einheit ($\zeta 0 = -1$), während für jede gerade negative Zahl ζs verschwindet. Letzteres wird durch den unendlich werdenden Factor $\Gamma\frac{s}{2}$ herbeigeführt, während gleichzeitig $\xi(s-\frac{1}{2})$ von Null und Unendlich verschieden bleibt. Ausserdem können die Functionen ζs und $\xi(s-\frac{1}{2})$ nur verschwinden, wenn der reelle Theil von s kleiner als 1 (und positiv) ist, weil entgegengesetzten Falles $\log \zeta s = \varphi s$ über alle Grenzen wachsen müsste, was unmöglich ist, so lange die Reihe 1) convergirt. Die einander entgegengesetzten Wurzeln der Gleichung $\xi s = 0$ müssen daher ihren reellen Theil zwischen $\pm\frac{1}{2}$ haben, und man überzeugt sich leicht, dass keine derselben reell sein kann.

Diess folgt z. B. aus dem blossen Anblicke einer von Riemann gegebenen Transformation der Gleichung für ξs durch zweimalige partielle Integration. Man erhält ohne Mühe durch Integration nach dem Factor $(x^s + x^{-s})\frac{dx}{\sqrt{x}}$ in 30)

$$\xi s = 1 + 2\psi 1 - (2s^2 - \tfrac{1}{8})\int_1^\infty \psi' x\left(\frac{x^{s+\frac{1}{2}}}{s+\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{1}{2}-s}}{s-\frac{1}{2}}\right)dx.$$

Wenn man jetzt die Function unter dem Integralzeichen in die beiden Factoren

*) Gauss in seiner berühmten Abhandlung über die hypergeometrische Reihe, vom Januar 1812; Bessel beschäftigt sich mit dieser Verallgemeinerung in zwei an Olbers gerichteten Briefen vom März 1811 und Januar 1812, wo die Bezeichnung $\mathfrak{L}x$ für $\log\frac{\Gamma x}{\sqrt{2\pi}}$ und (nach Kramp) $\Gamma\frac{1}{x}$ für $\mathfrak{L}x + x - (x-\frac{1}{2})\log x$ gebraucht wird.

$$x^2\psi'(x) \text{ und } \frac{x^{s-\frac{3}{2}}}{s+\frac{1}{2}} - \frac{x^{-s-\frac{3}{2}}}{s-\frac{1}{2}}$$

sondert, und nach dem zweiten partiell integrirt, so wird

$$\xi s = 1 + 2\psi 1 + 4\psi' 1 + 2\int_1^\infty \frac{\partial}{\partial x}(x^2\psi' x)\,(x^s + x^{-s})\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Hier verschwinden die ausserhalb des Integralzeichens stehenden Glieder vermöge Gleichung 27) des Art. 9, und man erhält, wenn zur Abkürzung die zwischen den Grenzen 1 und ∞ beständig positiv bleibende Function

32) $$\Xi x = 4\frac{\partial}{\partial x}(x^2\psi' x) = 8\pi x^2 \sum_{n=1}^{\infty}(2n^2\pi x^2 - 3)\, n^2 e^{-n^2\pi x^2}$$

eingeführt wird:

33) $$\xi s = \int_1^\infty \Xi x \frac{x^s + x^{-s}}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Zur Entwickelung nach den aufsteigenden Potenzen von s^2 hat man

34) $$\xi s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^{2n}}{\Gamma(2n+1)}\int_1^\infty \Xi x \log^{2n} x \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

zu setzen, oder wenn man die von n abhängigen Integrale durch l_n bezeichnet,

35) $$\xi s = l_0 + \frac{1}{2!}l_1 s^2 + \frac{1}{4!}l_2 s^4 \ldots . + \frac{1}{(2n)!}l_n s^{2n} + \ldots,$$

eine rasch convergirende Reihe, weil ausser den Facultätencoefficienten auch die Grössen l_n mit wachsendem Index eine abnehmende Reihe bilden. Da nämlich wegen der Exponentialfactoren mit negativen Exponenten in Ξx, die Elemente in der Nähe der unteren Grenze den Haupteinfluss auf den Werth dieser Integrale haben, so wird die Abnahme derselben durch das Abnehmen von $\log^{2n} x$ für Werthe von x zwischen 1 und e bedingt.

11.

Wie im Art. 7 gezeigt worden, kommt es auf die Entwickelung von $\frac{\partial}{\partial s}\frac{\log \eta s}{s}$ nach den absteigenden Potenzen von s an. Zufolge des Vorhergehenden ist

36) $$\eta s = (s-1)\,\zeta s = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{s\,\Gamma\frac{s}{2}}\,\xi\,(s - \tfrac{1}{2})$$

folglich

$$\log \eta s = \frac{s}{2}\log \pi - \log s - \log \Gamma\frac{s}{2} + \log \xi\,(s - \tfrac{1}{2})$$

und hier darf man nach 31) und 35) setzen

$$log\,\Gamma\frac{s}{2} = lim\left[\frac{s}{2}\,log\,n - log\frac{s}{2} - log\left(\frac{s}{2}+1\right) - log\left(\frac{s}{4}+1\right)\ldots - log\left(\frac{s}{2n}+1\right)\right]$$

$$log\,\xi\left(s-\frac{1}{2}\right) = lim\,log\left[l_0 + \frac{1}{2!}l_1\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}l_2\left(s-\frac{1}{2}\right)^4\ldots + \frac{1}{(2n)!}l_n\left(s-\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]$$

oder wenn man sich das Polynom vom Grade $2n$ in lineare Factoren aufgelöst denkt:

$$37)\qquad log\,\xi\,(s-\tfrac{1}{2}) = lim\left\{log\frac{l_n}{(2n)!} + \sum_\sigma log\,[(s-\tfrac{1}{2})^2 - \sigma_n^2]\right\}.$$

Die Summation bezieht sich auf die sämmtlichen Wurzeln σ_n^2, welche hier natürlich Functionen der Zahl n sind, und eventuell erst mit wachsendem n in die Wurzeln der Gleichung $\xi s = 0$ übergehen. Die Substitution dieser Werthe ergibt

$$38)\quad log\,\eta s = lim\left[\frac{s}{2}\,log\frac{\pi}{n} - log\,2 + log\frac{l_n}{(2n)!} + \sum_\sigma log\,(\overline{s-\tfrac{1}{2}}^2 - \sigma_n^2)\right.$$
$$\left. + \sum_{m=1}^{n} log\left(1+\frac{s}{2m}\right)\right]$$

und mit Hülfe dieses Ausdrucks lässt sich der Werth des Integrals

$$39)\qquad u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{sx}}{s}\,log\,\eta s\,dt = -\frac{1}{2\pi x}\int_{-\infty}^{\infty} e^{sx}\frac{\partial}{\partial s}\frac{log\,\eta s}{s}\,dt$$

ermitteln.

Wir beginnen mit der auf σ bezüglichen Summe und setzen

$$log\,[(s-\tfrac{1}{2})^2 - \sigma^2] = 2\,log\,s + log\left(1-\frac{\frac{1}{2}+\sigma}{s}\right) + log\left(1-\frac{\frac{1}{2}-\sigma}{s}\right)$$
$$= 2\,log\,s - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}+\sigma)^m + (\frac{1}{2}-\sigma)^m}{m\,s^m},$$

wenn man den reellen Theil von s grösser nimmt, als den Modul von $\frac{1}{2}\pm\sigma$. Dieser Annahme steht Nichts entgegen, da nur die Bedingung festgehalten werden muss, dass der reelle Theil von $s > 1$ ist. Im Integral u entspringen hieraus nach dem Früheren die Glieder

$$2\,(\Gamma'1 - log\,x) - \Sigma\frac{x^m}{m\,.\,m!}[(\tfrac{1}{2}+\sigma)^m + (\tfrac{1}{2}-\sigma)^m].$$

Der Definition des Integrallogarithmus zufolge ist aber

$$Li\,e^{x(\frac{1}{2}+\sigma)} + Li\,e^{x(\frac{1}{2}-\sigma)} = -2\,\Gamma'1 + log\,[x^2(\tfrac{1}{4}-\sigma^2)]$$
$$+ \Sigma\frac{x^m}{m\,.\,m!}[(\tfrac{1}{2}+\sigma)^m + (\tfrac{1}{2}-\sigma)^m],$$

so dass wir die Summe schreiben können

$$log\frac{l_n}{(2n)!} + \sum_\sigma log\,(\tfrac{1}{4}-\sigma_n^2) - \sum_\sigma\left[Li\,e^{x(\frac{1}{2}+\sigma_n)} + Li\,e^{x(\frac{1}{2}-\sigma_n)}\right].$$

Hier dürfen die beiden ersten Glieder weggelassen werden, weil für $s = 1$ aus 37) und 30)

$$log\,\xi\,(\tfrac{1}{2}) = lim\left[log\frac{l_n}{(2n)!} + \Sigma_\sigma\,log\,(\tfrac{1}{4}-\sigma_n^2)\right] = 0$$

gefunden wird, ihre Summe sich also mit wachsendem n der Null nähert.

Da nach Art. 10 die Wurzeln σ nicht reell sein können, so werden durch die entwickelte Summe von Integrallogarithmen im Ausdruck für s periodische Glieder mit wechselnden Vorzeichen erzeugt, deren Werthe übrigens reell sein müssen. Diess ist ohne Weiteres ersichtlich, sobald die Wurzeln der Gleichung $\xi s = 0$ die Form $\sigma = \alpha i$ haben; aber auch im Falle $\sigma = \alpha_0 + \alpha i$ ist, muss sich das Imaginäre wegheben, weil neben σ auch $\sigma_1 = \alpha_0 - \alpha i$ die Gleichung erfüllt. Riemann hält es indessen für sehr wahrscheinlich, dass α_0 stets verschwindet.

12.

Die aus der Γfunction entspringende Summe lässt sich ganz analog behandeln.

$$log\left(1+\frac{s}{2m}\right) = log\frac{s}{2m} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\left(\frac{2m}{s}\right)^n,$$

wo wiederum dafür zu sorgen, dass der reelle Theil von $s > 2m$ sei. Dann gibt die Integration die Reihe

$$40)\qquad v_m = \Gamma'1 - log\,(2mx) - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2mx)^n}{n.n!},$$

welches Aggregat als der negative Werth des zum Argumente e^{-2mx} gehörigen Integrallogarithmus durch das bestimmte Integral

$$41)\qquad v_m = \int_x^{\infty} e^{-2mx}\frac{dx}{x}$$

ausgedrückt werden kann. Will man diesen Satz nicht als bekannt voraussetzen, so erhält man den Beweis sofort durch die Betrachtung, dass v_m als die Grenze angesehen werden kann, welcher sich mit abnehmenden ω das Integral

$$\int_x^{\infty} e^{-2mx}x^{\omega-1}dx = \int_0^{\infty} e^{-2mx}x^{\omega-1}dx - \int_0^{x} x^{\omega-1}\,dx + \int_0^{x}(1-e^{-2mx})x^{\omega-1}dx$$

nähert. Führt man die Integration aus, so folgt der Werth

$$v_m = lim\left[\frac{\Gamma\omega}{(2m)^\omega} - \frac{x^\omega}{\omega} + \frac{2m}{\omega+1}x^{\omega+1} - \frac{(2m)^2}{2!}\frac{x^{\omega+2}}{\omega+2} + \frac{(2m)^3}{3!}\frac{x^{\omega+3}}{\omega+3} \mp \ldots\right],$$

dessen Identität mit 40) durch eine leichte Rechnung erhellt.

Es bleibt die Summation in Bezug auf m auszuführen. Man erhält

$$\sum_{m=1}^{n}\int_x^{\infty} e^{-2mx}\frac{dx}{x} = \int_x^{\infty}\frac{1-e^{-2nx}}{e^{2x}-1}\frac{dx}{x},$$

wo der Uebergang zur Grenze für $n = \infty$ von selbst klar ist. Was endlich die beiden Glieder

$$\frac{s}{2} \log \frac{\pi}{n} - \log 2$$

im Ausdrucke für $\log \eta s$ betrifft, so hat das erstere nach Art. 7 auf den Werth des Integrals u keinen Einfluss, während das zweite unverändert übergeht. Fasst man daher die gefundenen Ausdrücke zusammen, so wird

42) $$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{sx}}{s} \log \eta s \, dt = -\log nat\, 2 + \int_x^{\infty} \frac{1}{e^{2x} - 1} \frac{dx}{x} - \lim \Sigma_\sigma \left[Li\, e^{x(\frac{1}{2}+\sigma)} + Li\, e^{x(\frac{1}{2}-\sigma)}\right]$$

und durch Vereinigung mit dem Resultate des Art. 6:

43) $$fx = Li(e^x) - \lim \Sigma_\sigma \left[Li\, e^{x(\frac{1}{2}+\sigma)} + Li\, e^{x(\frac{1}{2}-\sigma)}\right] + \int_x^{\infty} \frac{dx}{x(e^{2x}-1)} - 0.69314718$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem von Riemann gegebenen überein, wenn man zufolge der am Schlusse des vorigen Artikels gemachten Bemerkung σ durch αi ersetzt, und ausserdem x statt e^x schreibt; dass hier $\log \frac{1}{2}$ an die Stelle von $\log \xi(0) = -0.69802$ bei Riemann*) getreten ist, mag seinen Grund in der verschiedenen Bedeutung der auf die Wurzeln σ bezüglichen Summen haben. Man weiss durch Dirichlet,**) dass die Summen gewisser unendlichen Reihen von der Anordnung ihrer Glieder abhängen: nach dem Vorigen ist Σ_σ als die Grenze zu betrachten, welcher sich die auf die Wurzeln σ_n einer Gleichung vom $2n$ten Grade bezügliche Summe bei wachsendem n nähert, während bei Riemann die Wurzeln σ der Gleichung $\xi s = 0$ ihrer Grösse nach geordnet sind.

13.

Nachdem der Werth des Integrals 9)

$$fx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi s}{s} e^{sx} dt$$

ermittelt worden, bleibt noch der Werth der Function 8)

$$F(e^x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi s}{s} e^{sx} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\varphi s - \tfrac{1}{2}\varphi(2s) - \tfrac{1}{3}\varphi(3s) - \tfrac{1}{5}\varphi(5s) \pm ..\right] \frac{e^{sx}}{s} dt$$

---

*) Zur Vermeidung von Missverständnissen mag hier bemerkt werden, dass Riemann's Function $\xi(t)$ nach unserer Bezeichnung durch $\frac{1}{2}\xi(\frac{1}{2}+ti)$ ausgedrückt wird.

**) Abhandl. der Berliner Akademie für 1837, p. 48.

aufzusuchen. Dieser ergibt sich infolge der Relation

$$f\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi s}{s}e^{\frac{sx}{n}}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(ns)}{s}e^{sx}dt,$$

wenn der reelle Theil von s grösser als n genommen wird, durch die Gleichung

$$44)\quad F(e^x)=fx-\tfrac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)-\tfrac{1}{3}f\left(\frac{x}{3}\right)-\tfrac{1}{5}f\left(\frac{x}{5}\right)+\tfrac{1}{6}f\left(\frac{x}{6}\right)\mp\cdots$$

Wenn man eine solche Summe durch Sfx bezeichnet, so wird

$$45)\quad F(e^x)=SLi\,e^x-lim\,S\sum_\sigma[Li\,e^{x(\frac{1}{2}+\sigma)}+Li\,e^{x(\frac{1}{2}-\sigma)}]+\int_x^{\infty}\frac{dx}{x}S\frac{1}{e^{2x}-1};$$

das constante Glied verschwindet, weil nach einem bekannten Satze Euler's*)

$$46)\qquad 0=1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{10}-\cdots$$

Untersucht man die Summen der Reihen

$$S\log x=\log x-\tfrac{1}{2}\log\frac{x}{2}-\tfrac{1}{3}\log\frac{x}{3}-\tfrac{1}{5}\log\frac{x}{5}+\tfrac{1}{6}\log\frac{x}{6}\cdots$$

$$Sx^m=x^m-\tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^m-\tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^m-\tfrac{1}{5}\left(\frac{x}{5}\right)^m+\tfrac{1}{6}\left(\frac{x}{6}\right)^m\cdots,$$

so ist leicht zu sehen, dass die erste verschwindet. Denn offenbar ist für abnehmende Werthe von ω

$$S\log x=lim\left[(1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\ldots)\log x+\log\frac{1-\omega}{1-\omega}-\tfrac{1}{2}\log\frac{1-\omega}{1-\omega^2}-\tfrac{1}{3}\log\frac{1-\omega}{1-\omega^3}\cdots\right]$$

oder was wegen 46) dasselbe ist,

$$47)\quad S\log x=lim\,[-\log(1-\omega)+\tfrac{1}{2}\log(1-\omega^2)+\tfrac{1}{3}\log(1-\omega^3)\ldots]=lim\,\omega=0$$

zufolge der im Art. 3 angeführten Möbius'schen Umkehrungsformel.**) Für die zweite der obigen Reihen erhält man

$$Sx^m=x^m\left[1-\frac{1}{2^{m+1}}-\frac{1}{3^{m+1}}-\frac{1}{5^{m+1}}+\frac{1}{6^{m+1}}\cdots\right]$$

und da Euler***) die in der Parenthese enthaltene Summe dem reciproken Werthe der Summe

$$\zeta(m+1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{m+1}}$$

gleich gefunden hat:

$$48)\qquad Sx^m=\frac{x^m}{\zeta(m+1)}.$$

Nach der Definitionsgleichung des Art. 6 aber ist

---

*) *Introd. in anal. infin. I*, §. 277.

**) Crelle's Journal, IX, p. 119, Nr. 10; vergl. Thoman in den *Comptes rendus* der Pariser Akademie nebst Bericht von Cauchy, Bd. 30, S. 162.

***) *Introd. in anal. infin. I*, §. 275.

$$Li(e^x) = \log x - \Gamma' 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n.n!},$$

folglich

49) $$SLi(e^x) = \sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n.n!\,\zeta(n+1)} = \varDelta x.$$

Um endlich auch das Integral

$$\int_x^{\infty} \frac{dx}{x} \cdot S \frac{1}{e^{2x}-1}$$

auf die Function $\varDelta$ zu reduciren, bilde man die Summe Sv_m mit Rücksicht auf die Gleichung 40/41) des Art. 12. Diese gibt sogleich

50) $$Sv_m = S\int_x^{\infty} e^{-2mx} \frac{dx}{x} = -\varDelta(-2mx),$$

welcher Werth wie v_m und e^{-2mx} mit wachsendem Argumente sich der Null nähern muss. Damit wird

51) $$F(e^x) = \varDelta x - \lim \sum_{\sigma} [\varDelta(\overline{\tfrac{1}{2}+\sigma}.x) + \varDelta(\overline{\tfrac{1}{2}-\sigma}.x)] - \sum_{m=1}^{\infty} \varDelta(-2mx)$$

14.

Reihen, durch welche unstetige Functionen ausgedrückt werden, lassen sich im Allgemeinen nicht differentiiren. Ein einfaches Beispiel für diesen Satz liefern z. B. die Fourier'schen Reihen, welche eine unstetige Function darstellen und bei der Differentiation zu convergiren aufhören. Wenn man die Function $F(e^x)$ differentiirt, deren Werth seiner Bedeutung nach constant bleibt, so lange $\log x$ zwischen zwei aufeinander folgenden Primzahlen liegt, so muss die Derivirte stets verschwinden, und nur an der Stelle unendlich oder unbestimmt werden, wo $\log x$ einer Primzahl gleich ist. Wollte man daher die rechte Seite der im Vorigen für $F(e^x)$ aufgestellten Gleichung in ihrer Totalität differentiiren, so würde sich die auf die Wurzeln σ bezügliche Summe keiner Grenze mehr nähern. Beschränkt man diese Summe aber auf eine endliche Anzahl von Gliedern, so lässt sich die Derivirte unseres Ausdrucks bilden, und erhält eine bestimmte Bedeutung. Man kann dieselbe dann als einen genäherten Ausdruck für die Dichtigkeit der Primzahlen von der Grösse e^x ansehen, und findet leicht, wenn man von der Bezeichnung

52) $$Ex = x\varDelta'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!\,\zeta(n+1)}$$

Gebrauch macht:

53) $$F'(e^x) = \frac{e^{-x}}{x}\{Ex - \sum_{\sigma}[E(\overline{\tfrac{1}{2}+\sigma}.x) + E(\overline{\tfrac{1}{2}-\sigma}.x)] - \sum_m E(-2mx)\}.$$

Kehrt man zur Function fx zurück, so geht Ex in e^x über, und man erhält

$$54)\quad e^{-x} f'(x) = \frac{1}{x}\left[1 - e^{-\frac{1}{2}x} \sum_{\sigma} (e^{\sigma x} + e^{-\sigma x}) - \frac{e^{-2x}}{e^{x} - e^{-x}}\right],$$

einen angenäherten Ausdruck für die Dichtigkeit der Primzahlen + der halben Dichtigkeit der Primzahlquadrate $+\frac{1}{3}$ von der Dichtigkeit der Primzahlcuben u. s. w. von der Grösse e^x, dem Resultate Riemann's (a. a. O. S. 679) entsprechend.

Was die im Vorigen angewandten Functionen $\varDelta x$ und Ex betrifft, so ist die Bemerkung vielleicht nicht überflüssig, dass wenn dieselben auch durch stets convergirende Reihen definirt worden sind, doch die numerische Berechnung für einigermassen grosse Werthe des Arguments danach so wenig ausführbar erscheint, wie etwa die directe Summirung der Exponentialreihe für hohe Exponenten. Um so weniger lassen sich daher die Werthe von Summen wie

$$\Sigma \varDelta (\overline{\tfrac{1}{2} \pm \sigma} . x), \quad \Sigma \varDelta (-2mx), \quad \Sigma E (\overline{\tfrac{1}{2} \pm \sigma} . x), \quad \Sigma E (-2mx)$$

durch directe Rechnung finden, und es müssten, falls dieses beabsichtigt würde, die gegebenen Ausdrücke vorher geeigneten analytischen Transformationen unterworfen werden. Ueberhaupt aber können Reihen, welche unstetige Functionen wie Fx und fx darstellen, wenigstens in der Nähe der Sprungstellen ihrer Natur nach nur eine unendlich geringe Convergenz besitzen.

X.

Die Fundamente der Elektrodynamik,

nach den neuesten Untersuchungen bearbeitet

von Dr. Emil Kahl.

---

§. 1. Einleitung.

Es ist bekannt, dass Oerstedt im Jahre 1820 die Eigenschaft des galvanischen Stromes entdeckte, unter geeigneten Verhältnissen eine in seiner Nähe befindliche Magnetnadel abzulenken. Diese Entdeckung war für die Wissenschaft von den erheblichsten Folgen; sie regte die Physiker an, auf dem Wege des Versuches Beziehungen zwischen Magnetismus und Elektricität aufzusuchen und hatte eine Reihe der glänzendsten Entdeckungen in ihrem Gefolge. So fanden zunächst Laplace und Ampère aus den vorhandenen zahlreichen Beobachtungen das Gesetz der Einwirkung eines Stromelementes auf ein magnetisches Theilchen, ein Gesetz, welches nachträglich noch oft durch die Beobachtungen der Physiker bestätigt wurde. Nicht lange nach Oerstedt's Entdeckung, noch im Jahre 1820, zeigte Arago, dass man durch galvanische Ströme, sowie durch den Entladungsstrom der Leidener Flasche solche Körper magnetisch machen könne, die überhaupt fähig sind, Magnetismus aufzunehmen. Physiker und Techniker haben diese Endeckung weiter verfolgt und wenn auch die Wissenschaft noch manches Resultat im Gebiete des Elektromagnetismus zu erwarten hat, so haben doch Oerstedt's und Arago's Entdeckung unter anderm die unberechenbar wichtige Folge gehabt, dass man die Aufgabe der Telegraphie auf's Neue aufnehmen und in befriedigender Weise lösen konnte.

Zwei andere Entdeckungen, welche derjenigen Oerstedt's folgten, sind noch besonders hervorzuheben. Die eine von Ampère herrührend, constatirte dessen Vermuthung, dass Stromleiter gegen einander ebenso Anziehung und Abstossung ausüben möchten, als Stromleiter auf Magneten einwirken, die andere Entdeckung geschah durch Faraday und zeigte, dass die Aenderung der Stromstärke in einem Leiter oder die Bewegung desselben in der Nähe eines neutralen Electricitätsleiters in letzterem einen Strom inducirt. Ampère's Entdeckung fällt in das Jahr 1820, die Ent-

deckung der Voltainduction von Faraday in das Jahr 1831. Beiden Entdeckungen folgten die Arbeiten der vorzüglichsten Gelehrten über die genannten Gegenstände und es sind deren Bemühungen von einem solchen Erfolge gekrönt worden, dass die erhaltenen Resultate unser Interesse in hohem Grade in Anspruch nehmen müssen. Zunächst war es Ampère selbst, welcher aus seinen Versuchen mit grossem Scharfsinne das Gesetz auffand, nach welchem die Wirkungen der Elemente von Stromleitern auf einander sich richten. Dann hat Lenz auf seine eigenen, auf Faraday's und Nobili's Arbeiten fussend, ein Gesetz bekannt gemacht, nach welchem die Richtung der Inductionsströme aus den obwaltenden Umständen bestimmt werden kann. Hierauf hat endlich Neumann, auf den Satz von Lenz und auf andere Erfahrungsresultate bauend, allgemeine Sätze über die Induction in Leitern entwickelt und dadurch sehr schätzbare Beiträge zur Lehre von der Induction geliefert.

Der innere Zusammenhang unter allen Fernewirkungen, die nothwendigen Beziehungen von Ampère's electrodynamischen Erscheinungen mit den Inductionserscheinungen und mit den statischen Wirkungen der Elektricität sind aber durch die Arbeiten von Wilhelm Weber in einer so befriedigenden Weise aufgedeckt worden, dass die Wissenschaft diesem ausgezeichneten Gelehrten zu grossem Danke verpflichtet sein muss. Dem genannten Gelehrten gelang es, denjenigen obersten Grundsatz der Elektricitätslehre aufzufinden, aus dem sich alle bekannten Erscheinungen rein elektrischer Natur — vielleicht mit alleiniger Ausnahme der elektrischen Molekularwirkungen — ableiten lassen. Von Weber und dem leider zu früh verstorbenen Kohlrausch sind noch vor Kurzem die letzten Arbeiten vollendet worden, die die Vollständigkeit erforderte, die Bestimmung einer noch fehlenden Constanten im elektrischen Grundgesetze. Es ist nun der Zweck vorliegender Arbeit, die meist in einzelnen Gesellschaftsschriften zerstreuten Arbeiten von Weber, Kohlrausch, Neumann etc., insofern sie sich auf Wirkung von Elementen gegen Elemente; auf die Wirkung von geschlossenen Leitern gegen Elemente und auf die Bewegung der Elektricität in geschlossenen Leitern in denjenigen Fällen beziehen, wo das Ohm'sche Gesetz noch gilt, in möglichst kurzer und übersichtlicher Darstellung wiederzugeben.

§. 2. Weber's experimentelle Prüfung des Gesetzes von Ampère.

Ampère hatte sein Gesetz nicht aus genauen Messungen der Wechselwirkungen von Stromleitern auf einander abgeleitet, namentlich weil die Construction eines zu Messungen geeigneten Apparates grosse Schwierigkeiten darbot. Sein Apparat gestattete den Leitern wegen nicht ausgeglichener Reibung keine vollkommen freie Beweglichkeit, an diesem mangelhaften Apparate nun beobachtete der geistreiche Forscher in einzelnen Fällen das Ausbleiben von elektrodynamischen Erscheinungen

und gelangte durch deren Discussion zu dem bekannten Gesetze, welches nach ihm, als Entdecker, benannt worden ist. Da nun dieses Gesetz aus so mangelhaften, bei dessen Publication nicht einmal hinlänglich beschriebenen Beobachtungen abgeleitet worden war, so fand sich Weber veranlasst, dasselbe einer genauen experimentellen Prüfung zu unterwerfen.*) Ehe diese Prüfung, welche das genannte Gesetz vollkommen bestätigte, hier ausführlich erörtert werden wird, möge vorerst der Vollständigkeit wegen Ampère's Gesetz selbst seine Mittheilung finden.

Die Bewegung des elektrischen Stromes in dünnen Drähten darf bei den Fernewirkungen des Stromes, ohne einen Fehler von bemerkbarer Grösse zu begehen, so in Rechnung gezogen werden, als ob dieselbe nur in einer im Drahte enthaltenen Linie, etwa z. B. in dessen Achse stattfände. Auf die Rechnung hat diese Vorstellung keinen schädlichen Einfluss, sobald nur die Dicken der aufeinander einwirkenden durchströmten Drahtelemente sehr klein gegen die Entfernung der Drahtelemente von einander sind. Die gedachte Vorstellung bleibt jedoch immer unrichtig, denn eine Bewegung der strömenden Elektricitäten in einer und derselben Curve ist nicht denkbar (s. §. 4). — In dem Ausdrucke I. des Gesetzes von Ampère bedeuten:

ds und ds' die Längen der Achsen zweier vom Strome durchflossenen Drahtelemente.

i die Stromintensität des durch ds, i' die Stromintensität des durch ds' hindurchfliessenden Stromes, beide Intensitäten nach einem und demselben, sonst aber beliebigem Masse gemessen.

r sei die Entfernung von der Mitte von ds bis zur Mitte von ds'.

Θ sei der Winkel, welchen die Richtung des Stromes in ds mit der Geraden r bildet. Als Richtung von r kann man entweder die Richtung von ds nach ds' oder die Richtung von ds' nach ds ansehen. Es bleibt, wie der später folgende Ausdruck des Ampère'schen Gesetzes gleichgültig zeigt, für welche der beiden Richtungen man sich entscheidet, beide führen zu demselben Werthe der Einwirkung von ds auf ds'.

Θ' sei der Winkel, welchen die Richtung des Stromes in ds' mit der Richtung der Linie r bildet.

ε sei der Winkel zwischen den Richtungen des Stromes ds und ds'.

Die abstossende oder anziehende Kraft, welche ds auf ds' ausübt, ist jederzeit derjenigen gleich, welche ds' auf ds ausübt und erfolgt immer in der Verbindungslinie r beider Elemente. Die Grösse dieser Kraft ist:

$$\text{I)} \qquad -k^2 \cdot \frac{ii'}{r^2}\, ds\, ds' \left(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\Theta\cos\Theta'\right).$$

Ein positives Vorzeichen dieses Ausdruckes bedeutet eine abstossende, ein negatives Vorzeichen eine anziehende Kraft.

---

*) Weber, *elektrodynamische* Massbestimmungen. Leipzig, 1846.

Es ist in obigem Ausdrucke k eine Constante, die nur abhängig ist von den Strommaasen und von den Längemaasen, in denen ds, ds' und r ausgedrückt sind. Der Werth der Constanten k lässt sich aus gewissen Beziehungen zwischen Elektromagnetismus und Elektrodynamik für den Fall bestimmen, wo i und i' in dem sogenannten magnetischen Maase ausgedrückt sind. Wie diese Bestimmung von k ausgeführt werden kann und zu welchem Resultate sie führt, soll hier schematisch angedeutet werden, wobei die Maassysteme, deren Kenntniss hierbei erforderlich ist, kurz angegeben werden mögen.

Die Einheit der absoluten Kraft ist diejenige, welche der Masse von 1 Milligramm (= 1 Kubikmillimeter Wasser von 4° C.) in einer Secunde mittlerer Zeit die Beschleunigung von 1 Millimeter ertheilt. Die Einheit des freien Magnetismus ist diejenige Menge, welche auf die ihr gleiche Menge in der Entfernung von 1 Millimeter die abstossende absolute Kraft 1 ausübt. Die Einheit des nördlichen Magnetismus übt auf die Einheit des südlichen Magnetismus in der Entfernung von 1 Millimeter die anziehende Kraft 1 aus. Ein Magnetstab von cylindrischer oder parallelopipedischer Form, in welchem der Magnetismus um die Achse herum ebenso gleichmässig vertheilt ist, als von seiner Mitte aus nach seinen Polen hin der südliche und nördliche Magnetismus gleichmässig vertheilt ist, hat eine magnetische Achse, welche mit seiner geometrischen Achse zusammenfällt. Ein solcher Magnetstab besitzt die Kraft M, wenn derselbe auf einen andern, ihm ganz gleichen in beliebiger Stellung festgehaltenen Magnetstab in einer Entfernung, die beiden Längen vielmals übersteigt, ein ebenso grosses Drehungsmoment ausübt, als wenn beide durch folgende ideale Magnete ersetzt würden. Die idealen Magnete sind gerade Linien von 1 Millimeter Länge, an dem einen Ende die Menge M von nördlichem, am andern Ende die Menge M von südlichem Magnetismus, diese geraden Linien von 1 Millimeter Länge muss man sich mit ihren Mittelpunkten und ihren Richtungen mit den Mittelpunkten und Achsen der wirklichen Magnete zusammenfallend denken. — Man erhält die Stromstärke eines galvanischen Stromes in magnetischem Maase ausgedrückt, wenn man 1) das Drehungsmoment in absoluten Krafteinheiten durch den Versuch bestimmt, welches der geschlossene, kreisförmig geleitete Strom auf einen Magneten von bekannter Kraft K aus einer Entfernung hervorbringt, die so gross ist, dass das Verhältniss $\frac{l}{R}$ der Länge des wirklichen Magneten zur Entfernung R in seiner zweiten und in den höhern Potenzen als sehr klein vernachlässigt werden darf, wobei R die kleinste Entfernung bedeutet, welche zwischen irgend einem Punkte des Magneten und des Stromleiters stattfindet. Dieses durch den Versuch bestimmte Moment sei H. 2) Indem man sich an die Stelle des wirklichen Magneten den idealen Magneten von der Kraft K eingesetzt denkt, berechnet man nun nach folgendem bekannten Gesetze und in folgender Weise die Einwirkung des kreisförmigen

Leiters auf den Magneten. Das Gesetz ist dieses: ein Stromelement von der Länge ds und der Intensität i wirkt in der Entfernung r auf ein nord- oder südmagnetisches Element von der absoluten in dem vorhin angegebenen Maase gemessenen Stärke mit der Kraft $c^2 \frac{im}{r^2} \sin\delta \,.\, ds$ ein, wobei δ der spitze Winkel ist, den das Element ds mit der Linie r einschliesst und c^2 eine Constante bedeutet, die erst einen bestimmten Werth erhalten kann, wenn das Längenmaas, Intensitätsmaas des Stromes und Kraftmaas bestimmt ist. Die Kraft, mit der m bewegt wird, ist rechtwinklig gegen die durch m und ds gelegte Ebene und ausserdem so gerichtet, dass ein mit dem Strome, Kopf voran, schwimmendes Phantom die Ablenkung von m nach links erfolgen sehen würde, wenn m ein nordmagnetisches Theilchen wäre, jedoch nach rechts, wenn m ein südmagnetisches Theilchen wäre. Bei dieser Berechnung drückt man alle Entfernungen in Millimetern aus und erhält dann für das auf den Magnet K ausgeübte Drehungsmoment einen Ausdruck, in welchem nur i und c als Unbekannte vorkommen, etwa den Ausdruck $f(i, c)$. Setzt man nun, indem man das Versuchsresultat berücksichtigt:

$$H = f(i, c),$$

so erhält man i durch Auflösung dieser Gleichung etwa in der Form

$$i = \varphi(H, c).$$

Die Constante c darf man willkührlich wählen, denn hat man eine beliebige Wahl getroffen und nun i in reinen Zahlen erhalten, so müsste dann die nochmalige Berechnung des Drehungsmomentes stets den Werth H für dasselbe ergeben. Das Maas, in welchem man i ausgedrückt erhält, wenn man $c=1$ setzt, nennt man das magnetische Maas des elektrischen Stromes, für welches sich übrigens noch andere im Wesen mit der Vorigen übereinstimmende Definitionen auffinden lassen.

Nachdem diese eigentlich als bekannt vorausgesetzten und nur der Deutlichkeit und Vollständigkeit halber wiederholten Maaserklärungen Platz gefunden haben, möge nun die Thatsache mitgetheilt werden, die zur Bestimmung von k führt, sobald man i und i' in Ampère's Gesetz in magnetischem Stromintensitätsmaase ausdrückt. Man denke sich in ganz bestimmten Stellungen zwei Magneten, deren magnetische Kräfte K und K' als bekannt vorausgesetzt werden, in einer so grossen Entfernung r ihrer Mittelpunkte von einander aufgestellt, dass die Verhältnisse ihrer Längen zu r, nämlich $\frac{l}{r}$ und $\frac{l'}{r}$ in der zweiten und höheren Potenz vernachlässigt werden dürfen. Denkt man sich an der Stelle von K und K' in der früher angegebenen Weise die idealen Magneten von gleicher Wirkung aufgestellt, so kann man nun das Drehungsmoment, welches der eine auf den andern ausübt, berechnen. Nun möge man sich vorstellen, K würde weggenommen und an dessen Stelle ein constanter Kreisstrom eingesetzt, dessen Mittelpunkt und Achse mit dem Mittelpunkt und Achse von K zusammenfällt und

der auf K' dasselbe Drehungsmoment ausübt, als K auf K'. Die Stärke S dieses Stromes kann man bei beliebig angenommenen Radius R desselben dem Früheren zufolge, in magnetischem Maase ausgedrückt, berechnen. Hierauf denke man sich den Magnet K wieder an seine Stelle gesetzt, aber K' hinweggenommen und in derselben Weise, wie vorhin angegeben wurde, durch einen Kreisstrom S' von beliebigem Radius R ersetzt. Die zwischen Elektromagnetismus und Elektrodynamik bestehende Beziehung, welche zur Bestimmung von k führt, ist nun folgende:

Werden K und K' zugleich entfernt und an ihre Stelle die sie vertretenden Ströme S und S' gesetzt, so übt jeder auf den andern dasselbe Drehungsmoment aus, als der entsprechende Magnet auf den andern ausgeübt haben würde. Die Berechnung der Wirkung von K auf K' und umgekehrt, hatte das Drehungsmoment in absolutem Kraftmaase gegeben, mit welchem jeder Magnet den andern zu drehen sucht; setzt man dieses Drehungsmoment demjenigen gleich, welches man erhält, sobald man das Drehungsmoment der Ströme S und S' mit Hülfe von Ampère's Gesetz ausrechnet, so erhält man eine Gleichung, aus welcher sich die Constante k für den Fall ergiebt, dass die Intensitäten des Stromes in Ampère's Gesetz in magnetischem Maase ausgedrückt sind.

Wird die hier angedeutete Methode zur Bestimmung von k angewendet, so findet man $k^2 = 2$, so dass also das Gesetz Ampère's, die Wechselwirkung zweier Stromelemente in absolutem Maase gebend, wenn die Entfernungen in Millimetern, die Stromstärken in magnetischem Maase ausgedrückt werden, durch folgenden Ausdruck repräsentirt wird:

$$\text{II)} \qquad -\frac{2ii'ds\,ds'}{r^2}\left(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\Theta\cos\Theta'\right)$$

Die Prüfung von Ampère's Gesetz durch Wilhelm Weber geschah mit Hülfe des Elektrodynamometers. Dies Instrument besteht aus einer bifilar aufgehängten Multiplicatorrolle, deren Windungsebenen perpendikulär sind und bei welcher die Drähte zur bifilaren Aufhängung zugleich für die Hin- und Rückleitung benutzt werden. Die Achse des Dynameters wurde bei Weber's Versuchen in den magnetischen Meridian gebracht, so dass der Erdmagnetismus die Stellung der Bifillarrolle nicht änderte, sobald der Strom durch sie hindurchgeleitet wurde. Ausser der Bifilarrolle wurde bei diesen Versuchen eine feste, d. h. nicht aufgehängte Multiplicatorrolle angewendet, deren Windungen ebenfalls perpendikular waren und welche sich durch Hin- und Herschieben in beliebige Entfernung zum Dynamometer bringen liess. Der Strom wurde durch die feste Rolle und hierauf durch die Bifillarrolle, oder wenn deren Ablenkung dadurch für die Beobachtung zu gross geworden wäre, nur ein Zweig desselben durch die Bifilarrolle geleitet. Letzteren Fall anlangend, war das Verhältniss des Leitungswiderstandes des Zweiges zu dem der ganzen Leitung durch genaue Versuche ermittelt worden, demnach war auch das Verhältniss der Intensitäten des

Stromes in Zweig und Leitung bekannt. Die Intensität des durch die feste und und die Bifilarrolle geleiteten Stromes konnte nach bekannten elektromagnetischen Gesetzen in magnetischem Maase aus der beobachteten Ablenkung berechnet werden, welche ein Magnetometer durch eine aus der Ferne auf dasselbe wirkende feste Drahtrolle erlitt, durch welche der Strom ebenfalls mit hindurch geleitet wurde.

Gab man nun bei verschiedenen Intensitäten des Stromes der festen Rolle verschiedene Stellungen zur Bifilarrolle, so konnte man 1) die Ablenkung der Bifilarrolle, hervorgebracht durch die Einwirkung der festen Drahtrolle und der bekannten Horizontalintensität des Erdmagnetismus am Beobachtungsorte beobachten und 2) diese Ablenkung mit Anwendung des Ampère'schen Gesetzes No. II) aus der Grösse und Lage beider Multiplicatoren und der Horizontalintensität des Erdmagnetismus berechnen.

Da nun bei den zahlreichen Versuchen Weber's die berechneten und beobachteten Werthe bis auf sehr geringe Abweichungen, die von unvermeidlichen Beobachtungsfehlern herrührten, sämmtlich ein und dasselbe Verhältniss unter einander zeigten, so war hierdurch die Richtigkeit des Ampère'schen Gesetzes bis auf die Constante $k^2 = 2$ vollkommen erwiesen. Das Verhältniss der beobachteten und berechneten Drehungsmomente, welches der Einheit hätte gleich sein sollen, differirte um ca. 6 Procent von der Einheit. Die Versuche waren nämlich von vorn herein nicht darauf angelegt, dieses Verhältniss zu bestimmen, welches nur beiläufig ermittelt wurde und da bei seiner Ermittelung eine Menge aus der Erfahrung entnommene Elemente benutzt werden musste, eine grössere Uebereinstimmung nicht erwarten liess. Es ergiebt sich übrigens aus der beiläufig gefundenen nahen Uebereinstimmung der Constanten von Ampère's Gesetz mit der von Weber gefundenen, dass die Beziehung zwischen Elektromagnetismus und Elektrodynamik, die zu jener geführt hat, keinesfalls unrichtig ist.

§. 3. Nothwendigkeit, die elektrodynamischen Erscheinungen aus den Wechselwirkungen der in Bewegung befindlichen elektrischen Theilchen selbst abzuleiten.

Ampère's Gesetz giebt direct die Richtung und Grösse der Kraft an, mit welcher der constante elektrische Strom i in einem sehr dünnen Drahtelemente ds auf den ponderabeln Träger eines andern constanten Stromelementes $i'ds'$ wirkt. Nun ist bekannt, dass der Strom i in ds nicht direct auf den ponderabeln Träger von $i'ds'$ wirken kann, sonst müsste ds' vom Strome i auch noch in Bewegung gesetzt werden, selbst wenn dieses genannte Element ds' keinen Strom enthielte. Man kann sich wohl von der Uebertragung der elektrischen Wirkungen etwa folgende Vorstellung machen: Der Strom i in ds übt zunächst auf den Strom i' in ds' eine anziehende oder abstossende Wirkung aus, diese wird vollständig oder zum Theil auf den Träger ds' des Stromes i' übertragen und bringt

Bewegung im Sinne von Ampère's Gesetz hervor, wenn der Leiter beweglich ist. Diese Vorstellung fordert auf, das Gesetz Ampère's so umzuformen, dass man einen Ausdruck erhält, welcher die Wechselwirkung der in dem Leiter fliessenden Elektricität repräsentirt, ausserdem machen aber die Erscheinungen der Voltainduction eine solche Umformung ebenfalls dringend nothwendig.

Bei der Voltainduction ist in dem einen Leiter ursprünglich kein Strom vorhanden, ein solcher wird jedoch hervorgebracht 1) indem der neutrale Leiter plötzlich dem Stromleiter genähert oder von ihm entfernt wird, 2) indem der Stromleiter plötzlich dem neutralen Leiter genähert oder von ihm entfernt wird, 3) indem die Intensität des Stromes im Stromleiter plötzlich vermehrt oder vermindert wird, sowie endlich 4) wenn mehrere der angegebenen Veränderungen gleichzeitig hervorgebracht werden. Der inducirte Strom entsteht hier offenbar nur durch die Einwirkung der bewegten Elektricität im Stromleiter auf die neutrale Elektricität im stromlosen Leiter; dies veranlasst zu der Frage, wie die in Strömung befindliche Elektricität auf andere in Ruhe befindliche elektrische Massen einwirken möge? Wie der folgende Paragraph zeigen wird, ist es nicht möglich, diese Frage durch Anwendung des bekannten Grundgesetzes für statische Elektricität zu beantworten, es wird sich vielmehr ergeben, dass dieses Gesetz für bewegte Elektricitäten einer Ergänzung bedarf. Es versteht sich von selbst, dass diese Frage nur dann erst weiter besprochen werden kann, sobald die Vorstellung, welche man sich von der Bewegung der Elektricitäten in einem constanten oder variabeln elektrischen Strome den Erscheinungen gemäss machen muss, hinlänglich festgestellt ist.

§. 4. Die Bewegung der elektrischen Massen beim elektrischen Strome.

Die Erscheinungen, bei denen Elektricität wirksam ist, haben bereits vor langer Zeit zu der Annahme geführt, dass an jeder Stelle eines im sogenannten unelektrischen Zustande befindlichen Leiters gleich grosse Mengen positiver und negativer Elektricität sich gebunden halten, so dass dieselben dem elektrostatischen Grundgesetze zufolge nach Aussen hin keine Wirkung ausüben können. Die Trennung beider Elektricitäten kann durch Reibung, Druck, Temperaturveränderung, Contact etc. hervorgebracht werden; die Kraft, welche hierbei die sich festhaltenden elektrischen Fluida von einander reisst und von einander bewegt, ist schon von Volta elektromotorische Kraft genannt worden. In einer offenen Volta'schen Kette treiben die an den Berührungsstellen thätigen elektromotorischen Kräfte die entgegengesetzten Elektricitäten nach entgegengesetzten Richtungen auseinander, dieselben häufen sich nach den Polen der Kette zu an und nach dem Eintritt des Gleichgewichtszustandes befinden sich an jeder Stelle die auf die daselbst befindliche Elektricität ausgeübten electromotorischen Kräfte mit denjenigen elektrostatischen Kräften im Gleichgewicht, welche

von der freien Elektricität in der Kette ausgeübt worden. Hierbei ist, wie die Versuche an der isolirten offenen Kette zeigen, an dem einen Pole positive, an dem andern Pole negative Elektricität, beide von gleicher Spannung. Schliest man nun die Kette, so neutralisiren sich die Elektricitäten im Schliessungsbogen und in demselben Momente treten auch gewisse Wirkungen auf, die der fliessenden Elektricität eigen sind, z. B. Wassersetzung und Erwärmung im Schliessungsbogen. Da nun diese Wirkungen bei geschlossener Kette fortdauern, so nimmt man an, dass wie beim Schliessen selbst auch noch nach dem Schliessen fortwährend positive Elektricität in der einen Richtung, negative Elektricität in der entgegengesetzten Richtung durch den Schliessungsbogen hindurchfliesse. Der Umstand, dass die geschlossene Kette keine Spannungserscheinungen zeigt, nöthigt dazu, diese Annahme dahin zu vervollständigen, dass durch jeden Querschnitt der Kette in einem beliebigen kleinen Zeitabschnitte ebensoviel positive Elektricität nach der einen Seite hinfliesse, als negative Elektricität nach der entgegengesetzten Richtung bewegt wird, denn wären die durch den Querschnitt fliessenden Mengen beider Elektricitäten ungleich gross, so würden örtliche Anhäufungen der positiven oder negativen Elektricität stattfinden, welche sich durch Spannungserscheinungen zu erkennen geben würden. Bei constanten Strömen bleibt die Ablenkung einer eingeschalteten Tangentenbussole immer dieselbe, nimmt man nun statt einer Umwindung der Nadel *n* solche dicht neben einander liegende Umwindungen, so muss der Druck gegen die Pole der Nadel *n* Mal grösser werden. Denkt man sich statt *n* dicht neben einander geführten Windungen, den Strom, der durch alle hindurchfliesst, in einer einzigen solchen Windung fliessend, so muss der Druck gegen die Pole der Nadel immer noch *n* Mal so gross sein, als bei einer Umwindung der früheren Art. Hieraus ergiebt sich ganz von selbst, dass die Stromstärke, d. h. die Menge der durch den Querschnitt fliessenden Elektricität bei constanten Strömen in jeder Zeiteinheit ein und dieselbe ist.

Schliesst man eine Kette durch einen sehr langen metallischen Schliessungsbogen, so tritt doch der Strom in unmerklich kurzer Zeit nach dem Kettenschluss an allen auch denjenigen Stellen des Schliessungsbogens auf, welche sehr entfernt von den Contactstellen liegen, wo sich die elektromotorischen Kräfte äussern. Man nimmt daher an, dass die elektromotorischen Kräfte durch einen Anstoss wirken, welcher zunächst der Elektricität in unmittelbarer Nähe an den Contactstellen ertheilt wird, in der Weise, dass die positive Elektricität nach der einen Richtung, die negative Elektricität nach der entgegengesetzten Richtung fortgetrieben wird. Die verdrängten elektrischen Massen setzen durch Abstossung die in ihrer Bewegungsrichtung liegenden gleichartigen Massen nach dieser hin in Bewegung. So wird dann der Bewegungsanstoss von den Contactstellen aus vielleicht in ähnlicher Art, wie bei der Wellenbewegung der Luft durch alle Theile der Kette fortgepflanzt. *Die Geschwindigkeit* dieser Fortpflanzung ist wenigstens in

metallischen Leitern und in der Erde sehr gross, wie aus Walker's Versuchen herorgeht, der dieselbe bei den Telegraphenleitungen der Vereinigten Staaten im Mittel zu circa 16,000 englischen Meilen pro Secunde bestimmte.

Die von Querschnitt zu Querschnitt fortgepflanzte elektromotorische Kraft bewirkt an jeder Stelle Verschiebung der positiven Elektricität nach der einen Richtung und Verschiebung der negativen Elektricität nach der entgegengesetzten Richtung. Die Geschwindigkeit, mit der die Elektricität durch die elektromotorische Kraft verschoben wird, ist offenbar etwas ganz anderes, als die oben ausführlicher erwähnte Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Elektricität. Denkt man sich beispielsweise, auf einem Stück des Leiters von der Länge u sei im stromlosen Zustande die Menge $\pm e$ von Elektricität zugleich enthalten. Durch einen hierauf eintretenden Strom werde die Menge $+e$ in einer Secunde um das Stück u nach rechts, die Menge $-e$ in derselben Zeit um das Stück u nach links verschoben, dann fliesst in einer Secunde die Menge $\pm e$ von Elektricität den Querschnitt des Leiters hindurch und die Verschiebungsgeschwindigkeit der Elektricität ist u. Bei einer und derselben Verschiebungskraft muss die Geschwindigkeit, mit welcher die Elektricität im Leiter verschoben wird, um so kleiner sein, je mehr von den elektrischen Fluidis vorhanden ist. Es geht nun aus vielen, z. B. auch aus elektrolytischen Erfahrungen hervor, dass die Menge neutraler Elektricität, die in einem Körper vorhanden, sehr gross, und die Verschiebungsgeschwindigkeit derselben sehr klein sein muss. Bei der Wasserzersetzung durch den galvanischen Strom bewegen sich der Sauerstoff und Wasserstoff in der Zersetzungszelle jedenfalls nur deswegen nach entgegengesetzten Richtungen, weil ersterer an die positive, letzterer an die negative Elektricität fest angeknüpft ist und weil diese Elemente nur mit der Elektricität durch die elektromotorische Kraft fortbewegt werden. Die Menge der an den Polen frei werdenden Elemente ist hierbei so gering, dass die Geschwindigkeit, mit der die Electricitätsträger nach entgegengesetzten Seiten bewegt werden, sehr unbedeutend sein muss. Die Menge der Elektricität, welche sie fortführt, ist aber sehr bedeutend, wie man dadurch ermittelte, dass man die Wirkung eines constanten galvanischen Stromes durch den durch nasse Schnuren verzögerten Entladungsstrom der Leidner Flasche zu ersetzen suchte. Es würde eine sehr grosse Menge statisch aufgehäufter Elektricität dazu gehören, um die oben beispielsweise erwähnte Zersetzung von Wasser selbst nur bei geringen Mengen des letzteren hervorzubringen, so dass also selbst bei schwachen Strömen die durch den Querschnitt der Kette fliessende Menge der Elektricität sehr gross, die Verschiebungsgeschwindigkeit derselben sehr klein sein muss.

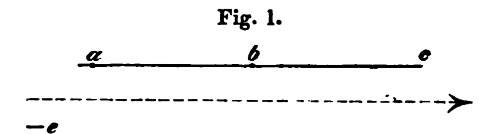
Schiebt man bei einer Thermokette von geeigneter Construction die heissen Contactstellen plötzlich hinweg, dafür aber, ohne dass je die metallische Berührung gestört wird, ein Schliessungsstück von gleichem Material

und gleicher Temperatur, als der übrigbleibende Theil der Kette zugleich hinein, so hört augenblicklich der vorher vorhandene constante Strom auf, denn die Leitung wirkt nun nicht mehr auf eine in der Nähe befindliche Magnetnadel. Da die elektrische Bewegung aufhört, sobald die elektromotorische Kraft aufhört, so muss im Schliessungsbogen ein Widerstand vorhanden sein, denn sonst müsste sich die Elektricität auch noch nach dem Aufhören der elektromotorischen Kraft gleichförmig im Schliessungsbogen fortbewegen und magnetische Fernewirkungen hervorbringen. Um die Ursachen eines solchen Widerstandes aufzufinden, möge man sich Weber's Discussion über diesen Gegenstand anschliessen. Der Widerstand der Leiter könnte davon herrühren, dass dieselben engere oder weitere Canäle für die Bewegung der Elektricität besässen, in der Weise, dass dem Leiter von grösserem Widerstand engere, dem Leiter von geringerem Widerstand weitere Canäle entsprächen. Diese Annahme würde allerdings die geringere Stromstärke bei grösserem Widerstande erklären, sie würde jedoch das Factum unerklärt lassen, dass der Strom mit dem Verschwinden der elektromotorischen Kraft aufhört. Es liegt indess sehr nahe, die Ursache des Widerstandes durch die Einwirkung der sich entgegenkommenden elektrischen Fluida selbst zu erklären, da aus dieser Annahme leicht zu beweisen ist, dass das Aufhören der elektromotorischen Kraft wegen Vereinigung beider entgegengesetzter Elektricitäten das Aufhören der Strömung bedingt. Im constanten Strome werden die sich begegnenden elektrischen Fluida sich zu neutralem Gemisch verbinden, dessen Scheidung immer wieder durch eine neue electromotorische Kraft geschieht, welche, da sie unausgesetzt dieselbe Grösse behält, einen Strom von unausgesetzt gleicher Stärke hervorbringt.

Das Factum, dass die Substanz des Leiters ebenfalls auf den Widerstand influirt, sowie Weber's Erklärung des Magnetismus und Diamagnetismus durch Molecularströme macht jedenfalls die Hinzuziehung von Molecularwirkungen der ponderabeln Theile auf die Elektricität nothwendig. Derjenige, der die Theorie des Widerstandes aus den hier gegebenen, von Weber herrührenden Grundzügen derselben logisch entwickeln wollte, müsste jedenfalls die Wirkungen der ponderabeln Theile ebenfalls einer sorgfältigen Betrachtung unterwerfen. So lange aber ein solcher Ausbau der Theorie nicht erfolgt ist, kann man sich mit Weber von der Vereinigung und Scheidung der elektrischen Massen im Doppelstrome folgende Vorstellung machen, welche von einer Hypothese über die Molecularwirkungen keinen Gebrauch macht, sondern sich nur auf das elektrostatische Grundgesetz stützt. Der Fehler, den man begeht, indem man dieses Gesetz an der Stelle des später zu deducirenden elektrodynamischen Grundgesetzes anwendet, ist nur unerheblich, da, wie sich später herausstellen wird, der Einfluss sehr gering ist, den die Bewegung elektrischer Massen auf ihre gegenseitige *Anziehung ausübt* und nur in einzelnen Fällen recht deutlich

hervortritt. Die genannte Vorstellung ist nun diese: Es seien *a*, *b*, *c* (Fig. 1) drei positiv elektrische Massen, von welchen der Einfachheit wegen angenommen wird, dass dieselben an den Orten, wo sie sich befinden, festgehalten werden. In Richtung der punktirten Linie bewege sich die negativ elektrische Masse — *e*; sowie dieselbe in die Anziehungssphäre von *a* gelangt, beschreibt sie nach den Keppler'schen Gesetzen eine Ellipse um *a*. Die fortgesetzte Einwirkung der elektromotorischen Kraft wirkt nach Art der Störungen auf die Elemente der Bahn von — *e*, macht dieselbe immer langgestreckter, bis endlich — *e* in die Anziehungssphäre von *b* gelangt, wo sich nun dasselbe begiebt, was vorher um *a* durch die Anziehung von *a* geschah. Man sieht leicht ein, wie auf diese Weise die elektromotorische Kraft das negativ-elektrische Theilchen zum Umlaufe in den Leiter nöthigt. Um diese Vorstellung dem wirklichen Vorgange gemäss abzuändern, braucht man nur weiter anzunehmen, dass sich auch die positiv-elektrischen Massen in Bewegung befinden und die neue Vorstellung dieser weiteren Annahme gemäss auszubilden.

Fig. 1.



§. 5. Die Ergänzung des elektrischen Grundgesetzes durch Wilhelm Weber.

Das elektrostatische Grundgesetz lässt sich bekanntlich in folgender Weise aussprechen:

„Die Wirkung zweier elektrischen Massen erfolgt in der Richtung ihrer Verbindungslinie und ist dem Producte beider Massen direct, dem Quadrate der Entfernung beider Massen umgekehrt proportional.“

Dieses Gesetz erklärt jedoch die Wechselwirkung zwischen zwei Stromleitern nicht; denn befinden sich in einem Elemente ds des einen Stromleiters gleichzeitig zwei elektrische Massen $\pm e$ und in einem Elemente ds' des andern Stromleiters gleichzeitig die Massen $\pm e'$, so ergeben sich nach dem elektrostatischen Grundgesetz vier Wechselwirkungen, deren Resultante Null sein muss. Hieraus folgt zugleich, dass das elektrostatische Grundgesetz auch die Wechselwirkung von einem ganzen Stromleiter auf einen andern ganzen Stromleiter nicht zu erklären vermöge. Die wirkliche Existenz der Einwirkung von Stromleitern auf einander erfordert daher ein andres elektrisches Grundgesetz für bewegte elektrische Massen, als für ruhende Massen. Soll dieses Gesetz ganz allgemein sein, so muss es das elektrostatische Grundgesetz in sich enthalten, d. h. es muss, wenn man die Geschwindigkeit oder Beschleunigung oder andere in ihm vorkommende auf die Bewegung sich beziehende Grössen der Null gleich setzt, in das elektrostatische Grundgesetz übergehen. Weber glangte durch Discussion dreier specieller Fälle zu einem Gesetze der Einwirkung bewegter Massen auf einander, dasselbe Gesetz leitete er später allgemeiner aus dem Gesetze

Ampère's ab und konnte schliesslich auch die Erscheinungen der Voltainduction in einer völlig mit der Erfahrung übereinstimmenden Weise erklären. Die drei speciellen Thatsachen, welche auf das elektrische Grundgesetz führten, waren folgende:

α) Zwei Stromelemente, welche in einer geraden Linie liegen, mit welcher ihre Richtung zusammenfällt, stossen einander ab, oder ziehen einander an, jenachdem sie vom Strome in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne durchlaufen werden.

β) Zwei Stromelemente, welche mit ihrer Verbindungslinie rechte Winkel bilden, werden angezogen oder abgestossen, jenachdem sie vom Strome in gleichem oder entgegengesetztem Sinne durchlaufen werden.

γ) Ein Stromelement, welches mit einem Drahtelement in gerader Linie liegt, mit welcher die Richtungen beider Elemente zusammenfallen, inducirt einen gleich oder entgegengesetzt gerichteten Strom im Drahtelemente, je nachdem seine eigene Stromintensität ab- oder zunimmt.

Die ersten beiden Thatsachen ergeben sich direct aus dem durch die Erfahrung geprüften Ampère'schen Gesetze, die dritte Thatsache ist durch Inductionsversuche bekannt geworden.

α') Discussion der ersten Thatsache.

Zwei Stromelemente, in einer Geraden gelegen, mit welcher ihre Richtung zusammenfällt, stossen sich ab bei gleichgerichtetem Strome und ziehen sich an bei entgegengesetzt gerichtetem Strome.

Das Ampère'sche Gesetz I) ergiebt für die Wechselwirkung:

α'_1) weil $\varepsilon = 0$, $\Theta = 0$, $\Theta' = 0$ die Kraft $+\frac{k^2}{2} ii' \frac{ds\,ds'}{r^2}$, also Abstossung.

α'_2) weil $\varepsilon = \pi$, $\Theta = 0$, $\Theta' = \pi$, die Kraft $-\frac{k^2}{2} ii' \frac{ds\,.\,ds'}{r^2}$, demnach Anziehung.

Für das Element ds ist i die Stromstärke; ist u die Verschiebungsgeschwindigkeit der Elektricität in ds, so ist im stromlosen Zustande die Menge i auf die Strecke u vertheilt gewesen, daher ist im Elemente ds die Menge $\frac{i\,ds}{u}$ von El. enthalten, ebenso soll im Elemente ds' die Menge $\frac{i'\,ds'}{u'}$ enthalten sein, wobei u' die Verschiebungsgeschwindigkeit für das zweite Stromelement bedeuten möge. Die elektrostatischen Wirkungen der vier elektrischen Massen sind im betrachteten Augenblicke in den Fällen α'_1 und α'_2:

$$+\frac{ii'\,ds\,.\,ds'}{r^2\,.\,uu'},\ -\frac{ii'\,ds\,.\,ds'}{r^2 uu'},\ -\frac{ii'\,ds\,.\,ds'}{r^2 uu'},\ +\frac{ii'\,ds\,.\,ds'}{r^2\,.\,u\,.\,u'}.$$

Die Resultante dieser vier Wirkungen ist Null, die wirklich stattfindende Wirkung der Stromelemente auf einander rührt demnach nicht von

der relativen Entfernung r der Massen von einander her, sie muss vielmehr von dem Bewegungszustande, also etwa von der relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$, oder der relativen Beschleunigung $\frac{d^2r}{dt^2}$, wie sie im betrachteten Augenblicke je zweien der elektrischen Massen zukommt, abhängig sein. Nun berücksichtige man: das Quadrat der relativen Geschwindigkeit ist bei den in gleichem Sinne bewegten elektrischen Massen $(u-u')^2$, daher stets kleiner als bei den in entgegengesetztem Sinne bewegten elektrischen Massen, bei denen dasselbe $(u+u')^2$ ist. Die dynamische Wirkung der vier elektrischen Massen erklärt sich, wie man leicht erkennt, durch die Hypothese, dass diese Wirkung proportional sei dem Producte der elektrischen Massen und ferner proportional sei dem negativen Quadrate der relativen Geschwindigkeit, nämlich: $-\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$; man erhält nämlich für gleiche Stromesrichtung (Fall α'_1) die Wechselwirkungen:

$$\text{von } +\frac{i\,ds}{u} \text{ auf } +\frac{i'\,ds'}{u'} \;:\; +\frac{ii'\,ds\,.\,ds'}{uu'}\times[-(u-u')^2],$$

$$\text{von } +\frac{i\,ds}{u} \text{ auf } -\frac{i'\,ds'}{u'} \;:\; -\frac{ii'\,ds\,.\,ds'}{uu'}\times[-(u+u')^2],$$

$$\text{von } -\frac{i\,ds}{u} \text{ auf } -\frac{i'\,ds'}{u'} \;:\; +\frac{ii'\,ds\,.\,ds'}{uu'}\times[-(u-u')^2],$$

$$\text{von } -\frac{i\,ds}{u} \text{ auf } +\frac{i'\,ds'}{u'} \;:\; -\frac{ii'\,ds\,.\,ds'}{uu'}\times[-(u+u')^2].$$

Daher ist die Gesammtwirkung der in gleichem Sinne bewegten elektrischen Massen:

$$-\frac{2ii'\,ds\,ds'}{uu'}(u-u')^2;$$

die Wirkung der in ungleichem Sinne bewegten elektrischen Massen ist jedoch:

$$+\frac{2ii'\,ds\,ds'}{n'}(u+u')^2;$$

Die Resultante beider Wirkungen ist positiv, weil $(u+u')^2 > (u-u')^2$, daher ist die gemachte Hypothese — wie sich übrigens auch durch Anwendung auf den Fall α'_2 ergeben würde — wenigstens nicht mit der ersten Thatsache in offenbarem Widerspruche. Da nun bei dem aufzufindenden allgemeinen Grundgesetze der Elektricitätslehre jedenfalls das elektrostatische Grundgesetz herauskommen muss, wenn die relative Geschwindigkeit Null ist, so hat Weber folgende Hypothese für die Einwirkung zweier elektrischen Massen e und e' an die Stelle der vorigen gesetzt:

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1-a^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right],$$

welcher Ausdruck für $\frac{dr}{dt}$ übergeht in $\frac{ee'}{r^2}$, d. i. also in den Ausdruck des

elektrostatischen Grundgesetzes. In diesem Ausdrucke bedeutet a^2 eine Constante, deren Grösse abhängig ist von dem Elektricitätsmaas, in welchem e und e' ausgedrückt sind, von dem Längenmaase, in welchem r und $\frac{dr}{dt}$ ausgedrückt ist und endlich von dem Kraftmaase, in welchem der ganze Ausdruck die Grösse der Wechselwirkung ergiebt. Der gegebene Ausdruck erklärt die Specialfälle der ersten Thatsache vollkommen, denn man hat:

I) im Falle α'_1 für die Einwirkung von $+\frac{i\,ds}{u}$ auf $+\frac{i'ds'}{u'}$:

$$\frac{ii'ds\,ds'}{r^2uu'}[1-a^2(u^2-2uu'+u'^2)]=\frac{ii'ds\,ds'}{r^2}\left(\frac{1}{uu'}-a^2\frac{u}{u'}+2a^2-a^2\frac{u'}{u}\right).$$

Hieraus erhält man durch Vertauschung von $+u$ mit $-u$ die Wechselwirkung von $-\frac{i\,ds}{u}$ auf $+\frac{i'ds'}{u'}$. Bildet man auf diese Weise die Ausdrücke, die noch fehlen, so erhält man als Resultante aller Wechselwirkungen, welche gleich ihrer Summe ist:

$$8a^2.\frac{ii'ds\,ds'}{r^2}.$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem aus dem Ampère'schen Gesetz erhaltenen $+\frac{k^2}{2}ii'\frac{ds\,ds'}{r^2}$ bei gehöriger Bestimmung der Constanten a^2 überein. Es ist hierbei stillschweigend die Voraussetzung gemacht worden, dass die Wechselwirkung der elektrischen Massen ganz auf den ponderabeln Träger übertragen wird. Die Annahme, dass die elektrischen Massen in Richtung des Leiters ohne allen Widerstand verschoben werden, wenn sie von ihren eigenen Wechselwirkungen afficirt werden, ist hier völlig unstatthaft, denn es könnte hieraus die Uebertragung der Wirkung auf den Leiter nicht ererklärt werden. Die Hypothese, dass die Wirkung der elektrischen Massen auf einander vollständig auf den ponderabeln Träger übergehe, führt übrigens, wie sich später herausstellen wird, zu einem mit der Erfahrung völlig übereinstimmenden Gesetze.

II) Im Falle α'_2 hat man für die Einwirkung von $+\frac{i\,ds}{u}$ auf $+\frac{i'ds'}{u'}$:

$$\frac{ii'ds\,ds'}{uu'r^2}[1-a^2(u^2+2uu'+u'^2)].$$

Indem man auch hier auf gehörige Weise die Geschwindigkeiten $+u$ und $+u'$ in $-u$ und $-u'$ umwandelt, erhält man die Einwirkung der übrigen drei Massen auf einander, die Resultante aller vier Wirkungen ist ihrer Summe gleich und beträgt:

$$-8a^2\frac{ii'ds\,ds'}{r^2}.$$

Auch hier stimmt das Resultat mit dem durch Anwendung von Ampère's Gesetz gewonnenen:

$$-\frac{k^2}{2}\frac{ii'ds\,ds'}{r^2}$$

überein.

β') Discussion der zweiten Thatsache.

Zwei Stromelemente, welche mit ihrer Verbindungslinie rechte Winkel bilden, werden angezogen, sobald sie vom Strome in gleichem Sinne durchlaufen werden, abgestossen, sobald der Strom in ihnen entgegengesetzte Richtung hat.

Wendet man auf diese zwei Fälle der zweiten Thatsache das Gesetz Ampère's an, so erhält man:

β'_1) wegen $\varepsilon = 0$, $\Theta = \frac{\pi}{2}$, $\Theta' = \frac{\pi}{2}$ den Ausdruck

$$-k^2\frac{ii'ds\,ds'}{r^2},$$

demnach Anziehung.

β'_2) wegen $\varepsilon = \pi$, $\Theta = \frac{\pi}{2}$, $\Theta' = \frac{\pi}{2}$ den Ausdruck

$$+k^2\frac{ii'ds\,ds'}{r^2},$$

demnach Abstossung.

Die relative Geschwindigkeit ist hier immer Null, denn beträgt z. B. die Entfernung der beiden positiv elektrischen Massen im Specialfalle α'_1 im betrachteten Augenblicke, von welchem an etwa die Zeit gezählt werden möge, r, so ist sie dann am Ende der Zeit t dem Ausdrucke

$$\varrho = \sqrt{r^2 + (u - u')^2 t^2}$$

gleich, daher ist die relative Geschwindigkeit am Ende der Zeit t:

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{(u - u'^2)\,t}{\sqrt{r^2 + (u - u')^2 t^2}}.$$

Um aus diesem Ausdrucke die relative Geschwindigkeit der übrigen Massen zu finden, braucht man nur auf geeignete Weise die Zeichen der Geschwindigkeiten u, u' einzeln oder beide zugleich zu wechseln. Setzt man hierauf $t = 0$, so erhält man für die relative Geschwindigkeit in dem betrachteten Augenblicke $\frac{dr}{dt} = 0$. In den vorliegenden beiden Specialfällen hat man demnach eine anderweite Ergänzung des statischen Grundgesetzes der Elektricität eintreten zu lassen; man wird hierbei am Besten die Wirkung zweier elektrischen Massen abhängig machen von ihrer relativen Beschleunigung, denn diese ist bei den Specialfällen der Thatsache β nirgends Null, während sie in allen Fällen der Thatsache α der Null gleich ist. Die vorgeschlagene Ergänzung stösst demnach die Discussion über α keineswegs um, ist aber, wie sich bald ergeben wird, geeignet, die Thatsache β zu erklären.

Fassen wir zunächst den Fall β'_1) ins Auge, so erhalten wir für die relative Beschleunigung der beiden positiv elektrischen Massen am Ende der Zeit t:

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2}=\frac{(u-u')}{[r^2+(u-u')^2t^2]^{\frac{1}{2}}}-\frac{(u-u')^4t^2}{[r^2+(u-u')^2t^2]^{\frac{3}{2}}},$$

daher für die relative Beschleunigung im betrachteten Augenblicke ($t=0$):

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{(u-u')^2}{r}.$$

Für die elektrischen Massen:

$+\frac{ids}{u}$ und $-\frac{i'ds'}{u'}$ ist demnach die relative Beschleunigung $\frac{(u+u')^2}{r}$,

$-\frac{ids}{u}$ und $-\frac{i'ds'}{u'}$ - - - - - $\frac{(u-u')^2}{r}$,

$-\frac{ids}{u}$ und $+\frac{i'ds'}{u'}$ - - - - - $\frac{(u+u')^2}{r}$.

Die relative Beschleunigung der in demselben Sinne bewegten elektrischen Massen ist daher gleich gross, ebenso ist die relative Beschleunigung der in entgegengesetztem Sinne bewegten elektrischen Massen unter sich gleich. Nehmen wir versuchsweise an, die Wirkung der elektrischen Massen geschehe in Richtung ihrer Verbindungslinie und setzen dieselbe proportional ihrer relativen Beschleunigung, so erkennen wir, dass die Wechselwirkung der in gleichem Sinne bewegten elektrischen Massen folgendem Ausdruck proportional ist:

$$\frac{ii'ds\,ds'}{ruu'}\cdot(u-u')^2,$$

während die Wechselwirkung der in entgegengesetzter Richtung bewegten elektrischen Massen proportional ist:

$$-\frac{ii'ds\,ds'}{ruu'}(u+u')^2.$$

Die Resultante aller Wechselwirkungen ist negativ, weil $(u+u')^2>(u-u')^2$, d. h. es findet hier noch Anziehung statt. Ein gleich günstiges Resultat für den Erklärungsversuch würde man erhalten, wenn man in ähnlicher Weise den Fall β'_2 in Betracht ziehen würde. Weber schlägt in Folge dieser von ihm angestellten Betrachtungen vor, die Wechselwirkung zweier elektrischen Massen e und e', die in der Verbindungslinie beider stattfindet, dem Ausdrucke:

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1-a^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+b\frac{d^2r}{dt^2}\right]$$

gleichzusetzen, wobei a^2 eine Constante und b eine von der Beschleunigung und Geschwindigkeit unabhängige, später zu bestimmende Grösse bedeutet.

I) Im Falle β'_1 ist die Einwirkung der positiv elektrischen Masse $\frac{ids}{u}$ auf die positiv elektrische Masse $\frac{i'ds'}{u'}$:

$$\frac{ii'ds\,ds'}{uu'r^2}\left[1+\frac{b}{r}(u^2-2uu'+u'^2)\right]=\frac{ii'ds\,.\,ds'}{r^2}\left[\frac{1}{uu'}+\frac{b}{r}\left(\frac{u}{u'}-2+\frac{u'}{u}\right)\right].$$

Man erhält hieraus die Einwirkung von $\frac{ids}{u}$ auf $-\frac{i'ds'}{u'}$, indem man in obigem Ausdrucke statt $+u'$ die Geschwindigkeit $-u'$ einführt; überhaupt hat man, um von einer positiven Masse ausgehend, die Wirkung der zugeordneten negativen Masse zu finden, anstatt der zugehörigen Geschwindigkeit deren negativen Werth einzusetzen. Um nun die zu dem obigen Ausdrucke gehörigen drei andern Ausdrücke der Wechselwirkung zu finden, muss man demnach anstatt $+u$ und $+u'$ der Reihe nach einführen $+u$ und $-u'$, $-u$ und $-u'$, $-u$ und $+u'$. Die Gesammtwirkung ist die Summe der so erhaltenen Ausdrücke, bei deren Herstellung sich, wie man leicht erkennt, alle Glieder in der Parenthese neben $\frac{ii'ds\,ds'}{r^2}$ paarweise heben, die u und u' enthalten, so dass nur übrig bleibt:

$$-\frac{8ii'ds\,.\,ds'}{r^2}\cdot\frac{b}{r}.$$

Nimmt man b als positiv und in geeigneter Weise abhängig von r an, so erhält man für die Wechselwirkung denselben Werth, als durch das Ampère-sche Gesetz, nämlich:

$$-k^2ii'\frac{ds\,ds'}{r^2}.$$

II) Im Falle β'_2) erhält man in der im vorigen Falle angegebenen Weise für die Resultante der vier Wechselwirkungen:

$$+8ii'\frac{ds\,ds'}{r^2}\cdot\frac{b}{r}$$

und es würde derselbe Werth von b, wie im vorigen Falle, diesen Ausdruck identisch machen dem durch Anwendung von Ampère's Gesetz erhaltenen:

$$+k^2ii'\frac{ds\,ds'}{r^2}.$$

Die Discussion der Thatsachen α' und β' wird endlich erschöpft mit der Auffindung der Beziehung, welche zwischen den Grössen b und a stattfindet. Bezeichnen wir auch die Grösse der Wechselwirkung in den vier Fällen mit α'_1, β'_1, α'_2, β'_2, so lassen sich die durch Ampère's Gesetz gefundenen Wechselwirkungen in ihrem gegenseitigen Verhältnisse auf folgende Weise ausdrücken:

$$\alpha'_1:\beta'_1=\frac{k^2}{2}\frac{ii'ds\,ds'}{r^2}:-k^2\frac{ii'ds\,ds'}{r^2}=1:-2,$$

$$\alpha'_2:\beta'_2=\frac{k^2}{2}\frac{ii'ds\,ds'}{r^2}:+k^2\frac{ii'ds\,ds'}{r^2}=1:-2,$$

wenn man in allen vier Fällen die i, i' etc. gleich gross annimmt. Die durch das hypothetische elektrische Grundgesetz gefundenen Wechselwirkungen ergeben jedoch:

$$\alpha'_1 : \beta'_1 = \frac{8a^2 ii' ds\, ds'}{r^2} : -\frac{8ii' ds\, ds'}{r^2} \cdot \frac{b}{r} = a^2 : -\frac{b}{r},$$

$$\alpha'_2 : \beta'_2 = -\frac{8a^2 ii' ds\, ds'}{r^2} : +\frac{8ii' ds\, ds'}{r^2} \cdot \frac{b}{r} = a^2 : -\frac{b}{r}.$$

Die Gleichung der gleichen Verhältnisse in den Proportionen ergiebt übereinstimmend:

$$b = 2a^2 r,$$

so dass man nun das hypothetische Anziehungsgesetz zwischen zwei elektrischen Massen e und e' bei der Entfernung r, relativen Geschwindigkeit und Beschleunigung $\frac{dr}{dt}$ und $\frac{d^2r}{dt^2}$ ausdrücken kann, wie folgt:

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1 - a^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2a^2 r \frac{d^2 r}{dt^2}\right],$$

wobei a eine Constante, die später zu bestimmen ist, bedeutet.

γ') Liegt ein Drahtelement mit einem Stromelement in gerader Linie, in welchem auch die Stromrichtung des letzteren enthalten ist, so wird in ersterem ein gleich- oder entgegengesetzt gerichteter Strom inducirt, jenachdem die Intensität des Stromelementes ab- oder zunimmt.

In c (Fig. 1) möge das Stromelement sein, dessen Stärke im betrachteten Augenblicke i_0 sein möge, dessen Intensität sich aber von da an dadurch ändern möge, dass die anfängliche Geschwindigkeit $\pm u_0$ der in demselben befindlichen Elektricität grösser oder kleiner werde. In dem mit diesem Elemente zusammenhängenden Strome kommt die Menge i von Elektricität auf die Strecke u des Leiters, daher die Menge $\frac{i}{u}$ auf die Strecke 1; geht nun die Geschwindigkeit u in $u + \frac{du}{dt}dt$ über, so geht die Menge i der Elektricität, welche in einer Secunde durch den Querschnitt des Leiters fliesst, über in

$$i + \frac{di}{dt} \cdot dt = \frac{i}{u}\left(u + \frac{du}{dt}dt\right),$$

hieraus ergiebt sich:

$$\frac{di}{dt} = \frac{i}{u}\frac{du}{dt}.$$

Zunächst soll die Einwirkung betrachtet werden, welche das Stromelement c auf das Drahtelement b hervorbringt, in welchem sich die elektrischen Massen $\pm e'ds'$ befinden mögen (d. h. auf der Strecke 1 die Menge e' von Elektricität). Der Strom in c möge die Richtung bc besitzen, so dass man am besten dieselbe Richtung als die positive für u annimmt, die Entfernung r, welche von b aus nach c hin gerechnet wird, ist deshalb auch als positiv anzunehmen. Ist ab anfänglich gleich r_0, so ist am Ende der Zeit t:

für $+\frac{i_0}{u_0}ds$ und $\pm e'ds'$ die Entfernung $r = r_0 + \int_0^t u\,dt$,

für $-\frac{i_0}{u_0}ds$ und $\pm e'ds'$ „ „ $r = r_0 - \int_0^t u\,dt$,

und deswegen $\frac{dr}{dt} = +u$, sowie $\frac{d^2r}{dt^2} = +\frac{du}{dt}$ in den beiden ersten Fällen und $\frac{dr}{dt} = -u$, sowie $\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{du}{dt}$ in den beiden letzten Fällen. Man erhält daher, zugleich für $\frac{du}{dt}$ seinen Werth $\frac{du}{dt} = \frac{u}{i}\frac{di}{dt}$ einsetzend, für die Einwirkung der beiden Massen $\pm\frac{ids}{u}$ auf $+e'ds'$ die beiden Ausdrücke:

$$\frac{ids}{u}\cdot\frac{e'ds'}{r^2}\left(1 - a^2u^2 + 2a^2r\frac{u}{i}\frac{di}{dt}\right) = \frac{e'ds'ds}{r^2}\left(\frac{i}{u} - a^2iu + 2a^2r\frac{di}{dt}\right)$$

und (im vorigen $-u$ statt $+u$ gesetzt!):

$$\frac{e'ds'ds}{r^2}\left(-\frac{i}{u} + a^2iu + 2a^2r\frac{di}{dt}\right).$$

Die Resultante dieser beiden auf $+e'ds'$ wirkenden Kräfte ist:

$$+\frac{4a^2e'ds'.ds}{r}\cdot\frac{di}{dt}.$$

Setzt man in den vorigen Ausdrücken $-e'$ statt $+e'$, so erhält man die Einwirkungen von $\pm\frac{ids}{u}$ auf $-e'ds'$, deren Resultante hiernach ist:

$$-\frac{4a^2e'ds'ds}{r}\cdot\frac{di}{dt}.$$

Man erkennt hieraus: Es wird auf die positive Masse in b eine abstossende, d. i. nach ba gerichtete Kraft, auf die negative Masse eine nach ab gerichtete anziehende Kraft ausgeübt, wenn $\frac{di}{dt}$ positiv ist, d. h. es wird bei Zunahme der Stromintensität ein entgegengesetzt gerichteter Strom bei Abnahme der Stromintensität ein gleichgerichteter Strom in b inducirt.

Besitzt der Strom in c die Richtung cb, so ist auch ca die positive Richtung für u und r, daher ist r (unter r_0 die anfängliche absolute Entfernung verstanden):

für $+\frac{i_0}{u_0}$ und $\pm e'ds'$ die Entfernung $r = -r_0 + \int_0^t u\,dt$,

für $-\frac{i_0}{u_0}$ und $\pm e'ds'$ die Entfernung $r = -r_0 - \int_0^t u\,dt$.

Demnach erhält man für die Einwirkung auf $+e'ds'$ wieder:

$$+\frac{4a^2 e' ds' ds}{r_0}\frac{di}{dt}$$

und für die Einwirkung auf $-e'ds'$, wie vorhin:

$$-\frac{4a^2 e' ds' ds}{r_0}\frac{di}{dt};$$

d. h. man gelangt zu demselben Resultate, wie bei dem in der Richtung bc angenommenen Strome.

Führt man die Rechnung für ein in a befindliches Stromelement durch, so gelangt man ebenfalls zu dem Resultate, dass abnehmende Stromintensität einen gleichgerichteten, zunehmende Stromintensität einen entgegengesetzt gerichteten Strom inducirt. Es ist hiernach als bewiesen zu betrachten, dass das elektrische Grundgesetz in seiner allgemeinen Form auch die dritte der Thatsachen erklärt, die zu vorläufiger Prüfung desselben ausgesprochen worden ist.

§. 6. Ableitung des Ampère'schen Gesetzes aus dem allgemeinen Grundgesetz der Elektricitätslehre.

Nachdem Wilhelm Weber das Grundgesetz der Elektricitätslehre aus den zwei ersten Thatsachen des vorigen Paragraphen hypothetisch abgeleitet und an der dritten Thatsache vorläufig geprüft hatte, zeigte er, dass sich das Gesetz Ampère's so transformiren lässt,*) dass man es in vier Theile zerfällen kann, von denen der erste Theil der positiv elektrischen Masse $+e$ des ersten Elements auf die positiv elektrische $+e'$ des zweiten entspricht, während die übrigen Theile den Wirkungen von $+e$ auf $-e'$, von $-e$ auf $-e'$ und von $-e$ auf $+e'$ entsprechen. Jeder dieser vier Ausdrücke besass dieselbe Form, als das aus der Discussion der drei speciellen Thatsachen hervorgegangene Gesetz, nämlich:

$$\frac{(\pm e).(\pm e')}{r^2}.\left[1-a^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+2a^2 r\frac{d^2 r}{dt^2}\right],$$

wobei r die Entfernung, sowie $\frac{dr}{dt}$ und $\frac{d^2 r}{dt^2}$ die relative Geschwindigkeit und Beschleunigung der elektrischen Massen bedeuten und a eine Constante ist, welche durch Versuche zu bestimmen ist. — Hierauf zeigte Weber, dass man umgekehrt das Gesetz Ampère's wiederum aus dem allgemeinen Grundgesetze ableiten könne.

Es soll in diesem Aufsatze — um kurz zu sein — nur eine der beiden Ableitungen gegeben werden und zwar die letztere, es wird leicht sein, darnach zu ersehen, auf welche Weise die erstere zu bewerkstelligen sein würde.

Die Elemente, deren Wirkungen auf einander in Betracht gezogen werden sollen, mögen Curven angehören, deren Gleichungen auf ein rechtwinkliges Raumcoordinatensystem bezogen, folgende sind:

*) Elektrodynamische Maasbestimmungen, 1846, S. 113.

$$y = f(x), \quad z = F(x); \quad \eta = \varphi(\xi), \quad \zeta = \Phi(\xi);$$

ferner möge i die Intensität, u die Verschiebungsgeschwindigkeit des durch die erste Curve hindurchfliessenden Stromes sein, sowie i' die Stromintensität und u' die Verschiebungsgeschwindigkeit in der zweiten Curve bedeuten, wobei unter u und u' die absoluten Werthe der Geschwindigkeiten zu verstehen sind. Die Coordinaten $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ können aber zugleich zur Bezeichnung der Stellen im Raume benutzt werden, an welchen sich am Ende einer beliebigen Zeit t die elektrischen Massen befinden. Es versteht sich hiernach von selbst, dass x, y, z für die Masse $+\frac{ids}{u}$ andre Werthe besitzen müssen, als für die elektrische Masse $-\frac{ids}{u}$ etc.

Es möge nun zunächst die Einwirkung der positiv elektrischen Massen $+\frac{ids}{u}$ und $+\frac{i'ds'}{u'}$ auf einander bestimmt werden, aus dieser lassen sich die Einwirkungen der übrigen elektrischen Massen auf einander durch Zeichenvertauschung leicht ableiten. Das allgemeine elektrische Grundgesetz enthält die Grössen $\frac{dr}{dt}$ und $\frac{d^2r}{dt^2}$, welche durch Differentiation folgender Gleichung erhalten werden können:

1) $$r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2.$$

Man hat bei dieser Differentiation immer zu berücksichtigen, dass, wenn man t um dt wachsen lässt, die Curvenbögen s (den x, y, z zugehörig) um $ds = u\,dt$ und s' (den ξ, η, ζ angehörig) um $ds' = u'dt$ zunehmen. Man kann daher schreiben:

$$\begin{aligned} r\frac{dr}{dt} &= (\xi - x)\left(\frac{d\xi}{ds'}\frac{ds'}{dt} - \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}\right) \\ &+ (\eta - y)\left(\frac{d\eta}{ds'}\frac{ds'}{dt} - \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt}\right) \\ &+ (\zeta - z)\left(\frac{d\zeta}{ds'}\frac{ds'}{dt} - \frac{dz}{ds}\frac{ds}{dt}\right) \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} r\frac{dr}{dt} &= (\xi - x)\left(u'\frac{d\zeta}{ds'} - u\frac{dr}{ds}\right) \\ &+ (\eta - y)\left(u'\frac{d\eta}{ds'} - u\frac{dy}{ds}\right) \\ &+ (\zeta - z)\left(u'\frac{d\zeta}{ds'} - n\frac{dz}{ds}\right). \end{aligned}$$

Die Anordnung der Glieder dieses Ausdruckes nach u und u' und die Division der ganzen Gleichung durch r ergiebt:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= u'\left(\frac{\xi - x}{r}\frac{d\xi}{ds'} + \frac{\eta - y}{r}\frac{d\eta}{ds'} + \frac{\zeta - z}{r}\frac{d\zeta}{ds'}\right) \\ &- u\left(\frac{\xi - x}{r}\frac{dx}{ds} + \frac{\eta - y}{r}\frac{dy}{ds} + \frac{\zeta - z}{r}\frac{dz}{ds}\right). \end{aligned}$$

oder:

$$\text{2)}\qquad \frac{dr}{dt} = u' \cos\Theta' - u \cos\Theta,$$

wobei Θ der Winkel ist, den r mit ds einschliesst und Θ' der Winkel, den r mit ds' einschliesst.

Differentiirt man nun $r\frac{dr}{dt}$ nochmals, so erhält man unter Berücksichtigung der Beziehungen: $\frac{ds}{dt} = u$ und $\frac{ds'}{dt} = u'$:

$$r\frac{d^2r}{dt^2} + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = (\xi - x)\left(u'^2\frac{d^2\xi}{ds'^2} - u^2\frac{d^2x}{ds^2}\right) + (\eta - y)\left(u'^2\frac{d^2\eta}{ds'^2} - u^2\frac{d^2y}{ds^2}\right)$$
$$+ (\zeta - z)\left(u'^2\frac{d^2\zeta}{ds'^2} - u^2\frac{d^2z}{ds^2}\right)$$
$$+ \left(u'\frac{d\xi}{ds'} - u\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(u'\frac{d\eta}{ds'} - u\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(u'\frac{d\zeta}{ds'} - u\frac{dz}{ds}\right)^2.$$

Oder, wenn man die Glieder nach den Grössen u und u' anordnet:

$$r\frac{d^2r}{dt^2} + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = u^2\left[(x - \xi)\frac{d^2x}{ds^2} + (y - \eta)\frac{d^2y}{ds^2} + (z - \zeta)\frac{d^2z}{ds^2} + \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right]$$
$$+ u'^2\left[(\xi - x)\frac{d^2\xi}{ds'^2} + (\eta - y)\frac{d^2\eta}{ds'^2} + (\zeta - z)\frac{d^2\zeta}{ds'^2} + \left(\frac{d\zeta}{ds'}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{ds'}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{ds'}\right)^2\right]$$
$$- 2uu'\left(\frac{dx}{ds}\frac{d\xi}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{d\eta}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{d\zeta}{ds'}\right).$$

Indem man unter Anderem berücksichtigt, dass der Ausdruck unter der letzten Klammer den $\cos\varepsilon$ darstellt, wobei ε den Winkel bedeutet, welchen die Stromrichtungen in den Elementen ds und ds' mit einander einschliessen, erhält man schliesslich:

$$\text{3)}\qquad r\frac{d^2r}{dt^2} + \left(\frac{dr}{dt^2}\right) = u^2\left\{1 + (x - \xi)\frac{d^2x}{ds^2} + (y - \eta)\frac{d^2y}{ds^2} + (z - \zeta)\frac{d^2z}{ds^2}\right\}$$
$$+ u'^2\left\{1 + (\xi - x)\frac{d^2\xi}{ds^2} + (\eta - y)\frac{d^2\eta}{ds^2} + (\zeta - z)\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right\}$$
$$- 2uu'\cos\varepsilon.$$

Die Anwendung des allgemeinen Grundgesetzes:

$$\frac{ee'}{r^2}\left\{1 + a^2\left[-\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2r\frac{d^2r}{dt^2}\right]\right\}$$

erfordert den Ausdruck für:

$$-\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2r\frac{d^2r}{dt^2},$$

den man erhält, sobald man die Gleichung 3) mit 2 multiplicirt und dann das dreifache *Quadrat von 2)* addirt, denn:

$$2\left[r\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]-3\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=2r\frac{d^2r}{dt^2}-\left(\frac{dr}{dt}\right)^2.$$

Man erhält bei Ausführung dieser Operation und indem man sogleich den Factor a^2 und die Factoren $+\frac{i\,ds}{u}$ und $+\frac{i'ds'}{u'}$, wie es das Grundgesetz verlangt, hinzusetzt, für die Einwirkung der positiven Massen:

$$4)\qquad a^2\left[2r\frac{d^2r}{dt^2}-\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]\frac{i\,ds}{u}\cdot\frac{i'ds'}{u'}\cdot\frac{1}{r^2}$$

$$=\Big\{\frac{u}{u'}\Big[2-3\cos^2\Theta+2(x-\xi)\frac{d^2x}{ds^2}+2(y-\eta)\frac{d^2y}{ds^2}+2(z-\zeta)\frac{d^2z}{ds^2}\Big]$$

$$\frac{u'}{u}\Big[2-3\cos^2\Theta'+2(\xi-x)\frac{d^2\xi}{ds'^2}+2(\eta-y)\frac{d^2\eta}{ds'^2}+2(\zeta-z)\frac{d^2\zeta}{ds'^2}\Big]$$

$$-4\cos\varepsilon+6\cos\Theta\cos\Theta'\Big\}\frac{a^2ii'ds\,ds'}{r^2}.$$

Die Gleichung 4) enthält alles, was sofort zur vollständigen Auflösung der Aufgabe führen kann, denn das dritte Glied des Grundgesetzes

$$\frac{ee'}{r^2}=\frac{i\,ds}{u}\cdot\frac{i'ds'}{u'}\cdot\frac{1}{r^2}$$

braucht man nicht, weil dieses die statische Wirkung der Massen repräsentirend, bei dem Zusammenziehen mit den statischen Wirkungen der andern drei Massen mit diesen zusammen der Null gleich wird. Der Ausdruck 4) stellt die dynamischen Wirkungen der positiven Massen dar, wie sie sich im betrachteten Augenblicke ($t=0$) herausstellen, wenn man jetzt unter Θ, Θ', ε, x, y, z, ξ, η, ζ, und unter dem zweiten Differentialquotienten der letzten sechs Grössen diejenigen Werthe dieser Functionen von t versteht, welche sie für $t=0$ annehmen. Derselbe Ausdruck 4) stellt auch die dynamischen Wirkungen der übrigen drei Massen vor, sobald man: $-u$ statt u schreibt, um von der Masse $+\frac{i\,ds}{u}$ auf die Masse $-\frac{i\,ds}{u}$, und $-u'$ statt u' schreibt, um von der Masse $+\frac{i\,ds'}{u'}$ auf die Masse $-\frac{i'ds'}{u'}$ zu gelangen. Die oben genannten Grössen Θ, Θ', ε, x, y, z, ξ, η, ζ etc. bleiben hierbei ungeändert, denn dieselben müssen für $t=0$ Coordinaten- und Winkelwerthe an denselben zwei Punkten der Curven geben. Bildet man nun, um die noch fehlenden drei dynamischen Wechselwirkungen zu erhalten, aus 4) die drei entsprechenden Ausdrücke, indem man die geeigneten Zeichenvertauschungen vornimmt, und addirt dann die den vier Wechselwirkungen entsprechenden Ausdrücke, so erkennt man: die Glieder, die $\frac{u}{u'}$ und $\frac{u'}{u}$ enthalten, geben in Summa Null, die von u und u' freien Glieder behalten jedoch bei allen Zeichenvertauschungen dasselbe Vorzeichen, so dass man als Gesammtwechselwirkung erhält:

5) $$-16a^2 \cdot \frac{ii'ds\,ds'}{r^2}(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\Theta\cos\Theta').$$

Man erkennt hieraus, dass Weber's allgemeines Grundgesetz das Ampère'sche Gesetz als einen speciellen Fall in sich enthält, was zu beweisen war. Gleichzeitig bemerkt man, dass der Ausdruck 5) zur Bestimmung der Constanten a benutzt werden kann. Hierzu ist erforderlich, dass man a) eine Maaseinheit für das elektrische Fluidum, aus seinen Fernewirkungen definirt, z. B. folgende, festsetzt: die Einheit des elektrischen Fluidums ist diejenige Menge, welche in einem Punkte concentrirt, auf die ihr gleiche Menge in der Entfernungseinheit die abstossende Kraft 1 ausübt; b) dass man statisch eine grössere Menge Elektricität nach dem angegebenen Maase messe und dann c) in einer genau bekannten Zeit durch Leiter hindurchfliessen lasse, welche beweglich aufgehangen sind und deren Wirkung auf einander man beobachtet. Die beobachtete und aus 5) berechnete Wirkung wird dann auf den numerisehen Werth der Constanten a führen. Wie man es hierbei möglich machen kann, einen Strom durch statisch aufgehäufte Elektricität herzustellen, welcher einem galvanischen Strome so viel als möglich gleicht, soll in einem späteren Capitel gezeigt werden, wo die Bestimmung der Constanten a ausführlicher besprochen werden wird. Es möge hierbei noch folgende Bemerkung Platz finden. Berechnet man mit Hülfe von 4) den Unterschied der Kraft, welche vom Strome i' in ds' auf die positiv elektrische Masse in ds und derjenigen Kraft, welche vom Strome i' in ds' auf die negativ elektrische Masse in ds ausgeübt wird, so findet man, dass dieser Unterschied der Null gleich ist, d. h. durch den Strom i' in ds' werden neue scheidende Kräfte im Elemente ds nicht hervorgerufen, die Stromstärke bleibt ungeändert. Ebenso wird durch den Strom i in ds die Stromstärke im Elemente ds' nicht verändert.

§. 7. Induction durch Bewegung eines neutralen Drahtelementes in der Nähe eines ruhenden Stromelementes.

Die Coordinaten des ruhenden Drahtelementes ds, in welchem ein Strom von der Stärke i vorhanden ist (Verschiebungsgeschwindigkeit $\pm u$ der Elektricität) seien am Ende der Zeit t in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem x, y, z, im betrachteten Augenblicke ($t=0$) jedoch x_0, y_0, z_0; die Coordinaten des Elementes ds' seien ξ, η, ζ am Ende der Zeit t; ξ_0, η_0, ζ_0 im betrachteten Augenblicke $t=0$. Die Menge der Elektricität, welche im neutralen Leiter auf die Strecke 1 kommt, sei $\pm e'$, die Induction werde bewerkstelligt, indem der Leiter ds' in einer Richtung mit der Geschwindigkeit u' fortbewegt wird, welche mit der von ds nach ds' gezogenen Verbindungslinie r beider Elemente den $\angle\Theta'$ und mit den positiven Coordinatenachsen die Winkel α, β, γ einschliesst. Ferner möge der Winkel,

den r mit ds bildet, durch Θ und der Winkel, den ds mit der Richtung von u' einschliesst, durch ε bezeichnet werden.

Der gegenwärtige Fall unterscheidet sich von dem vorigen dadurch, dass hier die beiden elektrischen Massen $\pm e'ds'$ im neutralen Leiter mit derselben Geschwindigkeit u' nach derselben Richtung hin fortbewegt werden. Daher haben wir zunächst für die beiden positiv elektrischen Massen $+\frac{i\,ds}{u}$ und $e'ds'$ am Ende der Zeit t:

$$1)\quad r^2 = (\xi_0 + u't\cos\alpha - x)^2 + (\eta_0 + u't\cos\beta - y)^2 + (\zeta_0 + u't\cos\gamma - z)^2.$$

Die Differentiation nach t ergiebt unter Berücksichtigung der Beziehungen $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = u\frac{dx}{ds}$ etc.:

$$r\frac{dr}{dt} = (\xi_0 + u't\cos\alpha - x)\left(u'\cos\alpha - u\frac{dx}{ds}\right)$$
$$+ (\eta_0 + u't\cos\beta - y)\left(u'\cos\beta - u\frac{dy}{ds}\right)$$
$$+ (\zeta_0 + u't\cos\gamma - z)\left(u'\cos\gamma - u\frac{dz}{ds}\right)$$

oder:

$$\frac{dr}{dt} = u'\left(\frac{\xi_0 + u't\cos\alpha - x}{r}\cdot\cos\alpha + \frac{\eta_0 + u't\cos\beta - y}{r}\cos\beta\right.$$
$$\left. + \frac{\zeta_0 + u't\cos\gamma - z}{r}\cos\gamma\right)$$
$$- u\left(\frac{\xi_0 + u't\cos\alpha - x}{r}\frac{dx}{ds} + \frac{\eta_0 + u't\cos\beta - y}{r}\frac{dy}{ds}\right.$$
$$\left. + \frac{\zeta_0 + u't\cos\gamma - z}{r}\frac{dz}{ds}\right)$$

oder:

$$2)\qquad \frac{dr}{dt} = u'\cos\Theta' - u\cos\Theta.$$

Die nochmalige Differentiation der Gleichung $r\frac{dr}{dt}$ ergiebt:

$$r\frac{d^2r}{dt^2} + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(u'\cos\alpha - u\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(u'\cos\beta - u\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(u'\cos\gamma - u\frac{dz}{ds}\right)^2$$
$$- u^2\left[\frac{d^2x}{ds^2}(\xi_0 + u't\cos\alpha - x) + \frac{d^2y}{ds^2}(\eta_0 + u't\cos\beta - z)\right.$$
$$\left. + \frac{d^2z}{ds^2}(\zeta_0 + u't\cos\gamma - z)\right].$$

Ordnet man die Glieder nach den Grössen u, u' an, so erhält man, wenn man zugleich die Formeln dem betrachteten Augenblicke $t = 0$ anpasst:

$$r_0\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)_0+\left(\frac{dr}{dt}\right)_0^2=u^2\left\{\left(\frac{dx}{ds}\right)_0^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)_0^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)_0^2-\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0(\xi_0-x_0)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0(\eta_0-y_0)-\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0(\zeta_0-z_0)\right\}$$
$$+u'^2\,[\cos^2\alpha_0+\cos^2\beta_0+\cos^2\gamma_0]$$
$$-2uu'\left\{\cos^2\alpha_0\left(\frac{dx}{ds}\right)_0+\cos\beta_0\left(\frac{dy}{ds}\right)_0+\cos\gamma_0\left(\frac{dz}{ds}\right)_0\right\}$$

oder:

$$3)\qquad r_0\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)_0+\left(\frac{dr}{dt}\right)_0^2=u^2\left\{1-\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0(\xi_0-x_0)-\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0(\eta_0-y_0)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0(\zeta_0-z_0)\right\}$$
$$+u'^2-2uu'\cos\varepsilon.$$

Bildet man nun denjenigen Ausdruck, welcher dem dynamischen Theile der Wechselwirkung der beiden positiven elektrischen Massen $+\frac{ids}{u}$ und $+e'ds'$ entspricht, indem man berücksichtiget:

$$2\left[r\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]-3\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=2r\frac{d^2r}{dt^2}-\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

so erhält man für diesen dynamischen Theil die Wirkung:

$$4)\qquad \frac{ids}{u}\cdot\frac{e'ds'}{r^2}\left[-a^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+2a^2r\frac{d^2r}{dt^2}\right]$$
$$=\frac{a^2ie'ds\,ds'}{r^2}\left\{u\left[2-3\cos^2\Theta-2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0(\xi_0-x_0)-\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0(\eta_0-y_0)\right.\right.$$
$$\left.-2\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0(\zeta_0-z_0)\right]$$
$$\left.+\frac{u'^2}{u}[2-3\cos^2\Theta']-4u'\cos\varepsilon+6u'\cos\Theta\cos\Theta'\right\}.$$

Dieser Ausdruck giebt die Weckselwirkung von $-\frac{ids}{u}$ auf $+e'ds'$, wenn man $-u$ statt $+u$ schreibt; um dann aus diesen beiden Wirkungen von $\pm\frac{ids}{u}$ auf $e'ds'$ die Wirkung beider Massen $\pm\frac{ids}{u}$ auf $-e'ds'$ zu finden, braucht man nur in den ersten beiden Ausdrücken $-e'$ statt $+e'$ zu schreiben. Die Grössen ξ_0, η_0, ζ_0 etc. bleiben in allen Fällen dieselben, da sie Beziehungen der Lage der elektrischen Massen zu Anfange der Zeit $t=0$ darstellen, welche Lage für alle Massen im betrachteten Augenblicke dieselbe ist. Addirt man nun die Wechselwirkung von $+\frac{ids}{u}$ und von $-\frac{ids}{u}$ auf $e'ds'$, so erhält man als Ausdruck für die Kraft:

$$-\frac{8a^2ie'u'ds\,ds'}{r^2}(\cos\varepsilon-\tfrac{3}{2}\cos\Theta\cos\Theta').$$

Durch Vertauschung von $+e'$ mit $-e'$ erhält man hieraus die Kraft, mit welcher die Massen $+\frac{ids}{u}$ und $-\frac{ids}{u}$ auf die Masse $-e'ds'$ wirkt nämlich:

$$+\frac{8a^2 i e' u' ds\, ds'}{r^2}(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\Theta\cos\Theta').$$

Die Summe dieser beiden Kräfte ist hiernach der Null gleich, so dass also auf das neutrale Element keine Kraft übertragen werden kann, welche dasselbe in Bewegung setzen könnte; die Differenz beider Kräfte aber, d. i. die Kraft, mit welcher die beiden elektrischen Massen von einander bewegt worden sind, ist felgende:

$$-\frac{16a^2 i e' u' ds\, ds'}{r^2}(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\Theta\cos\Theta').$$

Das negative Vorzeichen bedeutet das Bestreben, die positive Elektricität in ds' in der Richtung von ds' nach ds zu bewegen. Da indess die Scheidung bei linearen Leitern nur in deren Richtung stattfinden kann, so muss die gefundene elektromotorische Kraft in eine Componente, die mit ds' zusammenfällt und in eine gegen ds' senkrechte Componente zerlegt werden. Für die erstere, welche hier allein wirkt, kann der Ausdruck gefunden werden, indem man die ganze elektromotorische Kraft mit dem Cosinus des spitzen Winkels φ multiplicirt, welchen das Element ds' mit der von ds nach ds' gezogenen und darüber hinaus verlängerten Richtung r bildet. Die elektromotorische Kraft, die auf ein Element wirkt, wird gewöhnlich als der Unterschied derjenigen gleich grossen aber entgegengesetzt gerichteten Kräfte definirt, welche auf die im Leiter ds' vereinigte Elektricität einwirken würden, sobald in der Längeneinheit des Leiters nur die Einheit der positiven Elektricität, vereinigt mit der Einheit der negativen Elektricität, enthalten wäre. Hiernach ist die elektromotorische Kraft in gegenwärtigem Falle:

$$5)\qquad -\frac{16a^2 i u' ds\, ds'}{r^2}(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\Theta\cos\Theta')\,.\,\cos\varphi.$$

Ein positives Vorzeichen dieses Ausdruckes bedeutet, dass sich die positive Elektricität im Elemente ds' nach der Richtung bewegt, welche mit r den Winkel φ einschliesst.

§. 8. Induction in einem ruhenden Drahtelemente durch ein in der Nähe bewegtes constantes Stromelement.

Das Inductionsgesetz braucht für den Fall, dass der Inducent ds einen constanten Strom enthält und mit der Geschwindigkeit v' bewegt wird, nicht besonders entwickelt zu werden, denn es lässt sich durch dieselbe Untersuchung wie in §. 7 auffinden. Denkt man sich nämlich beiden Elementen ds und ds' die Geschwindigkeit $-v' = u'$ ertheilt, so findet man, dass ds' in die Geschwindigkeit u' übergehen, ds aber in Ruhe kommen würde.

Dabei bleibt die relative Entfernung r beider Elemente in jedem Augenblicke ebensogross, als wenn die Geschwindigkeit $-v'=u'$ nicht eingeführt worden wäre. Aus diesem Grunde gilt der Ausdruck $r^2_{,}$ (§. 7, 1) auch für den vorliegenden Fall, wenn man dieselbe Bezeichnung beibehält, und alles, was aus r^2 abgeleitet wird, muss für den gegenwärtigen Fall denselben Ausdruck erhalten, wie für den vorhergehenden, so dass man schliesslich auch den Ausdruck 5) (§. 7) für die elektromotorische Kraft bekommen wird, in welcher sich die Winkel ε, Θ' auf die Geschwindigkeit $-v'=u'$ beziehen.

§. 9. Induction durch Aenderung der Stromstärke im Inducenten.

Die Intensität i des Stromes im Elemente ds ändere sich in der Zeit dt um $\frac{di}{dt}.dt$, in der Nähe befinde sich ein Element ds', welches bereits den constanten Strom i' vor der Induction durch ds enthielt. Die Entfernung beider Elemente sei r (r von ds nach ds' gezogen gedacht), die Winkel von ds und ds' mit r seien Θ und Θ', der Winkel von ds' und ds sei ε. Die übrigen Bezeichnungen mögen dieselben sein, wie in §. 6, man erhält dann durch nochmalige Differentiation des Ausdruckes 1) daselbst, ebenso wie dort, den Ausdruck:

$$\frac{dr}{dt}=u'\cos\Theta'-u\cos\Theta.$$

Bei der zweiten Differentiation von r^2 hat man jedoch zu berücksichtigen, dass u auch mit der Zeit variirt und es bedürfen daher die Gleichungen des §. 6, von No. 2 ab bis mit No. 3 noch folgenden Zusatzes, um dieselbe auf gegenwärtigen Fall anwenden zu können:

$$-\frac{du}{dt}\left[(\xi-x)\frac{dx}{ds}+(\eta-y)\frac{dy}{ds}+(\zeta-z)\frac{dz}{ds}\right]=-r\cos\Theta\frac{du}{dt},$$

so dass man nun erhält:

$$r\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=u^2\left\{1+(x-\xi)\frac{d^2x}{ds^2}+(y-\eta)\frac{d^2y}{ds^2}+(z-\zeta)\frac{d^2z}{ds^2}\right\}$$
$$+u'^2\left\{1+(\xi-x)\frac{d^2\xi}{ds'^2}+(\eta-y)\frac{d^2\eta}{ds'^2}+(\zeta-z)\frac{d^2\zeta}{ds'^2}\right\}$$
$$-2uu'\cos\varepsilon-r\cos\Theta\frac{du}{dt}.$$

Bildet man im allgemeinen Grundgesetze:

$$\frac{ee'}{r^2}\left\{1+a^2\left[-\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+2r\frac{d^2r}{dt^2}\right]\right\}$$

den dynamischen Theil zunächst für die Einwirkung der beiden positiven elektrischen Massen auf einander mit Hülfe des Schema's:

$$2\left[r\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]-3\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=2r\frac{d^2r}{dt^2}-\left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

und *berücksichtigt, dass:*

$$e = \frac{i\,ds}{u}, \quad e' = \frac{i'\,ds'}{u'}$$

$$\frac{i}{u}(u + du) = i + di \quad \text{d. i.} \quad \frac{du}{dt} = \frac{u}{i}\frac{di}{dt},$$

so erhält man:

1) Wirkung von $+\frac{i\,ds}{u}$ auf $+\frac{i'\,ds'}{u'}$

$$= \frac{a^2}{r^2} i i' ds\, ds' . \frac{u}{u'} \left\{2 + 2(x - \xi)\frac{d^2x}{ds^2} + 2(y - \eta)\frac{d^2y}{ds^2} + 2(z - \zeta)\frac{d^2z}{ds^2} - 3\cos^2\theta\right\}$$

$$+ \frac{a^2}{r^2} i i' ds\, ds' \frac{u'}{u} \left\{2 + 2(\xi - x)\frac{d^2\xi}{ds'^2} + 2(\eta - y)\frac{d^2\eta}{ds'^2} + 2(\zeta - z)\frac{d^2\zeta}{ds'^2} - 3\cos^2\theta'\right\}$$

$$- 2\frac{a^2}{r} i' ds\, ds' \frac{\frac{di}{dt}}{u'} \cos\theta + 6\frac{a^2}{r^2} i i' ds\, ds' . \cos\theta \cos\theta'$$

$$- 4\frac{a^2}{r^2} i i' ds\, ds' \cos\varepsilon.$$

Vertauscht man in 1) u durch $-u$, so erhält man die Einwirkung von $-\frac{i\,ds}{u}$ auf $+\frac{i'\,ds'}{u'}$, addirt man diese zur Einwirkung von $+\frac{i\,ds}{u}$ auf $+\frac{i'ds'}{u'}$ so erhält man als vereinigte Wirkung auf $+\frac{i'\,ds'}{u'}$:

$$2) \quad -\frac{4a^2}{r} ds\, ds' . \frac{i'}{u'} \cos\theta \frac{di}{dt} - \frac{8a^2\, i i' ds\, ds'}{r^2} \left(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\theta \cos\theta'\right).$$

Schreibt man in der vorigen Gleichung $-u'$ statt $+u'$, so erhält man die vereinigte Wirkung der Massen auf $-\frac{i'\,ds'}{u'}$, nämlich:

$$3) \quad +\frac{4a^2}{r} ds\, ds' . \frac{i'}{u'} \cos\theta \frac{di}{dt} - \frac{8a^2\, i i' ds\, ds'}{r^2} \left(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\theta \cos\theta'\right).$$

Die Summe dieser beiden Kräfte ist die elektrodynamische Wirkung des Stromtheilchens ds auf das Stromtheilchen ds', nämlich:

$$4) \quad -\frac{16a^2\, i i' ds\, ds'}{r^2} \left(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\theta \cos\theta'\right),$$

während die Differenz beider Kräfte die in Richtung von r ausgeübte elektromotorische Kraft bedeutet, sie ist:

$$5) \quad -\frac{8a^2}{r} ds\,.\, ds' . \frac{i'}{u'} \cos\theta \frac{di}{dt}.$$

Versteht man, wie gewöhnlich, unter elektromotorischer Kraft die Kraft, welche auf die im Elemente ds' befindliche Elektricität scheidend einwirken würde, sobald in der Längeneinheit des Leiters nur die Einheit der positiven Elektricität mit der Einheit der negativen Elektricität vereinigt wäre, so erhält man für die elektromotorische in der Richtung des Elementes ds' wirkende Kraft den Ausdruck:

6) $$-\frac{8a^2}{r} ds\, ds'.\cos\Theta\cos\Theta'\frac{di}{dt}.$$

Der positive Werth dieses Ausdruckes bezeichnet einen im Elemente ds' inducirten elektrischen Strom nach derjenigen Richtung, welche mit der verlängerten Geraden r den Winkel Θ' bildet, ein negativer Werth dieses Ausdruckes bezeichnet daher einen Strom in entgegengesetzter Richtung.

§. 10. Das allgemeine Inductionsgesetz.

Im §. 7 war die elektromotorische Kraft in demjenigen Falle berechnet worden, in welchem in der Nähe eines von einem constanten Strome i durchflossenen Elementes ds ein neutrales Element ds' mit der Geschwindigkeit u' bewegt wird, wobei die Winkel $\angle(ds, r) = \Theta$, $\angle(ds', u') = \Theta'$ und $\angle(ds, u) = \varepsilon$, $\angle(ds', r) = \varphi$ genannt wurden. Vervollständigt man nun diesen Fall dahin, dass man annimmt, i sei nicht constant, sondern in der Zeit dt ändere sich i um di, so erhält man für die elektromotorische Kraft, welche auf die in der Längeneinheit des Leiters ds' enthaltene Elektricität ausgeübt wird, folgenden Ausdruck, welcher, um die der vorigen ähnliche, etwas umständliche Rechnung nicht zu wiederholen, hier nur im Resultate gegeben werden möge:

$$-\frac{16a^2}{r^2} i\, ds\, ds' u' (\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\Theta\cos\Theta')\cos\varphi - 8\frac{a^2}{r} ds\, ds'.\cos\Theta\cos\Theta'\frac{di}{dt},$$

d.h. die elektromotorische Kraft ist in diesem Falle der Summe derjenigen elektromotorischen Kräfte gleich, welche stattfinden würden, wenn 1) der Strom i in ds constant wäre und der Leiter ds' mit der Geschwindigkeit u' bewegt würde, 2) wenn der Strom i in ds variabel wäre und der Leiter ds' sich in Ruhe befände.

§. 11. Vergleich der erhaltenen Resultate über die Induction mit der Erfahrung.

Lenz hat aus der Erfahrung, speciell aus drei Inductionsversuchen, von denen der eine von ihm selbst, die beiden andern von Faraday und Nobili angestellt wurden, folgende allgemeine Regel über die Richtung des Stromes aufgestellt, welcher in einem neutralen Leiter bei Bewegung desselben in der Nähe eines festen Stromleiters inducirt wird. Man denke sich zunächst beide Leiter in derjenigen Lage, welche sie beim Beginn des Inductionsversuches haben, dabei den beweglichen Leiter nur in der Richtung beweglich, in welcher er beim Inductionsversuche durch äussere Kräfte wirklich bewegt wird. Nun denke man sich plötzlich in den neutralen Leiter einen Strom von beliebiger Stärke versetzt; die Richtung dieses Stromes möge in dem Falle A genannt werden, in welchem der Strom im festen Leiter auf ersteren eine elektrodynamische Wirkung ausübt, welche den beweglichen Leiter in der Richtung verschiebt, in welcher er beim Inductionsversuche durch äussere Kräfte wirklich bewegt wird. Die Regel

von Lenz ist nun die, dass der Inductionsstrom stets der Richtung von A entgegenfliesst. Es ist dies auch so ausgedrückt worden: der Inductionsstrom ist immer so gerichtet, dass die elektrodynamische Wirkung des festen Leiters auf ihn Widerstand gegen die durch äussere Kräfte hervorgebrachte Bewegung des beweglichen Leiters hervorbringt.

Neumann*) hat aus dem oben erwähnten Satze von Lenz mit Hinzuziehung der empirischen Regel, dass die Stärke der momentanen Induction bei der Bewegung des neutralen Leiters der Geschwindigkeit von dessen Bewegung proportional sei, einen Satz abgeleitet, welcher sich zunächst auf die inducirende Wirkung eines geschlossenen Stromes oder Magneten auf ein Element eines in der Nähe bewegten neutralen Leiters bezieht. Dieses Gesetz wird in §. 19 mitgetheilt werden, woselbst auch der Nachweis geführt werden wird, dass Weber's allgemeines Grundgesetz der Elektricitätslehre ebenfalls auf das Inductionsgesetz von Neumann führt. Da nun letzteres eine hohe Wahrscheinlichkeit für sich in Anspruch nehmen darf, da es aus allgemein gültigen empirischen Regeln abgeleitet wurde, so liegt in der Uebereinstimmung beider Gesetze eine neue Bestätigung von Weber's Grundgesetz der Elektricitätslehre.

Eine weitere Bestätigung finden die aus dem allgemeinen Grundgesetze Weber's abgeleiteten Inductionsgesetze in Schwingungsversuchen, die von dem genannten Gelehrten mit dem Elektrodynamometer angestellt wurden. Weber wendete hierbei eine grössere feste Drahtrolle F an, in deren Zwischenraum eine bewegliche Bifilarrolle so aufgehangen war, dass die Windungsebenen beider Rollen senkrecht gegen einander waren und dass die Mittelpunkte derselben zusammenfielen. Nun wurde ein Strom durch F hindurchgeleitet, wobei die Drahtenden der Bifilarrolle B nicht verknüpft waren, hierauf wurde B in Schwingungen versetzt und die Elongationen der schwingenden Rolle beobachtet. Die Elongationen nehmen hierbei des Luftwiderstandes wegen, welcher in jedem Augenblicke der Winkelgeschwindigkeit der schwingenden Rolle proportional ist, in einer geometrischen Reihe ab. Derselbe Versuch wurde hierauf mit dem Unterschiede wiederholt, dass die Drahtenden der beweglichen Rolle mit einander verknüpft wurden; die Schwingungen der Bifilarrolle erlitten nun ausser durch den Luftwiderstand auch noch durch die elektrodynamische Wirkung der Rolle F auf den in B durch die Schwingungsbewegung inducirten Strom eine Dämpfung. Die Dämpfung geschah, wie vorhin in der Weise, dass die auf einander folgenden Elongationen in einer geometrischen Reihe abnahmen, deren Exponent jedoch grösser war, als in dem Falle, wo der Luftwiderstand allein wirkte, die Dämpfung musste deshalb auch in diesem Falle der Winkelgeschwindigkeit der Bifilarrolle proportional gewesen sein. Dieses Erfahrungsresultat stimmt ganz mit dem aus Weber's Grundgesetz

*) Neumann, die mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme, *Berlin 1846*, S. 13.

sich ergebenden Resultate überein, nach welchem in diesem Falle die elektrodynamische Dämpfung in jedem Augenblicke der Geschwindigkeit, mit welcher sich *B* bewegt, proportional sein muss.

Endlich hat Weber noch eine Reihe wichtiger Versuche angestellt, bei denen die Voltainduction mit der Magnetinduction verglichen wurde. Er bewies durch diese Versuche, dass ein geschlossener Strom *S*, welcher dasselbe Drehungsmoment auf die von einem constanten Strome durchflossene Bifilarrolle hervorbringt, als ein an seine Stelle gebrachter Magnet *M*, einen Strom von derselben Stärke, als der Magnet *M* in der Bifilarrolle inducirt, sobald die letztere, wenn sie keinen Strom enthält, in der Nähe beider Inducenten in derselben Weise sehr kleine Schwingungen macht. Dieses Erfahrungsresultat lässt sich nun ebenfalls theoretisch aus dem Gesetze der Magnetinduction und aus den Inductionsgesetzen ableiten, die aus Weber's Grundgesetzen hervorgehen, wodurch die Uebereinstimmung von letzteren mit der Erfahrung auf's Neue nachgewiesen wurde.

Nach Anführung dieser Inductionsversuche erscheint es nothwendig, eine Erörterung über die Bewegung der Elektricität bei den Inductionsströmen anzustellen. In der Mehrzahl der Fälle werden auf die Elektricität in den einzelnen Elementen des Leiters elektromotorische Kräfte ausgeübt, die den Widerständen in diesen Elementen nicht proportional sind; z. B. wenn ein Magnetstab zwar rechtwinklig gegen die Windungsebenen eines Multiplicators, aber nicht durch dessen Mitte hindurchgezogen wird. Es häuft sich dann die Elektricität an einzelnen Stellen der Kette an, allein es entsteht demohngeachtet, wie die Erfahrung lehrt, in den meisten Fällen sehr bald ein Strom, für welchen das Ohm'sche Gesetz Geltung besitzt. Die anfängliche ungleichförmige Strömung hat übrigens auf elektrodynamische Einwirkungen entweder gar keinen oder nur einen sehr geringen Einfluss, wie Weber aus dem allgemeinen Grundgesetz der Elektricitätslehre bewiesen hat. Bei den bis jetzt beschriebenen und noch zu beschreibenden Inductionsversuchen Webers ist übrigens der Strom jederzeit ein solcher gewesen, dass er einem kurz andauernden constanten Strom gleich zu setzen war, so dass der oft vorkommende Vergleich von constanten und inducirten Strömen nichts Bedenkliches haben kann (s. §. 17).

Die Vorstellung vom Widerstande, welche in §. 4 gegeben wurde, könnte endlich zu dem Bedenken Veranlassung geben, dass die elektrodynamischen Grundgesetze einer Correction bedürften, indem bei ihrer Ableitung aus dem allgemeinen Grundgesetze eine gleichförmige Bewegung der Elektricität in dem Umfange einer Curve supponirt wurde, während in Wirklichkeit die Bewegung der elektrischen Massen in der Nähe ihres Bewegungspunktes eine beschleunigte oder verzögerte sein wird und während die Bahn derselben nicht immer mit der Achse des Stromleiters zusammenfallen kann. Was diesen letzten Punkt anbetrifft, so hat Weber*) gerade wiederum mit *Hülfe seines* elektrischen Grundgesetzes gezeigt, dass die

Annahme solcher Abweichungen keinen Einfluss auf die elektrodynamischen Gesetze haben kann, sobald jene Abweichungen so klein sind, dass in endlicher Zeit nur eine mittlere gleichförmige Verschiebung der Elektricität in der Achse des Stromleiters zu bemerken ist. Die elektrodynamischen Gesetze sind im Gegentheil dieselben, als wenn von vorn herein eine solche gleichförmige Verschiebung in der Achse des Stromleiters angenommen wird. Diese Untersuchungen mögen hier nur im Resultate mitgetheilt werden, um den Umfang dieser Abhandlung nicht allzusehr zu vergrössern.

---

*) Weber, elektrodynamische Maasbestimmungen, Leipzig 1846, S. 160.

(Schluss im nächsten Heft.)

Kleinere Mittheilungen.

XXV. Ueber das bestimmte Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin^p x}{x^q}\,dx.$$

Setzt man in dem vorliegenden Integrale p als positiv voraus, so muss man dafür auch eine ganze Zahl nehmen, weil sonst $\sin^p x$ innerhalb des Integrationsintervalles theils reelle, theils imaginäre Werthe erhalten würde; dagegen kann q eine beliebige positive Grösse bedeuten. Die beiden Fälle, wo q entweder eine ganze Zahl oder von der Form $n+\frac{1}{2}$ ist, sind bereits von Bidone (Turiner Memoiren vom Jahre 1832) untersucht worden; für die noch beschränkendere Annahme, dass $p-q$ eine gerade Zahl ausmacht, hat Lindman (in Grunert's Archiv, Th. 17) zwei Formeln aufgestellt, welche mit den schon früher von Cauchy (im *Journal de l'école polytechnique, cahier* 28, *tome XVII, p.* 170 und 171) gegebenen übereinstimmen; ausserdem scheint aber keine allgemeinere Untersuchung zu existiren und auch in den sehr vollständigen Integraltafeln von Bierens de Haan findet man nur die eben erwähnten Resultate. Demnach dürfte der Nachweis nicht überflüssig sein, dass sich die Sache durch sehr einfache Betrachtungen vollständig erledigen lässt.

I) Es sei zuerst $q=1$. Bei ungeraden p hat man bekanntlich

$$1)\quad \sin^p x = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}}{2^{p-1}}\left[(p)_0 \sin p x - (p)_1 \sin (p-2) x + (p)_2 \sin (p-2) x - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} (p)_{\frac{1}{2}(p-1)} \sin x\right];$$

durch Substitution hiervon und Anwendung der Formel

$$2)\quad \int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}, \quad \beta > 0,$$

erhält man augenblicklich

$$3)\quad \int_0^\infty \frac{\sin^p x}{x}\, dx$$
$$= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}\pi}{2^p}\left[(p)_0 - (p)_1 + (p)_2 - \ldots + (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} (p)_{\frac{1}{2}(p-1)}\right].$$

Bei geraden p führt die unmittelbare Benutzung der Formel

$$4)\quad \sin^p x = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}p}}{2^{p-1}}\left[(p)_0 \cos p x - (p)_1 \cos (p-2) x + (p)_2 \cos (p-2) x - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{\frac{1}{2}p-1} (p)_{\frac{1}{2}p-1} \cos 2x + (-1)^{\frac{1}{2}p} \tfrac{1}{2} (p)_{\frac{1}{2}p}\right]$$

zu einzelnen Integralen von der Gestalt

$$\int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{x}\, dx,$$

und da der Werth eines jeden derselben unendlich ist, so hat das Resultat die unbestimmte Form $\infty - \infty + \infty -$ etc. Um letztere zu vermeiden, setzen wir in No. 4) $x = 0$, multipliciren die entstehende Gleichung

$$0 = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}p}}{2^{p-1}}\left[(p)_0 - (p)_1 + \ldots + (-1)^{\frac{1}{2}p-1}(p)_{\frac{1}{2}p-1} + (-1)^{\frac{1}{2}p} \tfrac{1}{2} (p)_{\frac{1}{2}p}\right]$$

mit $\cos x$ und ziehen das Product von No. 4) ab; es ist dann

$$\sin^p x = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}p}}{2^{p-1}}\left[(p)\{\cos p x - \cos x\} - (p)_1 \{\cos (p-2) x - \cos x\} + \ldots \right.$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{1}{2}p-1} (p)_{\frac{1}{2}p-1} \{\cos 2x - \cos x\}$$
$$\left. + (-1)^{\frac{1}{2}p} \tfrac{1}{2} (p)_{\frac{1}{2}p} \{1 - \cos x\}\right].$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit $\frac{dx}{x}$ und integriren zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = \infty$, so haben wir es mit einzelnen Integralen zu thun, die nach der Formel

$$5)\quad \int_0^\infty \frac{\cos \beta x - \cos x}{x}\, dx = -l\beta,$$

entwickelbar sind. Diese haben endliche Werthe für $\beta = p,\ p-2,\ p-4, \ldots 2$; das letzte Integral aber, worin $\beta = 0$, ist unendlich gross und folglich bei jedem geraden p

$$6)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin^p x}{x}\,dx = \infty\,.$$

II) Es sei zweitens q eine ganze positive Zahl > 1. Durch n-malige Anwendung der theilweisen Integration findet man ganz allgemein (d. h. auch für jedes andere q)

$$7)\quad \int \frac{\sin^p x}{x^q}\,dx = -\frac{\sin^p x}{(q-1)x^{q-1}} - \frac{D\sin^p x}{(q-1)(q-2)x^{q-2}} - \cdots$$
$$\cdots - \frac{D^{n-1}\sin^p x}{(q-1)(q-2)\ldots(q-n)x^{q-n}}$$
$$+ \frac{1}{(q-1)(q-2)\ldots(q-n)}\int \frac{D^n \sin^p x}{x^{q-n}}\,dx\,,$$

wobei nur $n < q$ vorauszusetzen ist. Handelt es sich nun überhaupt um einen Ausdruck von der Form

$$\varphi(x) = \frac{D^{k-1}\sin^p x}{x^{q-k}}\,,\quad q > k\,,$$

so kann man die angedeutete $(k-1)$ malige Differentiation nach x immer leicht ausführen, indem man eine der Formeln 1) und 4) benutzt; jedenfalls erhält man einen Zähler, worin nur die Sinus oder Cosinus der Vielfachen von x vorkommen. Da im Nenner x^{q-k} steht und $q > k$ ist, so folgt für $x = \infty$

$$\varphi(\infty) = 0.$$

Die angedeutete Differentiation lässt sich aber auch auf folgende Weise ausführen. Man setze zunächst für $\sin x$ die Reihe $x - \frac{1}{6}x^3 +$ etc.; die Potenzirung giebt dann ein Resultat von der Form

$$\sin^p x = x^p - Ax^{p+1} + Bx^{p+2} - \ldots$$

und daher ist durch Differentiation und Division mit x^{q-k}

$$\varphi(x) = p(p-1)(p-2)\ldots(p-k+2)x^{p-q+1}$$
$$- Ap(p-1)(p-2)\ldots(p-k+3)x^{p-q+2} + \ldots$$

Unter der Vorausstzung $p \geqq q$ folgt hieraus

$$\varphi(0) = 0.$$

Führt man jetzt in No. 7) die Grenzen $x = \infty$ und $x = 0$ ein, so verschwinden die vom Integralzeichen freien Glieder in beiden Fällen und es bleibt die Gleichung übrig

$$8)\quad \int_0^\infty \frac{\sin^p x}{x^q}\,dx = \frac{1}{(q-1)(q-2)\ldots(q-n)}\int_0^\infty \frac{D^n \sin^p x}{x^{q-n}}\,dx\,,$$

zu deren Gültigkeit nur die Bedingung

$$p \geqq q > n$$

erforderlich ist, ohne dass aber q eine ganze Zahl zu sein braucht.

Bei ganzen q nimmt man am einfachsten $n = q - 1$ und hat

$$9)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin^p x}{x^q}\,dx = \frac{1}{1.2\ldots(q-1)}\int_0^\infty \frac{D^{q-1}\sin^p x}{x}\,dx\,;$$

die Ausführung der auf der rechten Seite angedeuteten Operationen bietet nicht die geringste Schwierigkeit dar, nöthigt aber zur Unterscheidung von vier Fällen.

a) Wenn p und q gleichzeitig ungerade sind, so entwickelt man $D^{q-1} \sin^p x$ mittelst der Formel 1); wegen des geraden $q-1$ erhält man eine Reihe von Sinus, deren Integration nach Formel 2) geschieht. Unter Benützung eines Summenzeichens kann das Resultat in folgender Form dargestellt werden

$$10) \quad \int_0^\infty \frac{\sin^p x}{x^q}\,dx = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(p+q)-1}\pi}{2^p\,\Gamma(q)}\,\Sigma(-1)^k\,(p)_k\,(p-2k)^{q-1},$$

$$p \geqq q, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(p-1).$$

Für $q=1$ kommt man auf die Formel 3) zurück.

b) Sind p und q gleichzeitig gerade, so führt die Anwendung von Formel 4) wieder zu einer Reihe von Sinus und das letzte Glied in No. 4) verschwindet bei der Differentiation; es ergiebt sich

$$11) \quad \int_0^\infty \frac{\sin^p x}{x^q}\,dx = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(p+q)}\pi}{2^p\,\Gamma(q)}\,\Sigma(-1)^k\,(p)_k\,(p-2k)^{q-1}$$

$$p \geqq q, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}p-1.$$

Die Formeln 10) und 11) lassen sich übrigens in eine zusammenziehen, sobald man beachtet, dass der Werth des Integrales immer positiv sein muss; man kann nämlich sagen: wenn die Differenz $p-q$ eine gerade Zahl ausmacht, so ist

$$12) \quad \int_0^\infty \frac{\sin^p x}{x^q}\,dx = \frac{\pm\pi}{2^p\,\Gamma(q)}\,\Sigma(-1)^k(p)_k(p-2k)^{q-1},$$

und zwar gilt das obere oder untere Zeichen, jenachdem der Werth der Werth der Summe, worin $p-2k$ immer positiv bleiben muss, positiv oder negativ ausfällt.

c) Bei ungeradem p und geradem q erhält man aus No. 1)

$$D^{q-1} \sin^p x =$$

$$\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(p+q+1)}}{2^{p-1}}\,[(p)_0\,p^{q-1}\cos px - (p)_1\,(p-2)^{q-1}\cos(p-2)\,x + \ldots].$$

Wie schon gezeigt wurde, verschwindet der Ausdruck linker Hand für $x=0$ und $p \geqq q$, mithin ist

$$0 = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(p+q+1)}}{2^{p-1}}\,[(p)_0 p^{q-1} - (p)_1\,(p-2)^{q-1} + \ldots \pm (p)_{\frac{1}{2}(p-1)}\,1^{q-1}];$$

multiplicirt man diese Gleichung mit $\cos x$ und subtrahirt sie von der vorigen, so hat man

$$D^{q-1} \sin^p x = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(p+q+1)}}{2^{p-1}} [(p)_0 p^{q-1} \{\cos px - \cos x\}$$
$$- (p)_1 (p-2)^{q-1} \{\cos (p-2) x - \cos x\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mp (p)_{\frac{1}{2}(p-3)} 3^{q-1} \{\cos 3x - \cos x\}].$$

Indem man diese Gleichung mit $\frac{dx}{x}$ multiplicirt und nach Formel 5) integrirt, gelangt man zu dem Ergebnisse

$$13)\quad \int_0^\infty \frac{\sin^p x}{x^q} dx = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(p+q-1)}}{2^{p-1}\Gamma(q)} \Sigma (-1)^k (p)_k (p-2k)^{q-1} l (p-2k),$$
$$p \geqq q, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(p-3).$$

d) Bei geradem p und ungeradem $q > 1$ liefert die Formel 4)

$$D^{q-1} \sin^p x =$$
$$\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(p+q-1)}}{2^{p-1}} [(p)_0 p^{q-1} \cos px - (p)_1 (p-2)^{q-1} \cos (p-2) x + \ldots$$
$$\ldots \pm (p)_{\frac{1}{2}p-1} 2^{q-1} \cos 2x]$$

und da die linke Seite für $x=0$ verschwindet, so kann man die vorstehende Gleichung durch die folgende ersetzen

$$D^{q-1} \sin^p x = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(p+q-1)}}{2^{q-1}} [(p)_0 p^{q-1} \{\cos px - \cos x\}$$
$$- (p)_1 (p-2)^{q-1} \{\cos (p-2) x - \cos x\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mp (p)_{\frac{1}{2}p-1} 2^{q-1} \{\cos 2x - \cos x\}];$$

damit gelangt man leicht zu dem Resultate

$$14)\quad \int_0^\infty \frac{\sin^p x}{x^q} dx = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(p+q+1)}}{2^{p-1}\Gamma(q)} \Sigma (-1)^k (p)_k (p-2k)^{q-1} l (p-2k),$$
$$p \geqq q > 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}p - 1.$$

Die Formeln 13) und 14) geben zusammen den Satz: wenn die Differenz $p-q$ eine ungerade Zahl ausmacht, so ist

$$15)\quad \int_0^\infty \frac{\sin^p x}{x^q} dx = \frac{\pm 1}{2^{p-1}\Gamma(q)} \Sigma (-1)^k (p)_k (p-2k)^{q-1} l (p-2k),$$

und zwar gilt das obere oder untere Zeichen, jenachdem der Werth der Summe, worin $p-2k$ positiv bleiben muss, positiv oder negativ ausfällt.

Die Formeln 10), 11), 13) und 14) entwickelt auch Cauchy in der erwähnten Abhandlung aber nach einem anderen, weniger einfachen Verfahren (durch doppelte Integration und nachherige Bildung endlicher Differenzen).

III) Bei ächt gebrochenem q entwickelt man $sin^p x$ wie bisher und benutzt die bekannten Formeln

16) $$\int_0^\infty \frac{sin\,\beta x}{x^q}\,dx = \frac{\pi \beta^{q-1}}{2\,\Gamma(q)\,sin\,\frac{1}{2}q\pi},$$

17) $$\int_0^\infty \frac{cos\,\beta x}{x^q}\,dx = \frac{\pi \beta^{q-1}}{2\,\Gamma(q)\,cos\,\frac{1}{2}q\pi};$$

man gelangt augenblicklich zu dem Resultate, dass bei ungeraden p

18) $$\int_0^\infty \frac{sin^p x}{x^q}\,dx = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}\,\pi}{2^p\,\Gamma(q)\,sin\,\frac{1}{2}q\pi}\,\Sigma(-1)^k\,(p)_k\,(p-2k)^{q-1},$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(p-1),$$

dagegen bei geradem p

19) $$\int_0^\infty \frac{sin^p x}{x^q}\,dx = \infty\,.$$

IV) Wenn endlich q ein unächter Bruch ist, so benutzen wir erst die Reductionsformel 8), indem wir für n die zunächst unter q liegende ganze Zahl nehmen und zur Abkürzung

$$q = n + r$$

setzen, wo r einen positiven ächten Bruck bezeichnet; dies giebt

$$\int_0^\infty \frac{sin^p x}{x^q}\,dx = \frac{1}{(q-1)\,(q-1)\ldots(q-n)}\int_0^\infty \frac{D^n\,sin^p x}{x^r}\,dx.$$

Die Ausführung der angedeuteten Differentiation geschieht hier auf ganz dieselbe Weise, wie in Abschnitt II) und die nachherige Integration wird entweder nach No. 16) oder nach No. 17) bewerkstelligt. Bei gleichzeitig ungeraden p und $n+1$ erhält man

$$\int_0^\infty \frac{sin^p x}{x^q}\,dx = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(p+n-1)}\,\pi}{2^p(q-1)\ldots(q-n)\,\Gamma(r)\,sin\,\frac{1}{2}r\pi}\,\Sigma(-1)^k\,(p)_k\,(p-2k)^{n+r-1},$$

worin wieder $n + r = q$ und

$$(q-1)\ldots(q-n)\,\Gamma(r) = (q-1)\ldots(q-n)\,\Gamma(q-n) = \Gamma(q)$$

gesetzt werden kann. Zu einem ganz ähnlichen Resultate führt die Annahme gleichzeitig gerader p und $n+1$, so dass man überhaupt folgenden Satz aufstellen kann: w e n n $p-(n+1)$ e i n e g e r a d e Z a h l a u s m a c h t, so ist

20) $$\int_0^\infty \frac{sin^p x}{x^q}\,dx = \frac{\pm\pi}{2^p\,\Gamma(q)\,sin\,\frac{1}{2}r\pi}\,\Sigma(-1)^k\,(p)_k\,(p-2k)^{q-1},$$

wobei $2k < p$ bleiben und das Vorzeichen so genommen werden muss, dass der Werth des Integrales positiv ausfällt.

Für die Fälle, wo p und $n+1$ nicht gleichzeitig gerade oder ungerade sind, ändert sich an diesen Betrachtungen so wenig, dass die Angabe des Resultates hinreichen wird. Wenn $p-(n+1)$ eine ungerade Zahl beträgt, so ist

$$21)\quad \int_0^\infty \frac{\sin^p x}{x^q}\,dx = \frac{\pm\pi}{2^p\,\Gamma(q)\cos\frac{1}{2}r\pi}\,\Sigma(-1)^k\,(p)_k\,(p-2k)^{q-1},$$

wobei $2k < p$ bleiben und das Vorzeichen so genommen werden muss, dass das Integral einen positiven Werth erhält.

SCHLÖMILCH.

XXVI. Ueber die Differentiation unendlicher Potenzenreihen. Bekanntlich hat zuerst Abel (*Oeuvres complètes*, *T.* 2, *XXV*) die Bemerkung gemacht, dass man keine Criterien besitzt, um aus der Gleichung

$$f(x) = \varphi(x,1) + \varphi(x,2) + \varphi(x,3) + \ldots \text{ in inf.}$$

sicher auf die Richtigkeit der abgeleiteten Gleichung

$$f'(x) = \varphi'(x,1) + \varphi'(x,2) + \varphi'(x,3) + \ldots \text{ in inf.}$$

schliessen zu können und dass es sogar Fälle giebt, wo $D[\Sigma\varphi(x,n)]$ nicht $=\Sigma[D\varphi(x,n)]$ ist; später hat Dr. Arndt viel Scharfsinn aufgeboten (Grunert's Archiv der Mathem. u. Ph.), um jene Criterien zu finden, und ist zu Ergebnissen gelangt, die namentlich bei Potenzenreihen sich sehr einfach gestalten. Da gerade die letzteren Reihen am häufigsten vorkommen, so ist es vielleicht nicht überflüssig, die Sache etwas elementarer zu behandeln und namentlich den Gebrauch der Integralrechnung zu vermeiden.

Wir setzen zunächst alle Coefficienten der Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

als positiv voraus und denken uns x gleichfalls positiv. Die Reihe convergirt dann sobald

$$Lim\,\frac{a_{n+1}\,x^{n+1}}{a_n\,x^n} = Lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}x\right) < 1$$

oder $x < \lambda$ ist, wenn zur Abkürzung

$$Lim\,\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda$$

gesetzt wird; die Summe der Reihe heisse $f(x)$. Unter denselben Umständen convergirt auch die Reihe

$$1\,a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 + \ldots$$

denn hier ist

$$Lim\,\frac{(n+1)\,a_{n+1}\,x^n}{n\,a_n\,x^{n-1}}=Lim\,\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)x}{\frac{a_n}{a_{n+1}}}=\frac{x}{\lambda}<1,$$

mithin besitzt die Reihe eine endliche Summe, die $\varphi(x)$ heissen möge. Da in den Gleichungen

1) $$f(x)=a_0+a_1\,x+a_2\,x^2+a_3\,x^3+\ldots$$

2) $$\varphi(x)=1\,a_1+2\,a_2\,x+3\,a_3\,x^2+\ldots$$

x zwischen 0 und λ liegt, so lässt sich immer eine willkührliche Zahl h von der Beschaffenheit finden, dass auch $x+h$ zwischen 0 und λ enthalten ist und dann gelten die Gleichungen

3) $$f(x+h)=a_0+a_1\,(x+h)+a_2\,(x+h)^2+\ldots$$

4) $$\varphi(x+h)=1\,a_1+2\,a_2\,(x+h)+3\,a_3\,(x+h)^2+\ldots$$

Von den Gleichungen 1) und 3) nehmen wir die Differenz, dividiren mit h und benutzen rechter Hand den Satz

$$\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}=\psi'(x+\vartheta h),\quad 0<\vartheta<1,$$

oder specieller

$$\frac{(x+h)^m-x^m}{h}=m\,(x+\vartheta_m h)^{m-1},\quad 0<\vartheta_m<1,$$

und erhalten folgende Gleichung

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=1\,a_1+2\,a_2\,(x+\vartheta_2 h)+3\,a_3\,(x+\vartheta_3 h)^2+4\,a_4\,(x+\vartheta_4 h)^3+\ldots$$

Bei positiven h ist nun die Summe der rechts stehenden Reihe grösser als

$$1\,a_1+2\,a_2\,x+3\,a_3\,x^2+\ldots=\varphi(x),$$

dagegen kleiner als

$$1\,a_1+2\,a_2\,(x+h)+3\,a_3\,(x+h)^2+\ldots=\varphi(x+h),$$

mithin haben wir zusammen

$$\varphi(x)<\frac{f(x+h)-f(x)}{h}<\varphi(x+h);$$

dagegen bei negativen h

$$\varphi(x)>\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>\varphi(x+h).$$

Aus beiden Ungleichungen folgt durch Uebergang zur Grenze für verschwindende h $\qquad \varphi(x)=f'(x);$

unter den genannten Voraussetzungen ist also die Differentiation der unendlichen Reihe ohne Weiteres erlaubt.

Es kann sich in speciellen Fällen treffen, dass für $x=\lambda$ beide Reihen ihre Convergenz behalten; die vorige Betrachtung bleibt dann wörtlich dieselbe, nur muss man h negativ und seinen absoluten Werth $<\lambda$ wählen, um das Convergenzintervall nicht zu überschreiten.

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall, wo die Reihe 1) Glieder von verschiedenen Vorzeichen besitzt und denken uns dabei x immer als posi-

tiv, indem wir die durch negative x entstehenden Zeichenveränderungen auf Rechnung der Coefficienten schreiben. Werden nun alle positiven Glieder zu einer Reihe und ebenso alle negativen Glieder zu einer Reihe zusammengefasst, so erscheint $f(x)$ als die Differenz zweier Reihen, von denen jede nur positive Glieder enthält. Diese Reihen convergiren aber, wenn der absolute Werth von $Lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}x\right)$ weniger als die Einheit, oder x weniger als der absolute Werth von λ beträgt, mithin besitzen jene Reihen endliche Summen $f_1(x)$ und $f_2(x)$, so dass

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x).$$

Dasselbe gilt für die derivirte Reihe und man hat analog

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x).$$

Bei der Differentiation liefert, wegen des positiven x, jedes Glied in $f(x)$ ein mit demselben Zeichen versehenes Glied in $\varphi(x)$, mithin besteht $\varphi_1(x)$ aus den Differentialquotienten aller in $f_1(x)$ vorkommenden Glieder und ebenso $\varphi_2(x)$ aus den Differentialquotienten aller Glieder von $f_2(x)$. Nun ist nach dem Vorigen

$$\varphi_1(x) = f_1'(x), \quad \varphi_2(x) = f_2'(x),$$

$$\varphi(x) = f_1'(x) - f_2'(x) = \frac{d\,[f_1(x) - f_2(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx};$$

demnach bleibt die Differentiation einer jeden Potenzenreihe so lange erlaubt, als sie selbst und die derivirte Reihe gleichzeitig convergiren.

SCHLÖMILCH.

XXVII. Ueber den Integralsinus und Integralcosinus. Von den beiden Functionen $Si(x)$ und $Ci(x)$, welche durch die Gleichungen

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx, \qquad Ci(x) = \int_\infty^x \frac{\cos x}{x}\,dx$$

$$\frac{d\,Si(x)}{dx} = \frac{\sin x}{x}, \qquad \frac{d\,Ci(x)}{dx} = \frac{\cos x}{x}$$

definirt sind, besitzt die erste die Eigenschaft

$$\frac{\pi}{2}\,Si(x) = \frac{Si(\pi)}{2}\,x + \frac{Si(2\pi)}{2}\sin x + \frac{Si(3\pi) - Si(\pi)}{4}\sin 2x + \frac{Si(4\pi) - Si(2\pi)}{6}\sin 3x + \ldots,$$

welche indessen nur für $\pi \geqq x > 0$ gilt und unter dieser Beschränkung $Si(x)$ berechnen lehrt, wenn $Si(\pi)$, $Si(2\pi)$, $Si(3\pi)$ etc. bekannt sind (Literaturzeitung, Jahrg. II, S. 101). Dieser Satz ist aber nur ein speciellerer Fall des allgemeineren, dass sich für jedes x sowohl $Si(x)$ als $Ci(x)$ durch $Si(\pi)$, $Si(2\pi)$ etc. ausdrücken lässt; dies wollen wir im folgenden zeigen.

Wir verstehen unter k eine ganze positive Zahl, unter z eine zwischen 0 und π enthaltene Variabele, und setzen

$$Si(kz) = A_1 \sin z + A_2 \sin 2z + A_3 \sin 3z + \ldots;$$

dann ist bekanntlich

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi Si(kz) \sin nz \, dz.$$

Nun giebt die theilweise unbestimmte Integration

$$\int Si(kz) \sin nz \, dz = - Si(kz) \frac{\cos nz}{n} + \int \frac{\sin kz}{z} \cdot \frac{\cos nz}{n} dz$$

$$= - Si(kz) \frac{\cos nz}{n} + \frac{1}{2n}\int \frac{\sin(k+n)z + \sin(k-n)z}{z} dz,$$

folglich

$$A_n = \frac{2}{\pi} Si(kz) \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{1}{n\pi}\left[\int_0^\pi \frac{\sin(k+n)z}{z} dz + \int_0^\pi \frac{\sin(k-n)z}{z} dz\right];$$

setzt man rechter Hand in dem ersten Integrale $(k+n)z$, im zweiten $(k-n)z$ gleich einer neuen Variabelen, so erhält man

$$A_n = \frac{2}{\pi} Si(k\pi) \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{Si[(k+n)\pi] + Si[(k-n)\pi]}{n\pi}.$$

Die gesuchte Entwickelung ist daher

$$Si(kz) = \frac{2}{\pi} Si(k\pi) \left(\frac{\sin z}{1} - \frac{\sin 2z}{2} + \frac{\sin 3z}{3} - \ldots\right)$$

$$+ \frac{Si(k+1)\pi + Si(k-1)\pi}{\pi} \sin z + \frac{Si(k+2)\pi + Si(k-2)\pi}{2\pi} \sin 2z + \ldots$$

Für die Summe der eingeklammerten Reihe hat man bekanntlich $\frac{1}{2}z$; bezeichnet man nachher kz mit x, so gelangt man zu folgender Formel

$$\pi\, Si(x) = \frac{Si(k\pi)}{k} x + \frac{Si(k+1)\pi + Si(k-1)\pi}{1} \sin \frac{x}{k}$$

$$+ \frac{Si(k+2)\pi + Si(k-2)\pi}{2} \sin \frac{2x}{k} + \ldots.$$

worin x der Bedingung $\pi \geqq \frac{x}{k} \geqq 0$ unterworfen ist. Bei gegebenen x muss hiernach k gewählt und zwar $\geqq \frac{x}{\pi}$ genommen werden. Für $k = 1$ kommt man auf die anfangs erwähnte Formel zurück, wenn man beachtet, dass $Si(0) = 0$ und $Si(-u) = - Si(u)$ ist.

Zur Entwickelung des Integralcosinus führt ein ganz ähnlicher Weg, nämlich

$$Ci(kz) = A_1 + A_1 \cos z + A_1 \cos 2z + A_3 \cos 3z + \ldots$$

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi Ci(kz)\, dz, \quad A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi Ci(kz) \cos nz \, dz.$$

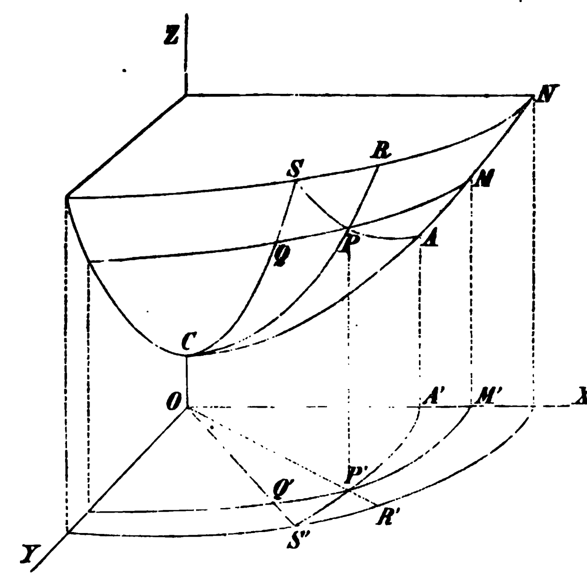
Bei der grossen Leichtigkeit der Rechnung wird die Angabe des Endresultates hinreichen; für $kz = x$ erhält man

$$2)\quad \pi\, Ci(x) = \pi\, Ci(k\pi) - \frac{Si(k+1)\pi - Si(k-1)\pi}{1} \cos\frac{x}{k} - \frac{Si(k+2)\pi - Si(k-2)\pi}{2} \cos\frac{2x}{k} - \ldots,$$

wobei wieder $k \geqq \frac{x}{\pi}$ sein muss.

SCHLÖMILCH.

XXVIII. Ueber Loxodromen auf Umdrehungsflächen. Die Drehungsachse sei die Achse der z, die Gleichung der rotirenden Curve



$$MM' = \varphi(OM')$$

oder

$$z = \varphi(r),$$

ferner APS die Loxodrome, $A'P'S'$ ihre Horizontalprojection, worin ein Punkt P' durch die Polarcoordinaten

$$OP' = OM' = r,$$
$$\angle M'O'P' = \vartheta$$

bestimmt wird, endlich γ der constante Winkel, unter welchem die Loxodrome die Meridiane schneidet; sind nun MPQ und NRS zwei unendlich nahe Parallelkreise, CPR und CQS zwei unendlich nahe Meridiane, so hat man die Bedingung

$$\cot\gamma = \frac{PR}{RS} = \frac{MN}{PQ} = \frac{\sqrt{dr^2 + dz^2}}{P'Q'} = \frac{dr\sqrt{1+\varphi'(r)^2}}{r\,d\vartheta},$$

aus welcher sich durch Sonderung der Variabelen und Integration ergiebt

$$m\vartheta = \int \frac{dr}{r}\sqrt{1+\varphi'(r)^2} + Const., \quad m = \cot\gamma.$$

Dies ist die Gleichung der Horizontalprojection der Loxodrome.

Für den Kegel ist $z = r\tan\alpha$, mithin, wenn die Loxodrome mit dem Halbmesser r_0 anfängt,

$$m\vartheta = \sec\alpha \,.\, l\left(\frac{r}{r_0}\right) \text{ oder } r = r_0 e^{n\vartheta},\quad n = \cos\alpha\cot\gamma.$$

Für das Paraboloid ist $z = \frac{r^2}{2c}$ also

$$m\vartheta = \frac{\sqrt{c^2+r^2}}{c} - \tfrac{1}{2} l\left(\frac{\sqrt{c^2+r^2}+c}{\sqrt{c^2+r^2}-c}\right) + Const.$$

Bei dem **abgeplatteten Ellipsoid** fange die Loxodrome im Aequator an; es ist für diesen Fall

$$z = \frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2},\quad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a},$$

$$n\vartheta = l\left(\frac{\sqrt{a^2-\varepsilon^2 r^2}+\sqrt{a^2-r^2}}{\sqrt{a^2-\varepsilon^2 r^2}-\sqrt{a^2-r^2}}\right) - \varepsilon l\left(\frac{\sqrt{a^2-\varepsilon^2 r^2}+\varepsilon\sqrt{a^2-r^2}}{\sqrt{a^2-\varepsilon^2 r^2}-\varepsilon\sqrt{a^2-r^2}}\right),$$

$$n = 2m = 2\cot\gamma.$$

Für die **Kugel** wird einfacher $\varepsilon = 0$,

$$m\vartheta = \tfrac{1}{2} l\left(\frac{a+\sqrt{a^2-r^2}}{a-\sqrt{a^2-r^2}}\right) = l\left(\frac{a+\sqrt{a^2-r^2}}{r}\right)$$

und umgekehrt

$$r = \frac{a}{\frac{1}{2}(e^{m\vartheta}+e^{-m\vartheta})} = \frac{a}{cshp\,(m\vartheta)}.$$

Für das **semicubische Paraboloid** ist

$$z = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{(r-a)^3}{a}}$$

$$m\vartheta = 2\left(\sqrt{\frac{r}{a}}-1\right) \text{ oder } r = a\,(1+\tfrac{1}{2}m\vartheta)^2,$$

wobei die Loxodrome mit $r = a$ anfängt.

Ein **cycloidisches Conoid** sei durch Umdrehung einer Cycloide um ihre Basis entstanden; man hat in diesem Falle, wenn a den Radius des erzeugenden Kreises und ω den Wälzungswinkel bezeichnet,

$$z = a\,(\omega - \sin\omega),\quad r = a\,(1-\cos\omega)$$

$$\varphi'(r) = \frac{dz}{dr} = \frac{1-\cos\omega}{\sin\omega} = \sqrt{\frac{r}{2a-r}},$$

mithin, wenn die Loxodrome im Aequator anfängt,

$$m\vartheta = l\left(\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{2a-r}}{\sqrt{2a}+\sqrt{2a-r}}\right)$$

und umgekehrt für $m = 2n$

$$r = \frac{2a}{\frac{1}{4}(e^{n\vartheta}+e^{-n\vartheta})^2} = \frac{2a}{cs^2hp\,(n\vartheta)},$$

Für das **Kettenconoid** ist

$$z = a\,l\left(\frac{r+\sqrt{r^2-a^2}}{a}\right),$$

folglich, wenn die Loxodrome mit $r = a$ anfängt,

$$m\vartheta = l\left(\frac{r+\sqrt{r^2-a^2}}{a}\right);$$

hier findet also die Eigenthümlichkeit statt, dass $am\vartheta = z$ ist.

(Briefliche Mittheilung von Professor Dr. JUNGE in Freiberg.)

IXXX. Mechanische Aufgabe. Ein schwerer Punkt wird unter dem Elevationswinkel ε in die Höhe geworfen, seine Anfangsgeschwindigkeit ist c; während seiner Bewegung wirkt 1) die Schwere auf ihn, deren Beschleunigung g ist; 2) eine constante Kraft, welche ihm in jedem Augenblicke in der Richtung der Tangente seiner Trajectorie einen der Beschleunigung γ entsprechenden Geschwindigkeitszuwachs ertheilt. Es ist die Gleichung der Trajectorie des Massenpunktes aufzufinden.

Auf diese Aufgabe bin ich bei dem Versuche gekommen, die Bewegungsgesetze einer Rakete zu bestimmen, welche schief in die Höhe steigt. Bei der Rakete wirkt in der Richtung der Bahntangente oder nahezu in deren Richtung eine Kraft, von welcher man wohl annehmen kann, dass sie so ziemlich constant bleibt; der Umstand jedoch, dass die Masse der Rakete durch Verbrennung des Treibsatzes während der Bewegung um Beträchtliches abnimmt, bewirkt, dass die Beschleunigung der treibenden Kraft immer zunimmt. Da ich diese complicirtere Aufgabe nicht lösen konnte, versuchte ich mich zuerst an der oben mitgetheilten einfachern Aufgabe, deren Auflösung ich auf folgende Weise fand.

Der Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems wurde in den Ausgangspunkt der Bewegung des schweren Punktes gelegt, die x-Achse horizontal in der Ebene der Flugbahn angenommen, die Abscissen wurden nach der Seite der Bewegung, die Ordinaten nach oben positiv gerechnet. Die Differentialgleichungen der Bewegungen sind in diesem Falle:

$$1)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\gamma}{\sqrt{1+y'^2}},$$

$$2)\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\gamma y'}{\sqrt{1+y'^2}}-g,$$

wenn man mit y' den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ bezeichnet. Man kann beide Gleichungen in eine einzige vereinigen, nämlich in:

$$3)\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=y'\frac{d^2x}{dt^2}-g.$$

Durch nochmalige Differentiation von $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=y'\frac{dx}{dt}$ erhält man hierauf:

$$4)\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=y''\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+y'\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Der Vergleich von 3) und 4) führt nun zu der Beziehung:

$$5)\qquad y''\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=-g.$$

Indem man nun mit 5) in 1) dividirt, erhält man eine Gleichung, welche sich integriren lässt und von deren Integral aus man leicht dazu gelangt, x, y, die Geschwindigkeit v, den Bogen s und die Zeit t als Function von

$y' = \frac{dy}{dx}$ auszudrücken. Der Quotient von 5) und 1) ist nun:

$$6)\qquad \frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = -\frac{\gamma y''}{g\sqrt{1+y'^2}} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Die nachfolgenden Integrationen führen zu einfacheren Ausdrücken durch die Substitution:

$$y' = \frac{z^2-1}{2z} = tg\,\tau,$$

wenn man mit τ den Tangentialwinkel bezeichnet. Dieser Substitution entsprechen die Werthe:

$$\sin\tau = \frac{z^2-1}{z^2+1},\quad \cos\tau = \frac{2z}{z^2+1},\quad z = cotg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\tau}{2}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \cos\tau = \frac{2z}{z^2+1},\quad y'' = \frac{dy'}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}\,\frac{z^2+1}{z^2} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Berücksichtigt man diese Werthe, so erhält man aus 6):

$$7)\qquad \frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = -\frac{\gamma}{g}\,\frac{\frac{dz}{dx}}{z} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{\gamma}{g}\,\frac{\frac{dz}{dt}}{z};$$

das Integral dieser Gleichung ist:

$$8)\qquad l.\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\frac{\gamma}{g}\,l\,z^2 - \frac{\gamma}{g}\,l\,C^2,$$

wobei C die Integrationsconstante bedeutet. Berücksichtigt man, dass für $t=0$ der Werth von $\frac{dx}{dt} = c\cos\varepsilon$ und $z = cotg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ ist, so erhält man:

$$9)\qquad \frac{dx}{dt} = c\cos\varepsilon \cdot \left\{\frac{tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\tau}{2}\right)}\right\}^{-\frac{\gamma}{g}}.$$

Man führt nun zur Abkürzung dieses und der folgenden Ausdrücke mit Vortheil folgende Constante R ein, die, wie sich später ergeben wird, auch eine geometrische Bedeutung besitzt:

$$10)\qquad R = \frac{c^2\cos^2\varepsilon}{g}\left[cotg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{g}\right)\right]^{\frac{2\gamma}{g}}.$$

Der Ausdruck für die horizontale Geschwindigkeit erscheint dann in der Form:

$$11)\qquad \frac{dx}{dt} = z^{-\frac{\gamma}{g}}\sqrt{Rg}.$$

Ferner ist:

$$12)\qquad v=\frac{dx}{dt}\cdot\frac{1}{\cos\tau}=\tfrac{1}{2}\sqrt{Rg}\left(z^{1-\frac{\gamma}{g}}+z^{-1-\frac{\gamma}{g}}\right).$$

Führt man nun 11) und $y''=\frac{1}{2}\frac{z^2+1}{z^2}\frac{dz}{dx}$ in 5) ein, so kommt:

$$13)\qquad \frac{dx}{dz}=-\frac{R}{2}\left(z^{-\frac{2\gamma}{g}}+z^{-2-\frac{2\gamma}{g}}\right)$$

und durch Integration erhält man:

$$14)\qquad x=\frac{R}{2}\int_{\cot g\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\tau}{2}\right)}^{\cot g\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\left(z^{-\frac{2\gamma}{g}}+z^{-2-\frac{2\gamma}{g}}\right)dz.$$

Multiplicirt man 13) mit $\frac{dy}{dx}=\frac{z^2-1}{2z}$, so erhält man $\frac{dy}{dz}$ und sodann d
Integration:

$$15)\qquad y=\frac{R}{4}\int_{\cot g\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\tau}{2}\right)}^{\cot g\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\left(z^{1-\frac{2\gamma}{g}}-z^{-3-\frac{2\gamma}{g}}\right)dz.$$

Multiplicirt man 13) mit $\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{z^2+1}{2z}$ und integrirt, so
dies:

$$16)\qquad s=\frac{R}{4}\int_{\cot g\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\tau}{2}\right)}^{\cot g\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\left(z^{1-\frac{2\gamma}{g}}+2z^{-1-\frac{2\gamma}{g}}+z^{-3-\frac{2\gamma}{g}}\right)dz$$

Multiplicirt man endlich 13) mit $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\sqrt{Rg}}z^{\frac{\gamma}{g}}$, so ergiebt die nachfol
Integration:

$$17)\qquad t=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}\int_{\cot g\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\tau}{2}\right)}^{\cot g\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\left(z^{-\frac{\gamma}{g}}+z^{-\frac{\gamma}{g}-2}\right)dz.$$

Die Grössen x, y, v, s, t können demnach sämmtlich als Functionen ausgedrückt werden, so dass man ihre correspondirenden Werthe bere und hierauf auch die Curve construiren kann.

Die Bedeutung der Constanten R ergiebt sich, indem man den K *mungshalbmesser* berechnet, dessen Ausdruck bekanntlich ist:

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Man erhält unter Berücksichtigung von 5):

$$18) \qquad \varrho = R \, . \, \frac{\left[tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\tau}{2}\right)\right]^{\frac{2\gamma}{g}}}{cos^3\tau}.$$

Am Scheitel der Curve ist $\tau = 0$, desshalb $\varrho = R$, d. h. die Constante R ist der Krümmungshalbmesser am Scheitel der Curve.

Besonders hervorzuhebende Eigenschaften habe ich übrigens an vorstehender Curve nicht auffinden können, weshalb ich auch auf eine Discussion derselben nicht weiter eingehe. Dr. EMIL KAHL.

XXX. Du Bois-Reymond's Versuche über die Polarisation der Elektroden. Du Bois - Reymond, dem die Elektrophysiologie zum grössten Theil ihre rasche Entwickelung verdankt, hat umfängliche Versuchsreihen zur Prüfung einer von Jules Regnauld 1854, später auch von Matteucci in ähnlicher Weise gemachten Angabe über unpolarisirbare Elektroden angestellt (Monatsberichte der K. Pr. Akademie der Wissensch. 1859, S. 443). Indem wir einen kurzen Bericht über die Versuche Du Bois-Reymond's geben, versäumen wir nicht, alle Freunde elektrophysiologischer und rein elektrischer Untersuchungen auf die gediegene Arbeit des berühmten Forschers aufmerksam zu machen. Ganz besonderes Interesse würde das Durchlesen der oben citirten Abhandlung denen gewähren, die sich selbst mit Versuchen über elektrische Polarisation beschäftigen und denen durch vorliegenden sehr kurz gefassten Auszug nicht hinreichend gedient sein würde.

Jules Regnauld hatte 1854 angegeben, dass es ihm gelungen sei, dadurch unpolarisirbare Elektroden herzustellen, dass er Platten aus reinem, mehrmals destillirtem Zink in eine Lösung von reinem schwefelsauren Zinkoxyd in destillirtem Wasser eintauchte. Die Lösung sollte von der Concentration sein, bei welcher sie das Maximum ihrer Leitungsfähigkeit besitzt. Nach de la Rive findet dieses statt, sobald man das Volum der gesättigten Zinkvitriollösung durch Hinzugiessen von destillirtem Wasser verdoppelt. Später hatte Matteucci unverquicktes oder verquicktes reines Zink in reiner gesättigter Zinkvitriollösung als unpolarisirbar anempfohlen. — Da die Ausmittelung unpolarisirbarer Elektroden namentlich für die Nachweisung von Muskel- und Nervenströmen ein wichtiges Moment ist, so erregten *Regnauld's* und Matteucci's Angaben das Interesse Du Bois-

Reymond's in hohem Grade. Sie forderten ihn um so mehr zu neuen Versuchen auf, als Helmholtz gefunden hatte, dass Kupfer in Kupfervitriollösung, sowie Silber in Cyansilberkaliumlösung nicht frei von Polarisation sind und da er selbst käufliches Zink in Zinkvitriollösung zwar schwächer, aber viel ungleichmässiger polarisirt gefunden hatte, als Platin in Kochsalzlösung.

Der Apparat Du Bois-Reymond's, von dem wir hier eine detaillirte Beschreibung nicht geben können, gestattet 1) einen primären Strom durch die zu untersuchende Combination, z. B. durch Zinkelektroden in Zinkvitriollösung, hindurchzuleiten und dessen Stärke zu messen; 2) die Intensität des etwa sich zeigenden Polarisationsstromes mit Hülfe eines Multiplicators, ziemlich von der Empfindlichkeit eines Nervenmultiplicators zu bestimmen. Meist wurde durch eine selbstthätige Wippe bei dem Aufschwunge derselben der primäre Strom einen kurzen Moment durch die Elektroden (Schliessungskreis A) geleitet, bei dem Rückschwunge wurde der primäre Strom ausgeschlossen, dafür aber der von den Elektroden ausgehende Polarisationsstrom für kurze Zeit in einen andern Schliessungskreis B eingeschaltet. Bei dem einen Versuche war das Galvanometer nur in A eingeschaltet, so dass die Ablenkung desselben ganz allein vom ursprünglichen Strome herrührte, bei einem zweiten gleich darauf folgenden Versuche war dasselbe Galvanometer nur in B eingeschaltet, die Ablenkung desselben rührte dann ganz allein vom Polarisationsstrome her. Es war bei den Versuchen dafür Sorge getragen, dass, mochte nun das Galvanometer in A oder B eingeschlossen sein, doch in beiden Schliessungskreissen genau derselbe Widerstand vorhanden war. — Ein Paar andre Beobachtungsarten von Du Bois-Reymond, deren er sich jedoch seltener bediente, als der beschriebenen, werden hier der Kürze wegen besser weggelassen.

Der Quotient, den man erhält, wenn man mit der Intensität des ursprünglichen Stromes in die des dadurch erregten Polarisationsstromes dividirt, wird von Du Bois-Reymond der Polarisationscoefficient genannt. Da die Intensitäten auf dem im Vorigen beschriebenen Wege erhalten worden sind, so hängt der Polarisationscoefficient auch noch von den Zeitverhältnissen der angewendeten Wippe ab.

Zur Prüfung einiger gewöhnlicher, oft untersuchter Combinationen wandte Du Bois-Reymond meist Drähte von 0,5 Millim. Durchmesser, 1 Centimeter Abstand und 2 Centimeter Tiefe des Eintauchens an und fand folgende Polarisationscoefficienten (α), wobei die Ströme gewöhnlich von der Ordnung der Muskelströme waren:

1) Platin in verdünnter Schwefelsäure ($SO_3 . HO : HO = 1 : 5$ dem Volum nach) oder in gesättigter Kochsalzlösung $\alpha = 1$.
2) Platin in rauchender Salpetersäure (bei 26,9° C. 1,49 spec. Gew.). Bei Strömen von der Ordnung des Muskelstromes $\alpha = \frac{1}{33}$.

3) Silber in gesättigter Lösung von salpetersaurem Silberoxyd, bei Strömen von der Ordnung des Muskelstromes $\alpha = \frac{1}{1,6}$, bei stärkeren Strömen nahm α bedeutend ab und sank bis $\frac{1}{138}$.

4) Kupfer in schwefelsaurer Kupferoxyd-Lösung, α sehr klein und nur bei sehr schwachen Strömen merklich.

5) Käufliches Zink in käuflicher Zinklösung $\alpha = \frac{1}{5,5}$ bis $\frac{1}{2,3}$ (Ordnung des Muskelstromes).

6) Reines Zink in reiner Zinklösung $\alpha = \frac{1}{2,9}$ (Ordnung des Muskelstromes).

7) Eisen in Zinklösung, Ordnung des Muskelstromes $\alpha = \frac{1}{1,7}, \frac{1}{2,6}$.

8) Verquicktes Zink in Chlorcaliumlösung verhält sich im Widerspruche mit Matteucci's Angaben ungleichartig und ergab bei Strömen von der Ordnung des Muskelstromes $\alpha = \frac{1}{4,1}$.

9) Verquicktes Zink verhielt sich in verdünnter Schwefelsäure in Serum von Pferdeblut und in Brunnenwasser so ungleichartig, dass eine Bestimmung von α nicht möglich war.

10) Verquicktes Zink in gesättigter schwefelsaurer Zinklösung verhielt sich schon nach wenigen Augenblicken am Nervenmultiplicator völlig gleichartig, d. h. wurden die Elektroden von verquicktem Zink mit den Enden des Nervenmultiplicators verbunden, so gelangte die Nadel nach einigen Schwankungen sehr bald wieder auf den Nullpunkt zurück und blieb unverrückt auf demselben stehen, selbst wenn die eine Elektrode etwas erschüttert wurde. Diese Gleichartigkeit findet selbst statt, wenn man käufliches Zink mit unreinem Quecksilber und roher Salzsäure verquickt und nach gehörigem Abwaschen und Abspülen in käufliche Zinklösung bringt. Bei Drähten von Zink und bei Strömen von der Ordnung des Muskelstromes wurde gar keine Polarisation bemerkt, bei stärkeren Strömen wurde dieselbe noch äusserst klein befunden $\alpha = \frac{1}{5370}$. Als Zinkplatten von 6 — 7 Quadratcentimeter Oberfläche benutzt wurden, war die Polarisation bei jeder Stärke des Stromes unmerklich. Um nun auch den etwaigen Einwurf beantworten zu können, dass α bei dieser Combination so gering ausgefallen sein möge, weil nach dem Aufhören des primären Stromes die Stärke der Polarisation sehr rasch abgenommen habe, untersuchte Du Bois-Reymond die Polarisation bei ununterbroche-

nem ursprünglichen Strome, indem er durch gesättigte schwefelsaure Zinklösung einen starken primären Strom hindurchleitete und nun nachsah, ob nach dem Einsetzen von mehr verquickten Zinkplatten, die den Querschnitt des Gefässes mit Zinkvitriollösung vollkommen ausfüllten, eine Stromesänderung am eingeschalteten Galvanometer zu erkennen war. Bei allen Versuchen dieser Art ergab sich, dass die Polarisation der Zinkelektroden höchstens nur spurweise auftrat. Verquicktes Zink lieferte in Zinkvitriollösung vom Maximum der Leitungsfähigkeit ein etwas grösseres α, als in gesättigter Zinklösung.

11) Verquicktes Zink in Chlorzinklösung verhielt sich etwas minder gleichartig, als in Zinkvitriollösung, während α ungefähr ebenso klein war, als in Zinkvitriollösung.

Aus alledem geht hervor, dass Elektroden von verquicktem Zink in gesättigter Zinkvitriollösung ihrer Unpolarisirbarkeit wegen bei Reizversuchen den Vorzug vor allen anderen Combinationen verdienen, vorausgesetzt, dass sich durch die Berührung der Zinklösung und der thierischen Gewebe nicht etwa neue Uebelstände entwickeln. Ueber die Ursache der Unpolarisirbarkeit von verquickten Zinkelektroden lässt sich augenblicklich etwas Bestimmtes noch nicht sagen. Dr. Emil Kahl.

XI.

Die Fundamente der Elektrodynamik,

nach den neuesten Untersuchungen bearbeitet

von Dr. Emil Kahl.

(Schluss.)

§. 12. Das Maas für die freie Elektricität.

Dem Früheren gemäss ist das elektrische Grundgesetz von Weber als richtig und als Grundlage sämmtlicher elektrodynamischer Fernewirkungen zu betrachten. Dieses Gesetz nun enthält eine Constante a, deren Grösse aus dem Gesetze Ampère's wohl bestimmt werden kann, sobald die Stromintensitäten i und i', in magnetischem Maase ausgedrückt, aus letzterem Gesetze mit in ersteres herübergenommen werden. Vergleicht man nämlich die Gleichung II) in §. 2 mit der Gleichung 5) in §. 6, so erhält man $a^2 = \frac{1}{8}$, der entsprechende Ausdruck vom allgemeinen Grundgesetze Weber's ist demnach

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{ids}{u} \cdot \frac{i'ds'}{u'} \left[1 - \frac{1}{8}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{r}{4}\frac{d^2r}{dt^2}\right].$$

Hierin sind die Längenmaase in Millimetern und i und i' in magnetischen Stromintensitätseinheiten auszudrücken. Diese Constantenbestimmung genügt für alle Fälle, in denen die Wirkungen von Strömen, deren Intensität nach magnetischem Maase gemessen ist, zu bestimmen ist, allein in dem Falle reicht sie nicht mehr aus, wo man statisch aufgehäufte Elektricität durch einen Leitungsdraht abfliessen lässt. Die Menge statisch aufgehäufter Elektricität lässt sich nämlich am besten, wie die Menge des Magnetismus, aus den Fernewirkungen, die sie hervorbringt, bestimmen; so lange nun der Versuch noch nicht gemacht war, eine gemessene Menge statisch aufgehäufter Elektricität durch einen Multiplicatordraht abfliessen zu lassen und die elektrodynamische Wirkung derselben auf ein Magnetometer oder Dynamometer zu messen, konnte von der Bestimmung der Constanten a in einer für alle Fälle genügenden Weise nicht die Rede sein. Man erkennt ferner: sobald a bestimmt ist für den Fall, dass die auf einander wirkenden elektrischen Massen e und e' in einem elektrostatischen

Maase der Elektricität ausgedrückt werden, so kann man diejenigen Mengen Elektricität leicht bestimmen, die bei einem Strome von der magnetischen Stromintensität 1 in jeder Secunde durch den Querschnitt der Kette fliessen. Denn es lässt sich einerseits aus Ampère's Gesetz II., S. 2, die elektrodynamische Fernewirkung eines Stromelementes auf ein anderes berechnen, wenn beide die magnetische Stromintensität 1 besitzen; andererseits lässt sich aus dem vollständig bestimmten elektrischen Grundgesetz die Intensität des im vorigen Falle in beiden Elementen fliessenden Stromes in elektrostatischem Maase berechnen, sobald die Fernewirkung der Stromelemente dieselbe Grösse haben soll, als im vorigen Falle, wobei in beiden Fällen natürlich die Lage der Elemente gegen einander genau dieselbe sein muss.

Die Bestimmung der Constanten a in dem im Vorigen angegebenen Sinne ist durch Kohlrausch und Weber ausgeführt worden*). Hierbei möge die Bemerkung eingeschalten werden, — ehe die Arbeiten der genannten Gelehrten weiter besprochen werden, — dass künftighin gewöhnlich statt der Constanten a eine andere Constante c, die mit der vorigen in der Beziehung $c = \frac{1}{a}$ steht, in das allgemeine Grundgesetz eingeführt werden wird, so dass

$$\frac{ee'}{r^2}\left\{1 - a^2\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - 2r\frac{d^2r}{dt^2}\right]\right\} = \frac{ee'}{r^2}\left\{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - 2r\frac{d^2r}{dt^2}\right]\right\}.$$

Die Constante c hat nämlich eine sehr einfache Bedeutung; man denke sich zwei elektrische Massen, deren relative Beschleunigung der Null gleich ist, während ihre relative Geschwindigkeit demgemäs constant ist. Wenn nun $\frac{dr}{dt} = c$, so hört jede Einwirkung der beiden elektrischen Massen auf einander auf. Es ist daher c die constante relative Geschwindigkeit, mit welcher beide elektrischen Massen bewegt werden müssen, damit sie gar keine elektrische Wirkung mehr auf einander ausüben. Das von Weber und Kohlrausch gewählte sogenannte mechanische Maas der Elektricität ist dem absoluten Maase des Magnetismus ganz gleich. Man denke sich nämlich in zwei körperlichen Massenpunkten A und B, welche in einer Entfernung von 1 Millimeter von einander durch eine geeignete Vorrichtung festgehalten werden, in jedem eine und dieselbe Menge positiver oder negativer Elektricität concentrirt. Die elektrischen Massen üben hierbei eine abstossende Kraft auf einander aus, ohne dass sie Bewegung veranlassen können, weil die elektrischen Massen wiederum von den körperlichen Massen festgehalten werden. Ist nun hierbei der Druck, welchen beide elektrische Massen auf einander ausüben, und welche auf die körperlichen Massen, an denen sie haften, übertragen wird, gleich einer absoluten Krafteinheit, so ist die Menge der in A oder in B enthaltenen Elektricität der

*) Abhandl. der math.-physik. Classe der k. sächs. Gesellsch. der Wissensch. Bd. III. S. 219.

Masseinheit des elektrischen Fluidums gleich. Ist in A die Maaseinheit (das Maas) positiver Elektricität, in B zugleich ein Maas positiver und ein Maas negativer Elektricität concentrirt, so kann B keine Einwirkung von A erleiden; daher wird von A aus gegen B die anziehende Kraft 1 ausgeübt, sobald in A die elektrische Menge $+1$, in B die elektrische Menge -1 ist. — Als Einheit der absoluten Kraft ist hier, wie beim Magnetismus, diejenige Kraft anzunehmen, welche in einer Secunde mittlerer Zeit der Masse von 1 Milligramm die Beschleunigung von 1 Millimeter ertheilt.

§. 13. Bestimmung der Constanten c im elektrischen Grundgesetze durch Kohlrausch und Weber.

Die Methode, welche die genannten Gelehrten angewendet haben, war im Wesentlichen folgende:

a) Es ist zunächst die Menge positiver Elektricität nach mechanischem Maase gemessen worden, welche auf dem innern Belege einer geladenen Leidner Flasche im disponibeln Zustande vorhanden war, d. h. es ist diejenige Menge Elektricität bestimmt worden, welche fast momentan in die Erde abfliesst, sobald man das innere Belege in leitende metallische Verbindung mit der Erde setzt, mit welcher schon vorher das äussere Belege verbunden worden war.

b) Die eben erwähnte Leidner Flasche wurde nun durch den Multiplicator einer Tangentenbussole nach der Erde hin entladen, indem ihr inneres Belege mit dem einen Ende des Multiplicatordrahtes, ihr äusseres Belege mit dem andern Ende desselben verbunden wurde. Es war dabei durch Einschaltung von Röhren voll destilirten Wassers in die Leitung Sorge getragen worden, dass die Elektricität wirklich innerhalb der Drähte floss und nicht etwa von einer Windung zur andern übersprang. Aus der beobachteten Elongation der Nadel, der Horizontalintensität des Erdmagnetismus und dem magnetischen Momente der Nadel konnte nun die Winkelgeschwindigkeit berechnet werden, welche der Nadel durch die Elektricität ertheilt wurde. Denn die Geschwindigkeitsertheilung erfolgt, wie das Nachstehende zeigt, so schnell, dass sie beendet ist, ehe die Nadel einen merklichen Ausschlag bekommen hat. Die Winkelgeschwindigkeit der Nadel ist nämlich bei einer solchen Entladung, wie schon Faraday und Riess nachgewiesen hatten, nur abhängig von der Menge der durch den Multiplicator fliessenden Elektricität, vom magnetischen Momente der Nadel, sowie von der Intensität des Erdmagnetismus am Beobachtungsorte, jedoch unabhängig von dem Widerstande und auch innerhalb weiter Grenzen unabhängig von der Entladungszeit. Bei einem und demselben Apparate und an einem und demselben Orte ist daher die Winkelgeschwindigkeit der Menge der durch den Multiplicator in der einen Richtung fliessenden positiven Elektricität proportional. Dies könnte nicht stattfinden, wenn die

Ertheilung der Geschwindigkeit nicht in so kurzer Zeit geschähe, dass sie vom Anfange bis zu Ende fast in derselben Richtung erfolgte, nämlich in einer horizontalen, gegen den magnetischen Meridian senkrechten Richtung.

Durch den hier diskutirten Versuch wurde nun die Menge der positiven Elektricität bekannt, welche der Nadel der von Weber angewendeten Tangentenbussole eine bestimmte Winkelgeschwindigkeit ertheilte.

c) Es wurde ein nach magnetischem Maase gemessener constanter Strom von sehr kurzer genau bekannter Dauer durch dieselbe Tangentenbussole entladen, welche zum vorigen Versuche gedient hatte, und aus der beobachteten Elongation der Nadel die Winkelgeschwindigkeit berechnet, welche dieselbe vom Strome während dessen Dauer erhalten hatte. Hat nun der Strom von der nach magnetischem Maase gemessenen Intensität i in der kleinen Zeit τ die Winkelgeschwindigkeit ζ hervorgebracht; hat ferner beim Entladungsversuch der Leidner Flasche die Elektricitätsmenge $+E$, welche vom innern Belege nach der Erde, und die Menge $-E$, die von der Erde gleichzeitig nach dem innern Belege strömte, die Winkelgeschwindigkeit η erzeugt, so ist die Menge positiver Elektricität, welche beim Strome i in der Secunde durch die Kette fliesst*):

$$\frac{E\zeta}{2\eta\tau}$$

und es ist demnach die magnetische Stromintensitätseinheit gleich:

$$\frac{E\zeta}{2i\eta\tau}$$

mechanischen Stromintensitätseinheiten. Weber und Kohlrausch fanden aus fünf Versuchsreihen, dass die Grösse $\frac{E\zeta}{2i\eta\tau}$ im Mittel $155370 \cdot 10^6$ betrage, wobei die Differenz des grössten und kleinsten der von ihnen erhaltenen Werthe etwa 7 Procent des mittleren Werthes betrug. Dass bei aller Genauigkeit und Sorgfalt im Beobachten ein genaueres Resultat nicht erhalten wurde, liegt jedenfalls in der grossen Schwierigkeit, eine statisch aufgehäufte Menge Elektricität genau zu messen. Die späteren Zusätze zu dem, was bis jetzt über die Beobachtungsmethode gesagt wurde, werden dies deutlich zeigen.

Das Gesetz Ampère's muss nun, wenn i und i' in mechanischem Stromintensitätsmaase ausgedrückt werden, die Form annehmen:

$$-\frac{2ii'dsds'}{(155370 \cdot 10^6)^2} \cdot \frac{1}{r^2}(\cos \varepsilon - \tfrac{3}{2} \cos \Theta \cos \Theta').$$

Die Ableitung aus Weber's Grundgesetz hatte jedoch die Form ergeben:

$$-\frac{16}{c^2}\frac{ii'dsds'}{r^2}(\cos \varepsilon - \tfrac{3}{2} \cos \Theta \cos \Theta').$$

Durch die Vergleichung dieser beiden Ausdrücke erhält man:

---

*) Siehe die Erläuterungen am Ende dieses Paragraphen.

$$c = 439450 \,.\, 10^6 \text{ Millimeter}$$

oder auch:

$$c = 59320 \text{ geographische Meilen.}$$

Hiernach beträgt also die relative Geschwindigkeit, mit welcher zwei elektrische Massen gleichförmig bewegt werden müssen, damit sie gar keine Wirkung mehr auf einander ausüben können, 59320 Meilen in der Secunde.

Dem Vorigen sind noch einige nothwendige Erläuterungen beizufügen. Wird eine Leidner Flasche geladen, so kann man die Menge der in sie eingefüllten Elektricität nach Kohlrausch in einem willkürlichen Maase ausgedrückt erhalten, wenn man sofort nach dem Laden der Flasche den Knopf derselben mit einem Sinuselektrometer verbindet und hierauf aus der Angabe desselben die Ladung berechnet*). Das Sinuselektrometer zeigt, wenn es mit dem Knopfe der Flasche verbunden bleibt, eine anfangs rasche Abnahme der Ladung, die sich später verlangsamt und zuletzt einer bestimmten Grenze nähert. Diese Abnahme der Ladung rührt nur zum Theil von Elektricitätsabgabe an die Luft her; nach Kohlrausch ist es sehr wahrscheinlich, dass folgende Ursache die Ladungsabnahme ganz vorzüglich bedingt. Die Ladung auf dem inneren und die gebundene Elektricität auf dem äusseren Belege scheiden allmälig die neutrale Elektricität im Glase, so dass an manchen Stellen im Innern des Glases freie positive Elektricität, an andern Stellen freie negative Elektricität vorhanden ist, welche sich beide wegen der schlechten Leitungsfähigkeit des Glases nicht vereinigen können. Die geschiedene Elektricität im Glase bindet einen Theil der Ladung fest und da erstere um so grösser sein muss, je mehr Zeit vom Laden der Flasche an verfloss, so muss auch die gebundene Elektricität auf den Belegen mit der Zeit zunehmen. Der Theil der Ladung, welcher von der geschiedenen Elektricität im Glase nicht gebunden gehalten wird, fliesst bei der Entladung der Flasche ganz allein ab und heisst die disponible Ladung. Kohlrausch hat nun in der oben citirten Abhandlung gezeigt, nach welchem Gesetze — zugleich mit Berücksichtigung des Elektricitätsverlustes in der Luft — die disponible Ladung von der ursprünglichen Ladung und der Zeit abhängt, welche seit dem Laden der Flasche vergangen ist, und wie man die Constanten dieses Gesetzes für jede beliebige Flasche und beliebige Luft bestimmen kann. Wird nun die Flasche durch eine Tangentenbussole hindurch entladen, so kennt man durch das Sinuselektrometer die Menge der disponibeln Ladung, allerdings nur in einem willkürlichen Maase ausgedrückt. Die Reduction des willkürlichen Maases auf absolutes Maas geschah bei den Versuchen von Weber und Kohlrausch dadurch, dass mit Hilfe des Sinuselektrometers ermittelt wurde, der wievielte Theil der Ladung der Flasche in eine grosse

*) *Pogg. Ann. Bd. 91. S. 56. 179.*

isolirt aufgehängte Kugel abgegeben wurde, sobald dieselbe mit dem Knopfe der Flasche in Berührung gebracht wurde. Diese Kugel wurde nun mit der kleinern Standkugel einer Coulomb'schen Drehwage berührt, der Theil von Elektricität der grossen Kugel, welcher hierbei an die kleine Kugel abgegeben wurde, wurde nach Plana's Arbeit (*Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface de deux sphères conductrices. Turin* 1845. *page* 64. 66.) berechnet. Die Standkugel der Coulomb'schen Drehwage wurde nun in letztere eingesetzt, worauf, da die Constanten des Instrumentes durch Torsionsschwingungen ermittelt worden waren, die auf der Standkugel befindlich gewesene Menge von Elektricität in absolutem Maase ausgedrückt aus der Beobachtung und zugehörigen Rechnung hervorgehen musste.

Ueber die während der Entladung der Leidner Flasche durch den Querschnitt hindurchfliessende Menge positiver und negativer Elektricität kann man sich verschiedene Vorstellungen machen. Betrug die Ladung der Flasche $+E$, so kann man sich vorstellen, die ganze Menge $+E$ fliesse allein nach der Erde ab, so dass nur positive Elektricität durch den Multiplicator geht, oder die zur Neutralisation erforderliche Menge $-E$ fliesst ganz allein in entgegengesetzter Richtung nach dem inneren Belege der Flasche hinauf; oder ein Theil von E, z. B. αE, fliesst nach der Erde ab, der andere Theil $(1-\alpha)E$ wird neutralisirt, indem die dazu nöthige Menge entgegengesetzte Elektricität $-(1-\alpha)E$ gleichzeitig aus der Erde nach dem innern Belege strömt. Welche Vorstellung man sich auch machen möge, so gelangt man doch zu dem Resultat, dass die Wirkung auf die Nadel genau so gross ist, als wenn die Menge $+\frac{1}{2}E$ nach der Erde, die Menge $-\frac{1}{2}E$ in entgegengesetzter Richtung durch den Multiplicator flösse. Man kann nämlich für die Nadel ein kleines Solenoid substituiren, welches vom Erdmagnetismus unter gleichen Verhältnissen ein eben so grosses Drehungsmoment, als die Nadel, erleidet. Die Einwirkung von der Menge $+\alpha E$ und $(1-\alpha)E$, welche durch ein Element des Multiplicators fliessen, auf ein Element vom Solenoid kann man dann, die Betrachtung des §. 6 wiederholend, untersuchen. Man wird dann die obige Behauptung für Elemente bestätigt finden und hat sie nur noch auf die ganzen Leiter auszudehnen, um die Berechtigung einzusehen, diesen Strom in der früher angegebenen Weise mit einem constanten Strome zu vergleichen.

Was endlich die Berechnung der kurzen Zeit τ anbelangt, während welcher der constante Strom durch den Multiplicator der Tangentenbussole ging, so geschah diese mit Hilfe des bekannten Momentes der Magnetnadel. Aus der Stärke des Stromes konnte, weil jenes bekannt war, das Kräftepaar berechnet werden, durch welches der Strom die im Meridian befindliche Nadel aus demselben herauszudrehen sucht. Dieses Kräftepaar giebt bei der Division durch das bekannte Trägheitsmoment der Nadel die Winkelbeschleunigung. Dividirt man nun mit der Winkelbeschleunigung in die

aus der beobachteten Elongation berechnete Winkelgeschwindigkeit, so erhält man die Zeit τ.

§. 14. Die elektrodynamischen Gesetze mit numerischen Constanten.

Das elektrodynamische Grundgesetz von Weber nimmt nach Einsetzung der Constanten c folgende Form an:

$$\text{I)} \qquad \frac{ee'}{r^2}\left\{1 - \frac{1}{103120 \,.\, 10^{18}}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - 2r\frac{d^2r}{dt^2}\right]\right\}$$

und drückt also in absolutem Maase die Kraft aus, mit welcher zwei nach mechanischem Maase gemessene Elektricitätsmengen e und e' in Richtung ihrer Verbindungslinie auf einander wirken, wobei r, $\frac{dr}{dt}$ und $\frac{d^2r}{dt^2}$ in Millimetern auszudrücken sind. Hat man positive Elektricitätsmengen mit positivem Vorzeichen, negative mit negativem Vorzeichen eingeführt, so entspricht einem positiven Vorzeichen obigen Ausdruckes eine abstossende, einem negativen Vorzeichen eine anziehende Kraft.

Das aus dem allgemeinen Grundgesetze abgeleitete Gesetz Ampère's war Früherem zufolge:

$$-\frac{ii'dsds'}{r^2} \cdot \frac{16}{c^2}\left(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\Theta\cos\Theta'\right),$$

d. i. nach Einsetzung des Werthes von c:

$$\text{II)} \qquad -\frac{1}{12070 \,.\, 10^{18}} \cdot \frac{ii'dsds'}{r^2}\left(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\Theta\cos\Theta'\right).$$

Dieser Ausdruck giebt also die Kraft in absolutem Maase ausgedrückt an, mit welchem das Element ds auf das Element ds', und umgekehrt ds' auf ds in Richtung der Verbindungslinie r beider Elemente einwirkt. Das Element ds ist von einem Strome von der Intensität i (in mechanischem Maase ausgedrückt) durchflossen, das Element ds' ist vom Strome i', in demselben Maase ausgedrückt, durchströmt, r ist in Millimetern einzusetzen. Der Winkel ε ist der Winkel, den die beiden Elemente ds und ds' mit einander einschliessen, Θ ist der Winkel, den das Element ds mit der Richtung von r (z. B. von ds nach ds') einschliesst, Θ' der Winkel, den ds' mit der verlängerten Linie r bildet.

Dem §. 7. No. 5. zufolge würde nun das Gesetz für die Voltainduction eines vom Strome i (mechanisches Maas) durchflossenen ruhenden Elementes ds, in dessen Nähe ein neutrales Element ds' mit der Geschwindigkeit u' bewegt wird, die elektromotorische Kraft, welche in der Richtung von ds' auf letzteres ausgeübt wird, in folgender Grösse ergeben:

$$\text{III)} \qquad -\frac{1}{12070 \,.\, 10^{18}} \frac{iu'ds\,ds'}{r^2}\left(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\Theta\cos\Theta'\right)\cos\varphi.$$

Hierbei bedeutet r die in Millimetern ausgedrückte Entfernung zwischen ds und ds', die Richtung r möge die Richtung der von ds nach ds' gezogenen und darüber hinaus verlängerten Geraden sein; es ist dann ε der Winkel,

den die Richtung von u' mit ds', Θ' der Winkel, den die Richtung von u' mit r bildet, Θ ist der Winkel von r und ds, und φ der spitze Winkel, den ds' mit r einschliesst. Ist der Ausdruck III) positiv, so inducirt die elektromotorische Kraft einen Strom in ds', dessen Richtung mit r den spitzen Winkel φ einschliesst.

Im Falle, wo die Stromintensität in einem Elemente ds in der Zeit dt um $\frac{di}{dt} \cdot dt$ geändert wird, wird auf die Elektricität in einem benachbarten Elemente ds' nach §. 9. No. 6. die electromotorische Kraft ausgeübt:

$$\text{IV)} \qquad -\frac{1}{24140 \,.\, 10^{18}} \cdot \frac{ds\, ds'}{r} cos\, \Theta\, cos\, \Theta' \frac{di}{dt}.$$

In diesem Ausdrucke ist r die in Millimetern ausgedrückte Entfernung von ds und ds', Θ und Θ' sind respective die Winkel, welche ds und ds' mit der Richtung r (von ds nach ds' und darüber hinaus gezogen gedacht) bilden.

In dem complicirteren Falle, wo die Induction gleichzeitig durch Bewegung des einen Leiters und durch Aenderung der Stromintensität hervorgebracht wird, erhält man den im §. 10 angegebenen Ausdruck für die inducirte elektromotorische Kraft; derselbe ist nun ebenfalls vollständig bestimmt, sobald man in denselben $a^2 = \frac{1}{193120 \,.\, 10^{18}}$ einsetzt.

§. 15. Elektrodynamische Einwirkung eines geschlossenen constanten Stromes auf ein Element eines andern constanten Stromes.

Das Element ds' befinde sich im Anfange eines rechtwinkligen Coordinatensystemes und es schliesse die Richtung des durch dasselbe hindurchfliessenden Stromes von der in mechanischem Maase ausgedrückten Intensität i' mit den Achsen x, y, z resp. die Winkel λ, μ, ν ein. Das Element ds gehöre einer Curve an, deren zwei Gleichungen als gegeben betrachtet werden, so dass von den Coordinaten x, y, z des Elementes ds immer zwei als Function der dritten anzusehen sind. Die Richtung des Stromes (Intensität i) in ds bilde mit der Stromrichtung in ds' den Winkel ε, mit der Linie r (von ds' nach ds gezogen) den Winkel Θ, und die Stromrichtung in ds' mit r den Winkel Θ'.

Jedes Element ds des geschlossenen Stromes wirkt auf den Strom in ds' mit der Kraft ein:

$$1) \qquad -\frac{16}{c^2} \frac{i i' ds\, ds'}{r^2} (cos\, \varepsilon - \tfrac{3}{2}\, cos\, \Theta\, cos\, \Theta').$$

Diese Kraft ist in drei Componenten, die die Richtung der drei Coordinatenachsen besitzen, zu zerlegen und hierauf alle Componenten in der x-Achse, die den Einwirkungen aller Elemente des geschlossenen Stromes auf das Element ds' entsprechen, zu addiren; man erhält so eine Componente, die mit X bezeichnet werden möge. Die Addition aller in der y-Ache enthaltenen Componenten gebe die Kraft Y, die Summe aller Componenten

in der z-Achse gebe die Kraft Z. Es soll nun zunächst die Componente X bestimmt werden. Die in der x-Achse enthaltene Componente der Einwirkung von ds auf ds' ist:

$$2)\qquad -\frac{16}{c^2}\cdot\frac{ii'ds.ds'}{r^2}\cdot\frac{x}{r}(\cos \varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\Theta\cos\Theta').$$

Diesem Ausdruck giebt man eine für die Folge zweckmässigere Form, indem man setzt:

$$3)\qquad \cos\varepsilon = \frac{dx}{ds}\cos\lambda + \frac{dy}{ds}\cos\mu + \frac{dz}{ds}\cos\nu;$$

$$4)\qquad \cos\Theta = \frac{x}{r}\frac{dx}{ds} + \frac{y}{r}\frac{dy}{ds} + \frac{z}{r}\frac{dz}{ds};$$

$$5)\qquad \cos\Theta' = \frac{x}{r}\cos\lambda + \frac{y}{r}\cos\mu + \frac{z}{r}\cos\nu.$$

Man erhält dann für die Einwirkung von ds auf ds':

$$6)\qquad -\frac{16}{c^2}\cdot\frac{ii'ds'}{2}\left[\frac{1}{r^3}(2x\,dx\cos\lambda + 2x\,dy\cos\mu + 2x\,dz\cos\nu)\right.$$
$$\left. - \frac{(3x\,dx + 3y\,dy + 3z\,dz)}{r^5}(x^2\cos\lambda + xy\cos\mu + xz\cos\nu)\right].$$

Dieser Ausdruck lässt sich weiter umformen, wenn man, geleitet durch die Form des letzten Gliedes, das Differential von $\frac{1}{r^3}$ einzuführen sucht. Denn es giebt:

$$7)\qquad d.\frac{1}{r^3} = -3.\frac{1}{r^4}dr.$$

Aus $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ erhält man jedoch:

$$8)\qquad dr = \frac{x}{r}dx + \frac{y}{r}dy + \frac{z}{r}dz$$

und daher:

$$9)\qquad d.\frac{1}{r^3} = -\frac{(3x\,dx + 3y\,dy + 3z\,dz)}{r^5}.$$

Man findet nun nach diesen Erörterungen leicht, dass man statt der Gleichung 6) die folgende setzen darf, welche den Vortheil besitzt, bei der nachfolgenden Integration sich zu vereinfachen,

$$10)\qquad -\frac{16}{c^2}\frac{ii'ds'}{2}\left[d.\frac{x^2\cos\lambda + xy\cos\mu + xz\cos\nu}{r^3}\right.$$
$$\left. + \cos\mu.\frac{(x\,dy - y\,dx)}{r^3} + \frac{\cos\nu\,(x\,dz - z\,dx)}{r^3}\right].$$

Das erste Glied in der Parenthese kann man auch schreiben:

$$d.\frac{x^2\cos\lambda + xy\cos\mu + xz\cos\nu}{r^3} = d.\frac{x\left(\frac{x}{r}\cos\lambda + \frac{y}{r}\cos\mu + \frac{z}{r}\cos\nu\right)}{r^2}$$
$$= d.\frac{x\cos\Theta'}{r^2}.$$

Integrirt man nun den Ausdruck 10) und erstreckt hierbei die Integration auf alle Elemente der Curve, so verschwindet das erste Glied der Parenthese, weil $\frac{x \cos \Theta'}{r^2}$ für beide Grenzen denselben Werth erhält. Die Integration giebt nun — wenn man den Werth der Constanten c einsetzt — zunächst:

$$\text{V)} \quad X = -\frac{1}{24140 \cdot 10^{18}} ii'ds' \left(\cos \mu \int \frac{xdy - ydx}{r^3} - \cos \nu \int \frac{zdx - xdz}{r^3} \right).$$

Die Componente Y würde man auf gleiche Weise finden, wenn man denselben Untersuchungsgang anwendete, jedoch von Anfang der Entwickelung an überall x und λ mit y und μ und umgekehrt vertauschte. Man erhält daher Y sofort aus No. V) durch Anwendung derselben Vertauschungen. Ebenso findet man den entsprechenden Ausdruck für Z, sobald man in V) statt x und λ die Grössen z und ν und umgekehrt schreibt. Das Resultat dieser Vertauschungen ist nun:

$$\text{VI)} \quad Y = -\frac{1}{24140 \cdot 10^{18}} ii'ds' \left(\cos \nu \int \frac{ydz - zdy}{r^3} - \cos \lambda \int \frac{xdy - ydx}{r^3} \right);$$

$$\text{VII)} \quad Z = -\frac{1}{24140 \cdot 10^{18}} ii'ds' \left(\cos \lambda \int \frac{zdx - xdz}{r^3} - \cos \mu \int \frac{ydz - zdy}{r^3} \right).$$

Diese drei Ausdrücke sind zuerst von Ampère, natürlich mit der dem magnetischen Stromintensitätsmaase zukommenden Constanten, gegeben worden.

§. 16. Voltainduction eines geschlossenen constanten Stromes auf das Element eines bewegten neutralen Leiters.

Der Gang der Untersuchung ist genau so, wie in §. 15; wir nehmen an, das Element ds' befinde sich anfänglich im Coordinatenanfange, dasselbe werde aber in der kleinen Zeit dt mit einer Geschwindigkeit u' vom Coordinatenanfange hinbewegt, deren Richtung mit den Achsen x, y, z respective die Winkel λ, μ, ν bildet und mit r den Winkel Θ', sowie mit der Stromrichtung in ds den Winkel ε einschliesst. Vermöge der Bewegung des Elementes ds' wird in selbigem eine elektromotorische Kraft inducirt, deren in der x-Achse liegende Componente dem §. 14, No. III) zufolge ist:

$$-\frac{16}{c^2} \frac{iu'ds\,ds'}{r^2} \cdot \frac{x}{r} (\cos \varepsilon - \tfrac{3}{2} \cos \Theta \cos \Theta').$$

Formt man diesen Ausdruck ebenso um, als die Gleichung 2) des §. 15, so erhält man nach und nach Ausdrücke, die denen des §. 15 ganz ähnlich sind und sich von ihnen nur dadurch unterscheiden, dass überall u' an der Stelle von i' steht, so dass das Endresultat der Rechnung, d. i. die Ausdrücke der Componenten X, Y, Z der totalen auf ds' ausgeübten elektromotorischen Kraft sich ebenfalls von den Ausdrücken V), VI), VII) des vorigen Paragraphen nur durch Vertauschung von i' und u' unterscheiden. Wir erhalten deswegen, indem wir der Kürze wegen die Bezeichnungen einführen:

$$1)\ A=\int\frac{x\,dy-y\,dx}{r^3},\quad 2)\ B=\int\frac{y\,dz-z\,dy}{r^3},\quad 3)\ C=\int\frac{z\,dx-x\,dz}{r^3};$$

$$\text{VIII)}\qquad X=-\frac{1}{24140\,.\,10^{18}}\,i u' d s'\,(A\cos\mu-C\cos\nu);$$

$$\text{IX)}\qquad Y=-\frac{1}{24140\,.\,10^{18}}\,i u' d s'\,(B\cos\nu-A\cos\lambda);$$

$$\text{X)}\qquad Z=-\frac{1}{24140\,.\,10^{18}}\,i u' d s'\,(C\cos\lambda-B\cos\mu).$$

§. 17. Das absolute Widerstandsmaas.

Ohm hat bekanntlich das nach ihm genannte Gesetz theoretisch zu begründen gesucht, indem er die Hypothese zu Grunde legte, dass die Bewegung der Elektricität in Stromleitern in Folge ähnlicher Ursachen eintrete, wie die Ausgleichung der Wärme in einem Körper, in welchem verschiedene Stellen durch Wärmezuführung auf constanter Temperatur erhalten werden*). Das auf diese Weise abgeleitete Gesetz entbehrt demgemäs des strengen theoretischen Nachweises, der vielmehr nur geliefert werden kann, wenn man — wie bereits Weber und Kirchhoff versucht haben — von Weber's allgemeinem Grundgesetze der Elektricitätslehre ausgeht. Eines solchen theoretischen Nachweises darf man sich indessen, wo es auf Messungen ankommt, oft entschlagen, sobald durch den Versuch dargethan wird, dass das Ohm'sche Gesetz in den betreffenden Fällen wirklich Geltung besitzt. Die Fälle nun, in denen das genannte Gesetz angewendet werden darf, sind der Construction der messenden und vieler anderer Inductionsapparate zufolge wirklich die häufigeren. Soviel man bis jetzt weiss, darf das mehrerwähnte Gesetz, dessen Giltigkeit für hydroelektrische und thermoelektrische constante Ströme fest steht, auch auf diejenigen magneto- oder stromelektrischen Inductionsapparate ausgedehnt werden, bei denen sich die auf ein Leiterelement ausgeübte elektromotorische Kraft nur nicht allzuschnell im Verhältniss mit der Zeit ändert; in speciellen Fällen ist, wie oben bereits erwähnt wurde, jedesmal die Zulässigkeit von Ohm's Gesetz durch einen Versuch zu entscheiden.

Aus den Umständen, die Inductionsversuche der letzteren Art begleiten, wird nun, wenn Ohm's Gesetz erfahrungsgemäs gilt, die elektromotorische Kraft auf die Weise berechnet, dass man mit Hilfe der Ausdrücke VIII), IX), X) des vorhergehenden Paragraphen die elektromotorische Wirkung ermittelt, welche ein Element ds des Inducenten am Ende der Zeit t erleidet. Ist diese Eds, so ist die Summe aller am Ende der Zeit t auf den Leiter ausgeübten Kräfte:

$$\int_0^s E\,ds,$$

*) Ohm, die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet. Berlin 1827.

wenn der Leiter die Länge s besitzt. Diese Kraft ist im Allgemeinen eine Function von der Zeit t, welche sich nur wenig mit letzterer ändert. Wirkt nun der von dieser Kraft innerhalb der Zeiten t_0 und t_1 hervorgebrachte Inductionsstrom auf einen sich gar nicht oder nur wenig bewegenden Leiter oder Magneten (z. B. auf die Nadel einer Tangentenbussole), so erfolgt die Wirkung des inducirten Stromes immer in derselben oder fast in derselben Richtung. In diesen, bei günstiger Wahl des Zeitintervalles $t_1 - t_0$ immer durch den Versuch herstellbaren Fällen wirkt der Inductionsstrom wie ein constanter Strom, dessen elektromotorische Kraft gleich dem arithmetischen Mittel aller auf den Leiter s innerhalb der Zeiten t_0 und t_1 ausgeübten elektromotorischen Kräfte ist; nämlich:

$$\frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^s E ds.$$

Diese Kraft ist die in absolutem Maase ausgedrückte mittlere Differenz derjenigen Kräfte, welche auf die im Leiter befindliche positive mit einer gleich grossen Menge negativer Elektricität vereinigte Elektricität wirken würde, wenn die Menge der in der Längeneinheit des Leiters befindlichen positiven Elektricität 1 wäre. Es liegt in dem eben erörterten Verhalten die Möglichkeit, Inductionsströme mit constanten Strömen zu vergleichen, zugleich geht daraus hervor, dass Ohm's Gesetz für alle elektrischen Ströme innerhalb gewisser Grenzen giltig ist, so dass es gerechtfertigt erscheint, das absolute mechanische Widerstandsmaas auf Ohm's Gesetz zu gründen.

Ist nun e eine constante auf einen Leiter von überall gleichem Querschnitt und gleicher Substanz ausgeübte elektromotorische Kraft, so ist die Stromstärke:

proportional der Menge α von Elektricität, die in einem Stück des Leiters von der Länge 1 und dem Querschnitt 1 wirklich enthalten ist, und proportional dem Querschnitt q, d. i. also proportional αq,

umgekehrt proportional der Menge gleich starken Hemmungen, die ihrem Strömen durch die Substanz des Leiters gesetzt werden, also umgekehrt proportional der Länge l des Leiters und einem von dessen Substanz abhängigen Factor β.

Demnach ist die Stromstärke i etwa:

$$i = \varrho \cdot \frac{e \cdot \alpha q}{\beta l} = \varrho \cdot \frac{e}{\frac{\beta l}{\alpha q}} = \varrho \frac{e}{w},$$

wobei w den Widerstand des Leiters und ϱ eine Constante bedeutet, die von dem Maase abhängt, in welchem w ausgedrückt ist.

Es möge nun der Fall ins Auge gefasst werden, in welchem der Leiter aus Stücken von ungleichem Querschnitt, ungleicher Länge und ungleicher Substanz besteht, deren Widerstände $w_1, w_2, w_3 \ldots w_n$ sind, wobei die

Summe dieser Widerstände w sein möge. Die Summe aller auf die Leiterstücken ausgeübten elektromotorischen Kräfte möge hierbei e sein. Ueber diese elektromotorische Kraft e macht man sich den Erscheinungen gemäss die Vorstellung, dass sich dieselbe in einzelne Theile $e_1, e_2 \ldots e_n$ von selbst spalte, die in den einzelnen Leiterstücken nach Proportion der Widerstände wirken, so dass die in jedem Leiterstücke gleich grosse Stromstärke i sich in jedem Leiterstücke nach dem Ohm'schen Gesetze richtet. Man hat hiernach:

$$i = \varrho \frac{e_1}{w_1} \quad \text{oder} \quad w_1 i = \varrho e_1,$$

$$i = \varrho \frac{e_2}{w_2} \quad \text{oder} \quad w_2 i = \varrho e_2$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$i = \varrho \frac{e_n}{w_n} \quad \text{oder} \quad w_n i = \varrho e_n.$$

Die Addition der zweiten Reihe führt wieder auf das Ohm'sche Gesetz, nämlich:

$$i = \varrho \frac{e}{w}.$$

Ist nun das Maas, nach dem die elektromotorische Kraft e und die Stromstärke i gemessen ist, das mechanische Maas, so kann man das Maas, in welchem w gemessen wird, so bestimmen, dass $\varrho = 1$ wird; man nennt dies so definirte Widerstandsmaas das mechanische Widerstandsmaas, so dass also:

$$i = \frac{e}{w},$$

wenn i, e und w im absoluten mechanischen Maase gemessen werden. Eine Kette bietet daher den mechanischen Widerstand 1 dar, sobald die elektromotorische Kraft 1 in ihr die Stromstärke 1 hervorbringt, die beiden letzteren nach absolutem mechanischem Maase gemessen.

§. 18. Bestimmung des absoluten Widerstandes durch Versuche.

Es ist wünschenswerth, den Widerstand von Leitern nach absolutem mechanischen Maase zu bestimmen, da es kein relatives Widerstandsmaas giebt, welches für wissenschaftliche Angaben hinreichende Zuverlässigkeit besitzt. Die früher auch bei wissenschaftlichen Arbeiten gebräuchlichen relativen Widerstandsmessungen geben an, wieviel mal grösser der Widerstand einer untersuchten Drahtleitung war, als der Widerstand eines Normaldrahtes von bestimmter Länge, bestimmtem Querschnitt und bestimmter Substanz. Da es sich jedoch herausgestellt hat, dass dieselbe Substanz bei gleichen Dimensionen und derselben chemischen Beschaffenheit verschiedenen Widerstand zeigt, je nachdem sie auf die oder jene Weise hergestellt wurde und danach wahrscheinlich verschiedene Molecularverhältnisse an

sich trug, ist es nothwendig geworden, Widerstände in absolutem Maase anzugeben.

Die Mittel zur Bestimmung des Widerstandes nach absolutem Maase sind von Wilhelm Weber angegeben worden*) und sollen hier — allerdings nur im Principe — wiedergegeben werden. Sie gründen sich auf die Magnetoinduction, deren Gesetz bereits seit längerer Zeit bekannt ist, und auf folgende Weise ausgedrückt werden kann: Wirkt ein magnetisches nach absolutem magnetischem Maase gemessenes Theilchen μ während seiner Bewegung inducirend auf ein festes Leiterelement von der Länge ds, so wird auf letzteres in dessen Richtung eine elektromotorische in magnetischem Maase ausgedrückte Kraft ausgeübt, deren absolute Grösse

$$\mu\, ds'.\, u \frac{\sin\Theta \cos\psi}{r^2}$$

ist. Hierbei ist u die Geschwindigkeit, mit der μ bewegt wird, Θ ist der spitze Winkel, den die von μ nach ds gezogene Gerade r mit dem Element ds bildet, ψ ist der spitze Winkel, den die Normale auf der durch μ und ds gelegten (sogenannten Wirkungs-) Ebene mit der Richtung von u bildet. Da nun, wie Weber gezeigt hat, die elektromotorische Kraft nach mechanischem Maase erhalten wird, wenn man die nach magnetischem Maase gemessene mit $\frac{4}{c\sqrt{2}} = \frac{1}{155370\,.\,10^6}$ multiplicirt, so ergiebt sich hieraus das Gesetz der Magnetoinduction, wie folgt:

$$\frac{1}{155370\,.\,10^6}\,.\,\mu\, ds' u \frac{\sin\Theta \cos\psi}{r^2}.$$

Dies Gesetz ergiebt die elektromotorische Kraft in gewöhnlichem mechanischem Kraftmaase, sobald die in demselben vorkommenden Grössen in absolutem Maase ausgedrückt sind, die sich auf das Millimeter als Einheit der Länge und auf die Secunde als Einheit der Zeit gründen.

Das angegebene Gesetz lässt sich leicht in dasjenige umformen, welches die Induction eines bewegten Leiters gegen ein festes magnetisches Element ausdrückt, indem man bei beiden Elementen eine Geschwindigkeit von der Grösse und Richtung einführt, dass dadurch die Geschwindigkeit des magnetischen Elementes annullirt wird.

Sobald man nun den Widerstand eines Multiplicators nach absolutem mechanischem Maase bestimmen will, so hat man nur 1) eine elektromotorische Kraft in selbigem zu induciren, indem man ihn in der Nähe eines Magneten oder den Magneten in seiner Nähe bewegt. Die Grösse dieser Kraft lässt sich in absolutem Maase aus dem Moment des Magneten berechnen. 2) Man hat die durch diese elektromotorische Kraft hervorgebrachte Stromstärke durch galvanometrische Messungen zu beobachten. Indem man mit der Stromstärke in die elektromotorische Kraft dividirt,

*) Abhandlungen der math.-phys. Classe der k. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Bd. I. S. 197.

findet man die Grösse des Widerstandes. Von Weber sind folgende Methoden zur Bestimmung des absoluten Widerstandes versucht worden, die in einzelnen Fällen durch zweckmässige Einrichtung der Apparate jede gewünschte Genauigkeit erhalten können:

1) Ein Multiplicator, dessen Windungen anfänglich horizontal sind, wird um eine gegen den magnetischen Meridian senkrechte und horizontale Achse rasch bis zur senkrechten Lage der Windungsebenen in die Höhe gedreht. Die in der horizontalen Umdrehungsachse befindlichen Enden der Multiplicatordrähte sind hierbei in Verbindung mit den Drahtenden eines entfernten ruhenden Multiplicators; der vom Erdmagnetismus im ersten Multiplicator inducirte Strom wirkt, indem er durch den zweiten festen Multiplicator geht, auf ein Magnetometer. Die elektromotorische Kraft, welche der Erdmagnetismus im beweglichen Multiplicator inducirt, kann mit Hülfe des im Eingange dieses Paragraphen angegebenen Gesetzes berechnet werden, wenn man sich statt des Erdmagnetismus in grösserer Entfernung vom Mittelpunkt des beweglichen Multiplicators einen Magneten placirt denkt, welcher auf eine im Mittelpunkt des Multiplicators befindliche Magnetnadel dasselbe Drehungsmoment ausüben würde, als der Erdmagnetismus am Beobachtungsorte. Aus der Ablenkung, welche hierbei die Magnetnadel vom festen Multiplicator aus erleidet, wird hierauf die Stromstärke gefunden.

2) Die Enden eines Multiplicator's sind mit einander verknüpft, wobei seine Windungsebenen im magnetischen Meridian liegen, im Mittelpunkte des Multiplicators ist ein starker Magnet aufgehangen, welcher in Schwingungen versetzt wird und dadurch einen elektrischen Strom im Multiplicator inducirt. Der Inductionsstrom dämpft durch elektromagnetische Wirkung fortwährend die Schwingungen des Magneten, dessen Elongationen in Folge davon in einer geometrischen Reihe abnehmen; aus dem durch Beobachtung gefundenen Exponenten dieser Reihe lässt sich die Stärke des Inductionsstromes berechnen, die elektromotorische, auf den Multiplicator ausgeübte Kraft findet man aus dem Schwingungsgesetz und der Stärke des Magneten mit Hülfe des Magnetinductionsgesetzes.

Den Widerstand eines beliebigen Drahtes findet man nun nach bekannten Methoden, indem man selbigen mit dem Multiplicator von bekanntem Widerstande verbindet und die Stromstärke eines constanten Stromes ermittelt, wenn er durch den Multiplicator allein oder durch Multiplicator und Draht zugleich hindurchgeht.

Um das ungefähre Verhältniss des absoluten mechanischen Widerstandsmaases zu dem bisher namentlich zu technischen Zwecken mit Vortheil angewendeten Jacobi'schen Widerstandsmaases kennen zu lernen, können einige Versuche Weber's Aufschluss geben. Jacobi hatte bekanntlich, wie viele andere Physiker, seine Widerstandsangaben auf den Widerstand eines 1 Millimeter langen und 1 Millimeter dicken Drahtes von reinem Kupfer

als Einheit bezogen; da **Jacobi** aber den Umstand kannte, dass Kupfer von derselben Reinheit doch verschiedenen Widerstand zeigt, so war er vor dem Bekanntwerden von **Weber's** Arbeit über den Widerstand bemüht gewesen, allgemeine Vergleichbarkeit in die Widerstandsangaben der Physiker dadurch zu bringen, dass er bei den Physikern einen Widerstandsetalon, bestehend in einem auf einem Brete aufgewundenen Kupferdraht von bekannter Länge und Durchmesser, wohlverwahrt vor atmosphärischen Einflüssen, umherwandern liess; indem er die Physiker bat, ihre Widerstandsmesser mit dem seinigen zu vergleichen. **Weber** hat nun später den Widerstand dieses Etalons, dessen Kupfer 7,61975 Millim. Länge und 0,667 Millim. Durchmesser hatte, nach absolutem Maase bestimmt. Es geht aus diesen Messungen hervor, dass reines Kupfer von 1 Millim. Länge und 1 Millim. Durchmesser einen Widerstand von circa $\frac{14,47}{10^{15}}$ mechanischen Widerstandseinheiten darbietet. Eine genauere Angabe dieser Zahl würde nichts helfen können, da, wie bereits erwähnt, die Widerstände anderer Drähte von reinem Kupfer um mehrere Procente von dem Widerstande des oben erwähnten Drahtes abweichen können.

§. 19. Neumann's Inductionsgesetz.

Wie bereits in §. 11 ausführlicher erwähnt wurde, hat **Neumann** sein Inductionsgesetz auf empirische Grundlagen basirt,*) dasselbe kann jedoch auch als eine Consequenz von Weber's allgemeinem Grundgesetz der Elektricitätslehre betrachtet werden. Letzteres soll hier gezeigt werden, indem folgende elektromotorische und elektrodynamische Wirkungen mit einander verglichen werden:

1) Die Inductionswirkung eines geschlossenen Leiters auf ein Drahtelement von der Länge ds'. Wird letzteres in der Richtung der positiven x-Achse mit der Geschwindigkeit u' bewegt, so sind nach §. 16 die Componenten der elektromotorischen Kraft, weil $\lambda = 0$, $\mu = \frac{\pi}{2}$, $\nu = \frac{\pi}{2}$:

$$X = 0, \quad Y = + \frac{8}{c^2} i u' A\, ds', \quad Z = - \frac{8}{c^2} i u' C\, ds'.$$

Schliesst nun das Element mit den positiven Halbachsen die Winkel α, β, γ ein, so ist die in seiner Richtung auf dasselbe ausgeübte elektromotorische Kraft, die mit $E'ds'$ bezeichnet werden möge:

$$E'ds' = \frac{8}{c^2} i u' ds' (A \cos\beta - C \cos\gamma).$$

2) Mit voriger Wirkung soll die nach der Richtung von u' zerlegte Wirkung des Inducenten auf das von der Einheit des Stromes durchflossen

*) **Neumann**, die mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme, *Berlin 1846, S. 13.*

gedachte Element ds' verglichen werden. Letztere ist nach §. 15. V., wenn selbige durch $C'ds'$ bezeichnet wird:

$$C'ds' = -\frac{8}{c^2}\, i\, ds' \,(A \cos\beta - C \cos\gamma).$$

Man erkennt nun aus dem Vorhergehenden, dass zwischen beiden Wirkungen die Beziehung stattfindet:

I) $$E'ds' = -u'C'ds'.$$

Diese Beziehung gestattet, die elektromotorische Kraft aus elektrodynamischen Wirkungen zu berechnen und giebt erstere in absolutem mechanischen Kraftmaase ausgedrückt an, sobald bei der Berechnung von C' und bei u' absolute auf Millimeter und Secunde basirte Maase zu Grunde gelegt wurden. Die in I) ausgedrückte Beziehung ist nun im Wesentlichen das zuerst von Neumann ausgesprochene Gesetz, welches von dem genannten Gelehrten in folgender Form gegeben wurde:

II) $$E''ds' = -\varepsilon u''C''ds'.$$

In diesem Ausdrucke haben E'', u'', C'' dieselbe Bedeutung, als oben E', u' C' mit dem Unterschiede jedoch, dass u'' in beliebigem Längenmaase ausgedrückt sein konnte, dass bei der Berechnung von C'' das zu Grunde gelegte Intensitätsmaas nicht bestimmt war, so dass also E'' in einem Maase für elektromotorische Kraft ausgedrückt erhalten wurde, welches so lange unbestimmt blieb, als die hinzugefügte Constante ε nicht bestimmt worden war. Die Constante ε, welche sich aus Neumann's Herleitung des Gesetzes nicht ergeben konnte, weil es an experimentellen Grundlagen fehlte, ist später durch Kirchhoff's Versuche*) für bestimmte der Gleichung II) zu Grunde gelegte Maase ermittelt worden. Das Resultat von Kirchhoffs Versuchen möge um so mehr hier noch Platz finden, als in demselben eine Bestätigung von Weber's Messung des absoluten Widerstandes des Jacobi'schen Widerstandsetalons erblickt werden kann.

Das Resultat, welches Kirchhoff erhalten hatte, lässt sich auf folgende Weise aussprechen: die Constante ε in Gleichung II) ist $= 1$ zu setzen und es ist dann die Intensität i'' des Inductionsstromes aus der Gleichung zu erhalten:

$$i'' = -\frac{u''C''ds'}{\omega''},$$

wenn die Maase, in denen i'', u'' und der Widerstand ω'' ausgedrückt sind, folgende sind. Das Maas, in welchem i'' erhalten wird und welches bei der Berechnung von C'' zu Grunde zu legen ist, ist dasjenige, bei welchem Ampère's Gesetz ohne Constante, d. i. in folgender Form erscheint und dabei die elektrodynamische Wirkung in absoluten mechanischen Krafteinheiten ausgedrückt angiebt:

*) Poggendorff's Annalen, Bd. 76, S. 412.

$$-\frac{i\,i'}{r^2}\,ds\,ds'(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\Theta\cos\Theta').$$

Durch Vergleichung mit No. II) S. 14 erkennt man, dass die Einheit dieser Stromintensität $\frac{c}{4}$ mechanische Stromintensitätseinheiten in sich fasst. Die Einheit der Geschwindigkeit beträgt 313853 Millimeter in der Secunde und die Einheit des Widerstandes ist der Widerstand eines Kupferdrahtes von 4,75 Quadratmillim. Querschnitt und 11,35 Millim. Länge.

Berechnet man nun die Stromintensität i' aus Gleichung I) in mechanischem Maase, so erhält man:

$$i' = -\frac{u'C'ds'}{\omega'},$$

in welchem Ausdrucke nun auch ω' in mechanischem Widerstandsmaase auszudrücken ist. Zwischen i' und i'' muss jedoch folgende Beziehung stattfinden:

$$i'' = \frac{4}{c}\,i',$$

wenn derselbe Inductionsfall nach beiden Formeln berechnet wurde und wenn Kirchhoff's und Weber's Widerstandsmessungen richtig sind.

Nennt man den absoluten mechanischen Widerstand von Kupfer von 1 Millim. Länge und 1 Millim. Durchmesser x, so enthält hiernach Kirchhoff's Maas $x.0{,}01135.\dfrac{\frac{\pi}{4}}{4{,}75}$ mechanische Widerstandseinheiten, daher ist:

$$\omega'' = \frac{4\,.\,4{,}75}{0{,}01135\,.\,\pi\,.\,x}\,\omega',$$

ferner ist:

$$u'' = \frac{u'}{313853}.$$

Es war ferner für C' der Werth erhalten worden:

$$C'ds' = -\frac{8}{c^2}\,i\,ds'(A\cos\beta - C\cos\gamma)$$

und es würde für C'' der Werth hervorgehen:

$$C''ds' = -\frac{2}{c}\,i\,ds'(A\cos\beta - C\cos\gamma),$$

woraus folgt:

$$C'' = \frac{c}{4}\,C'.$$

Man erhält nun für $i'' = \frac{4}{c}\,i'$:

$$i'' = -\frac{c\,.0{,}01135\,\pi\,.\,u'C'ds'}{313853\,.\,4^2\,.\,4{,}75\,.\,\omega'}\,x = -\frac{4}{c}\,.\,\frac{u'C'ds'}{\omega'}.$$

Berechnet man aus vorstehendem Ausdrucke x, so findet man den Werth

$x = \frac{13,85}{10^{15}}$, d. h. es geht aus Kirchhoff's Versuchen hervor, dass der Widerstand des von ihm angewendeten Kupferdrahtes bei 1 Meter Länge und 1 Millim. Dicke $\frac{13,85}{10^{15}}$ mechanischen Widerstandseinheiten gleich ist, während ein Draht von gleichen Dimensionen vom Jacobi'schen Widerstandsetalon nach Weber's Versuchen den Widerstand $\frac{14,47}{10^{15}}$ darbietet. Man kann die nahe Uebereinstimmung beider Werthe als einen Beweis für die Richtigkeit von Weber's Messungen und für die Güte seiner Beobachtungsmethode ansehen, indem man berücksichtigt, dass beide Experimentatoren nicht dieselbe Kupfersorte anwendeten, und dass die Werthe $\frac{13,85}{10^{15}}$ und $\frac{14,47}{10^{15}}$ keine grössere Differenz des Widerstandes zeigen, als man auf anderem Wege zwischen verschiedenen Kupfersorten gefunden hat.

XII.

Die Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Von O. Schlömilch.

Durch die neueren Arbeiten von Weiler (Crelle's Journal, Bd. 51) und Spitzer (Wien 1860) ist die Integration der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$1)\qquad (a_2 + b_2 x)\frac{d^2 y}{dx^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{dy}{dx} + (a_0 + b_0 x)\,y = 0$$

so wesentlich gefördert worden, dass es wohl an der Zeit sein dürfte, die gewonnenen Resultate zu einem Ganzen zu verschmelzen und hierbei das nur theoretisch oder formell Interessante von dem praktisch Brauchbaren zu sondern. Eine solche kritische Zusammenstellung wollen wir im Folgenden geben und gleichzeitig die Theorie in einigen Punkten vervollständigen.

1.

Zunächst möge die naheliegende Frage discutirt werden, unter welchen Umständen die Differentialgleichung 1) ein particuläres Integral von der Form

2) $$y = e^{\lambda x}$$

besitzt, wo λ eine noch zu bestimmende Constante bezeichnet. Die Substitution des genannten Ausdrucks giebt nun

$$(a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) + (b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0)\, x = 0,$$

was für jedes x richtig ist, wenn die Gleichungen

3) $$\begin{cases} a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0, \\ b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0 = 0 \end{cases}$$

zusammen bestehen. Diese Coexistenz findet erstens statt, sobald die vorliegenden Gleichungen zwei gemeinschaftliche Wurzeln haben; dann würde sich aber die zweite Gleichung nur durch einen gemeinschaftlichen Factor k von der ersten unterscheiden d. h.

$$b_2 = k a_2, \quad b_1 = k a_1, \quad b_0 = k a_0,$$

sein, und statt der Differentialgleichung 1) hätte man die einfachere

$$a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 = 0,$$

deren vollständiges Integral bekanntlich ist

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

$$\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{(a_1)^2 - 4 a_0 a_2}}{2 a_2}, \quad \lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{(a_1)^2 - 4 a_0 a_2}}{2 a_2}.$$

Die Gleichungen 3) können aber auch zusammen bestehen, wenn sie nur eine gemeinschaftliche Wurzel besitzen und diese für λ genommen wird. Eine solche gemeinschaftliche Wurzel ist vorhanden, sobald die Coefficienten $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ der Bedingung

4) $$(a_0 b_1 - a_1 b_0)(a_1 b_2 - a_2 b_1) = (a_0 b_2 - a_2 b_0)^2$$

genügen; diese ist gleichzeitig die gesuchte Bedingung, unter welcher $y = e^{\lambda x}$ ein particuläres Integral der Differentialgleichung 1) darstellt.

Um hieraus das allgemeine Integral abzuleiten, setzen wir

5) $$y = e^{\lambda x} z,$$

wo λ die vorige Bedeutung hat und z eine neue abhängige Variabele bezeichnet. Wir erhalten jetzt

$$\left.\begin{aligned} &(a_2 + b_2 x) \frac{d^2 z}{dx^2} + [2 \lambda (a_2 + b_2 x) + (a_1 + b_1 x)] \frac{dz}{dx} \\ &+ [(a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) + (b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0) x]\, z \end{aligned}\right\} = 0;$$

hier verschwindet der Coefficient von z, und wenn

$$\frac{dz}{dx} = z', \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{dz'}{dx}$$

gesetzt wird, so giebt die Trennung der Variabelen

6) $$\frac{dz'}{z'} = -\left[2 \lambda + \frac{a_1 + b_1 x}{a_2 + b_2 x}\right] dx.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung ist sehr einfach, erfordert aber die Unterscheidung der beiden Fälle $b_2 = 0$ und $b_2 \lesssim 0$.

Für $b_2 = 0$ erhält man aus No. 6)

$$lz' = -\left(2\lambda + \frac{a_1}{a_2}\right)x - \frac{b_1}{2a_2}x^2 + C$$
$$= -(2\lambda + \varkappa)\,x - \mu x^2 + C,$$

worin $\varkappa$ und μ unmittelbar verständliche Abkürzungen sind; weiter ist

$$z' = C_1 e^{-(2\lambda+\varkappa)x - \mu x^2},$$

daraus findet sich z und nachher

7) $$y = e^{\lambda x}\left[C_0 + C_1\int e^{-(\varkappa+2\lambda)x - \mu x^2}\,dx\right],$$
$$\varkappa = \frac{a_1}{a_2},\quad \mu = \frac{b_1}{2a_2}.$$

Wegen $b_2 = 0$ ist zufolge der zweiten Gleichung in No. 3)

$$\lambda = -\frac{b_0}{b_1}$$

und die Bedingungsgleichung 4) lautet einfacher

$$(a_0 b_1 - a_1 b_0)\,b_1 + a_2 b_0^2 = 0.$$

Wenn zweitens b_2 einen von Null differirenden Werth besitzt, so liefert die Gleichung 6)

$$lz' = -\left(2\lambda + \frac{b_1}{b_2}\right)x + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{(b_2)^2}\,l(a_2 + b_2 x) + C$$

und schliesslich

8) $$y = e^{\lambda x}\left[C_0 + C_1\int e^{-(\varkappa+2\lambda)x}(a_2 + b_2 x)^{\mu}\,dx\right]$$
$$\varkappa = \frac{b_1}{b_2},\quad \mu = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{(b_2)^2};$$

dabei ist λ die gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen 3).

Wie man sieht, kann das allgemeine Integral der Differentialgleichung 1) immer entwickelt werden, wenn die Bedingung 4) erfüllt ist; im Folgenden setzen wir daher voraus, dass die Gleichung 4) nicht statt finde.

§. 2.

Bevor wir an die Integration der allgemeinen Gleichung 1) gehen, wollen wir erst zeigen, wie letztere durch Transformationen vereinfacht und auf eine gewisse Normalform zurückgeführt werden kann. Der leichteren Uebersicht wegen unterscheiden wir drei Hauptfälle, ob nämlich $b_2 = b_1 = 0$, oder nur $b_2 = 0$, oder ob $b_2 \gtrless 0$ ist; dieser Unterscheidung liegt die Bemerkung zu Grunde, dass der Ausdruck $b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0$ entweder constant oder linear oder höchstens quadratisch sein kann.

Erster Hauptfall: $b_2 = b_1 = 0$, mithin

9) $$a_2\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + (a_0 + b_0 x) = 0.$$

Setzt man

$$y = e^{\lambda x}\eta,$$

wo λ vorläufig *noch unbestimmt* bleiben mag, so ergiebt sich

$$a_2 \frac{d^2\eta}{dx^2} + (2a_2\lambda + a_1)\frac{d\eta}{dx} + (a_1\lambda + a_0 + b_0 x)\eta = 0.$$

Diese Gleichung wird einfacher, wenn man

11) $$\lambda = -\frac{a_1}{2a_2}$$

nimmt und mit a_2, welches keinenfalls Null ist, dividirt; sie erhält nä die Form

12) $$\begin{cases} \dfrac{d^2\eta}{dx^2} + (\alpha + \beta x)\eta = 0, \\ \alpha = \dfrac{2a_0a_2 - (a_1)^2}{(a_2)^2}, \qquad \beta = \dfrac{b_0}{a_2}. \end{cases}$$

Hier sind wieder zwei verschiedene Transformationen möglich.

Führt man nämlich statt x eine neue unabhängige Variabele ξ ei Hülfe der Gleichung

13) $$x = \delta + \varepsilon\xi,$$

so geht die Differentialgleichung über in

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + [(\alpha + \beta\delta)\varepsilon^2 + \beta\varepsilon^3\xi]\eta = 0$$

und für

14) $$\delta = -\frac{\alpha}{\beta}, \qquad \varepsilon = \frac{1}{\sqrt[3]{\beta}}$$

wird daraus

15) $$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \xi\eta = 0.$$

Hätte man das Integral dieser Differentialgleichung gefunden, et

15*) $$\eta = f(\xi),$$

so würde

$$\xi = \frac{x - \delta}{\varepsilon} = \frac{\alpha + \beta x}{\sqrt[3]{\beta^2}}$$

zu substituiren sein; das Integral von No. 12) wäre dann

12*) $$\eta = f\left(\frac{\alpha + \beta x}{\sqrt[3]{\beta^2}}\right)$$

und das Integral von No. 9)

9*) $$y = e^{\lambda x} f\left(\frac{\alpha + \beta x}{\sqrt[3]{\beta^2}}\right),$$

worin für α, β und λ die angegebenen Werthe gelten.

Setzt man in No. 12) allgemeiner

16) $$x = -\frac{\alpha}{\beta} + \varkappa\xi^n,$$

so hat man durch Differentiation in Beziehung auf die neue Variabel

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\eta}{dx}\cdot\frac{dx}{d\xi} = \frac{d\eta}{dx}\cdot\varkappa n\xi^{n-1},$$

und umgekehrt

$$\frac{d\eta}{dx}=\frac{\xi^{1-n}}{\varkappa n}\cdot\frac{d\eta}{d\xi};$$

nochmalige Differentiation der vorhergehenden Gleichung giebt

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}=\frac{d\eta}{dx}\varkappa n(n-1)\xi^{n-2}+\varkappa n\xi^{n-1}\frac{d\left(\frac{d\eta}{dx}\right)}{dx}\cdot\frac{dx}{d\xi}$$
$$=\frac{n-1}{\xi}\cdot\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{d^2\eta}{dx^2}\varkappa^2 n^2\xi^{2n-2}$$

und umgekehrt

$$\frac{d^2\eta}{dx^2}=\frac{\xi^{2-2n}}{\varkappa^2 n^2}\cdot\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+\frac{(1-n)\,\xi^{1-2n}}{\varkappa^2 n^2}\cdot\frac{d\eta}{d\xi}.$$

Nach Substitution dieses Ausdruckes und des Werthes von x verwandelt sich die Gleichung 12) in nachstehende

$$\xi\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+(1-n)\frac{d\eta}{d\xi}+n^2\beta\varkappa^3\xi^{3n-1}\eta=0,$$

welche linear wird für $n=\frac{2}{3}$, nämlich

17) $$\xi\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+\frac{1}{3}\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{4}{9}\beta\varkappa^3\xi\eta=0.$$

Setzt man weiter

18) $$\eta=e^{\varrho\xi}\zeta,$$

so erhält man für die Unbekannte ζ die Differentialgleichung

$$\xi\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}+(\tfrac{1}{3}+2\varrho\xi)\frac{d\zeta}{d\xi}+[\tfrac{1}{3}\varrho+(\varrho^2+\tfrac{4}{9}\beta\varkappa^3)\xi]\,\zeta=0,$$

und wenn hier

19) $$\varrho=\tfrac{1}{2},\quad \varkappa=-\sqrt[3]{\frac{9}{16\beta}}$$

genommen wird, so ergiebt sich

20) $$\xi\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}+(\tfrac{1}{3}+\xi)\frac{d\zeta}{d\xi}+\tfrac{1}{6}\zeta=0.$$

Diese Differentialgleichung steht unter der Form

21) $$\begin{cases}\xi\dfrac{d^2\zeta}{d\xi^2}+(p+q+\xi)\dfrac{d\zeta}{d\xi}+p\zeta=0,\\ p=q=\tfrac{1}{6},\end{cases}$$

und es ist dies insofern bemerkenswerth, als sich nachher zeigen wird, dass die Gleichung 21) als Normalform der allgemeinen Differentialgleichung 1) gelten kann.

Nennen wir das Integral von No. 20)

20*) $$\zeta=F(\xi),$$

so haben wir für No. 17)

17*) $$\eta=e^{\frac{1}{2}\xi}F(\xi),$$

und erhalten hieraus das Integral von 12), indem wir, gemäss No. 16)

$$\xi = \left[-\sqrt[3]{\frac{16\beta}{9}} \cdot \frac{\alpha + \beta x}{\beta}\right]^{\frac{3}{2}}$$

substituiren; zur Abkürzung sei hier

22) $$\mu = -\alpha \sqrt[3]{\frac{4}{9\beta^2}}, \quad \nu = -\sqrt[3]{\frac{4\beta}{9}},$$

dann wird $\xi = 2(\mu + \nu x)^{\frac{3}{2}}$, und das Integral von No. 12) ist

12*) $$\eta = e^{\sqrt{(\mu+\nu x)^3}} F[2\sqrt{(\mu + \nu x)^3}],$$

sowie endlich das Integral von No. 9)

9*) $$y = e^{\lambda x + \sqrt{(\mu+\nu x)^3}} F[2\sqrt{(\mu + \nu x)^3}],$$

worin λ, μ, ν durch a_0, a_1, a_2 und b_2 auszudrücken sind.

§. 3.

Zweiter Hauptfall: $b_2 = 0$, $b_1 \gtrless 0$, also

23) $$a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{dy}{dx} + (a_0 + b_0)\, y = 0.$$

Mit Hülfe der Substitution

24) $$y = e^{\lambda x}\eta,$$

worin λ vorläufig unbestimmt bleibt, gelangt man zu der neuen Differentialgleichung

$$a_2 \frac{d^2\eta}{dx^2} + (2a_2\lambda + a_1 + b_1 x)\frac{d\eta}{dx} + [a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 + (b_1\lambda + b_0)x]\,\eta = 0,$$

welche sich vereinfacht, wenn

25) $$\left\{\begin{aligned} \lambda &= -\frac{b_0}{b_1}, \\ \alpha_1 &= \frac{2a_2\lambda + a_1}{a_2} = \frac{a_1 b_1 - 2a_2 b_0}{a_2 b_1}, \quad \beta_1 = \frac{b_1}{a_2}, \\ \alpha_0 &= \frac{a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0}{a_2} = \frac{a_2(b_0)^2 - a_1 b_0 b_1 + a_0(b_1)^2}{a_2(b_1)^2} \end{aligned}\right.$$

gesetzt wird; man erhält nämlich

26) $$\frac{d^2\eta}{dx^2} + (\alpha_1 + \beta_1 x)\frac{d\eta}{dx} + \alpha_0\eta = 0.$$

Statt x möge eine neue unabhängige Variabele ξ mittelst der Gleichung

27) $$x = \delta + \varepsilon\sqrt{\xi}$$

eingeführt werden. Man findet zunächst

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{2\sqrt{\xi}}{\varepsilon} \cdot \frac{d\eta}{d\xi}, \quad \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{2}{\varepsilon^2}\left[2\xi\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \frac{d\eta}{d\xi}\right],$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke

$$\xi\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + [\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\varepsilon(\alpha_1 + \beta_1\delta + \beta_1\varepsilon\sqrt{\xi})\sqrt{\xi}]\frac{d\eta}{d\xi} + \tfrac{1}{4}\alpha_0\varepsilon^2\eta = 0.$$

Um die vorliegende Gleichung zu vereinfachen, nehmen wir

28) $$\delta = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{2}{\beta_1}}$$

und erhalten

$$\xi \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + (\tfrac{1}{2} + \xi)\frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\alpha_0}{2\beta_1}\eta = 0,$$

oder, was auf Dasselbe hinauskommt,

29) $$\begin{cases} \xi \dfrac{d^2\eta}{d\xi^2} + (p + q + \xi)\dfrac{d\eta}{d\xi} + p\eta = 0, \\ p = \dfrac{\alpha_0}{2\beta_1}, \quad q = \tfrac{1}{2} - p = \dfrac{\beta_1 - \alpha_0}{2\beta_1}, \end{cases}$$

In dem speciellen Falle $\beta_1 = 0$ ist diese Transformation unausführbar aber auch nicht nöthig; da nämlich β_1 nur dann verschwinden kann, wenn $b_1 = 0$ ist, so hätte man es mit einer Differentialgleichung der ersten Form 9) zu thun.

Vorausgesetzt, dass man das Integral der Differentialgleichung 29) in der Form

29*) $$\eta = F(\xi)$$

darstellen kann, ist nun das Integral von No. 26):

26*) $$\eta = F\left[\left(\frac{x - \delta}{\varepsilon}\right)^2\right] = F\left[\frac{(\alpha_1 + \beta_1 x)^2}{2\beta_1}\right],$$

und das Integral von No. 23)

23*) $$y = e^{\lambda x} F\left[\frac{(\alpha_1 + \beta_1 x)^2}{2\beta_1}\right],$$

wobei α_1, β_1 und λ die in No. 25) angegebenen Werthe besitzen.

§. 4.

Dritter Hauptfall: Es verschwinde b_2 nicht, und daher sei die Differentialgleichung von der allgemeinen Form

30) $$(a_2 + b_2 x)\frac{d^2y}{dx^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{dy}{dx} + (a_0 + b_0)y = 0.$$

Wie früher benutzen wir zunächst die Substitution

31) $$y = e^{\lambda x}\eta$$

und erhalten für η die Differentialgleichung

$$\left.\begin{aligned} &(a_2 + b_2 x)\frac{d^2\eta}{dx^2} + [2a_2\lambda + a_1 + (2b_2\lambda + b_1)x]\frac{d\eta}{dx} \\ &+ [a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 + (b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0)x]\eta \end{aligned}\right\} = 0.$$

Für λ setzen wir eine Wurzel der Gleichung

32) $$b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0 = 0,$$

und führen folgende Abkürzungen ein:

33) $$\begin{cases} \alpha_2 = a_2, \quad \beta_2 = b_2, \quad \alpha_1 = 2a_2\lambda + a_1, \quad \beta_1 = 2b_2\lambda + b_1, \\ \alpha_0 = a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0; \end{cases}$$

wir haben dann einfacher

34) $$(\alpha_2+\beta_2 x)\frac{d^2\eta}{dx^2}+(\alpha_1+\beta_1 x)\frac{d\eta}{dx}+\alpha_0\eta=0.$$

Die weiteren Schritte der Rechnung sind davon abhängig, ob die Glei 32) gleiche oder verschiedene Wurzeln besitzt.

A. Im ersten Falle hat man

35) $$b_0=\frac{(b_1)^2}{4b_2},\quad \lambda=-\frac{b_1}{2b_2},\quad \beta_1=0,$$

und daher die einfachere Form

36) $$(\alpha_2+\beta_2 x)\frac{d^2\eta}{dx^2}+\alpha_1\frac{d\eta}{dx}+\alpha_0\eta=0,$$

worin $\beta_2=b_2$ von Null verschieden ist. Die Substitution

37) $$x=-\frac{\alpha_2}{\beta_2}+\tfrac{1}{2}\varepsilon\xi^2$$

giebt nun

$$\alpha_2+\beta_2 x=\tfrac{1}{2}\beta_2\varepsilon\xi^2,\quad \frac{d\eta}{dx}=\frac{1}{2\varepsilon\xi}\cdot\frac{d\eta}{d\xi},$$
$$\frac{d^2\eta}{dx^2}=\frac{1}{\varepsilon^2\xi^3}\left[\xi\frac{d^2\eta}{d\xi^2}-\frac{d\eta}{d\xi}\right],$$

und daher wird die Differentialgleichung 37) zur folgenden

$$\xi\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+\left(\frac{2\alpha_1}{\beta_2}-1\right)\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{2\alpha_0\varepsilon}{\beta_2}\eta=0.$$

Wir setzen weiter

38) $$\eta=e^{\frac{1}{2}\xi}\zeta$$

und erhalten für ζ die neue Differentialgleichung

$$\xi\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}+\left[\frac{2\alpha_1}{\beta_2}-1+\xi\right]\frac{d\zeta}{d\xi}+\left[\frac{\alpha_1}{\beta_2}-\tfrac{1}{2}+\left(\frac{2\alpha_0\varepsilon}{\beta_2}+\tfrac{1}{4}\right)\xi\right]\zeta=0;$$

diese wird einfacher durch die Annahme

39) $$\varepsilon=-\frac{\beta_2}{8\alpha_0}$$

und stellt sich unter folgende, bereits erwähnte Form

40) $$\begin{cases}\xi\dfrac{d^2\zeta}{d\xi^2}+(p+q+\xi)\dfrac{d\zeta}{d\xi}+p\zeta=0,\\[2mm] p=q=\dfrac{\alpha_1}{\beta_2}-\tfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Aus dem Integral der vorigen Gleichung, welches wieder

40*) $$\zeta=F(\xi)$$

heissen möge, erhält man das Integral von 36) mit Hilfe der Gleichun

$$\eta=e^{\frac{1}{2}\xi}F(\xi),\quad \xi=\sqrt{\frac{2(\alpha_2+\beta_2 x)}{\beta_2\varepsilon}}=\frac{2\sqrt{-4\alpha_0(\alpha_2+\beta_2 x)}}{\beta_2},$$

wobei zur Abkürzung

41) $$\mu=-\frac{4\alpha_0\alpha_2}{(\beta_2)^2},\quad \nu=-\frac{4\alpha_0}{\beta_2}$$

sein möge; das Integral von 36) ist dann

36*) $$\eta = e^{\sqrt{\mu + \nu x}} F(2\sqrt{\mu + \nu x}),$$
mithin das Integral von 30)

30*) $$y = e^{\lambda x + \sqrt{\mu + \nu x}} F(2\sqrt{\mu + \nu x}).$$

Drückt man λ, μ, ν, p durch die Coefficienten der Gleichung 30) aus, so gelten folgende Werthe:

$$b_0 = \frac{(b_1)^2}{4 b_2}, \quad \lambda = -\frac{b_1}{2 b_2},$$

$$\mu = -a_2 \frac{4 a_0 (b_2)^2 - 2 a_1 b_1 b_2 + a_2 (b_1)^2}{(b_2)^4},$$

$$\nu = -\frac{4 a_0 (b_2)^2 - 2 a_1 b_1 b_2 + a_2 (b_1)^2}{(b_2)^3},$$

$$p = q = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{(b_2)^2} - \tfrac{1}{2}.$$

B. In dem allgemeinen Falle, wo die quadratische Gleichung 32) verschiedene Wurzeln besitzt, wird die Sache am einfachsten. Durch Substitution von

42) $$x = -\frac{\alpha_2}{\beta_2} + \varkappa \xi$$

erhält man nämlich aus No. 34)

$$\xi \frac{d^2 \eta}{d \xi^2} + \left[\frac{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}{(\beta_2)^2} + \frac{\beta_1 \varkappa}{\beta_2} \xi\right] \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\alpha_0 \varkappa}{\beta_2} \eta = 0,$$

und da hier β_1 nicht Null ist, so lässt sich die Gleichung mittelst der Annahme

43) $$\varkappa = \frac{\beta_2}{\beta_1}$$

vereinfachen. Das Resultat ist von der Form

44) $$\begin{cases} \xi \dfrac{d^2 \eta}{d \xi^2} + (p + q + \xi) \dfrac{d\eta}{d\xi} + p\eta = 0, \\ p = \dfrac{\alpha_0}{\beta_1}, \quad q = \dfrac{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}{(\beta_2)^2} - \dfrac{\alpha_0}{\beta_1}. \end{cases}$$

Nach No. 42) und 43) hat man

$$\xi = \frac{\alpha_2 + \beta_2 x}{\beta_2 \varkappa} = \frac{\beta_1 (\alpha_2 + \beta_2 x)}{(\beta_2)^2},$$

und wenn daher das Integral von No. 44) mit

44*) $$\eta = F(\xi)$$

bezeichnet wird, so ist das Integral von No. 34)

34*) $$\eta = F\left[\frac{\beta_1 (\alpha_2 + \beta_2 x)}{(\beta_2)^2}\right],$$

und das Integral von No. 30)

30*) $$y = e^{\lambda x} F\left[\frac{\beta_1 (\alpha_2 + \beta_2 x)}{(\beta_2)^2}\right],$$

wobei λ, α_2 und β_2 durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung auszudrücken sind.

Die Nebeneinanderstellung der letzten Formen (21, 29, 40, 44), wozu die vorigen Umwandlungen führten, zeigt augenblicklich die Richtigkeit eines eleganten, von Weiler gefundenen Satzes, welcher lautet: Die Differentialgleichung

$$(a_2 + b_2 x) \frac{d^2 y}{dx^2} + (a_1 + b_1 x) \frac{dy}{dx} + (a_0 + b_0 x) y = 0$$

kann durch gehörige Substitutionen immer auf die Normalform

$$45) \qquad \xi \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + (p + q + \xi) \frac{d\varphi}{d\xi} + p\varphi = 0$$

gebracht werden. Mit dieser haben wir uns nur noch zu beschäftigen, und zwar wollen wir in §. 5 vorläufig einige Eigenschaften von ihr entwickeln, welche für die nachherigen Integrationen von Wichtigkeit sind.

§. 5.

Durch Substitution von

$$46) \qquad \varphi = e^{-\xi} \psi$$

geht die Gleichung 45) in die folgende über

$$\xi \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + (q + p - \xi) \frac{d\psi}{d\xi} - q\psi = 0$$

und daraus wird für $\xi = -\xi_1$

$$47) \qquad \xi_1 \frac{d^2 \psi}{d\xi_1^2} + (q + p + \xi_1) \frac{d\psi}{d\xi_1} + q\psi = 0;$$

dies ist, wie man sieht, Dasselbe, als hätte man q und p gegeneinander vertauscht. Bezeichnet man das Integral von No. 45) mit $\varphi = F(p, q, \xi)$, so muss das Integral von 47) mit $\psi = F(q, p, \xi_1)$ bezeichnet werden und die Gleichung 46) giebt dann

$$F(p, q, \xi) = e^{-\xi} F(q, p, \xi_1) = e^{-\xi} F(q, p, -\xi);$$

oder auch

$$48) \qquad F(p, q, -\xi) = e^{+\xi} F(q, p, +\xi)$$

und umgekehrt

$$49) \qquad F(q, p, +\xi) = e^{-\xi} F(p, q, -\xi).$$

Die Formel 48) zeigt, dass der Fall eines negativen ξ auf den Fall eines positiven ξ zurückgeführt und daher ξ immer positiv genommen werden kann; aus No. 49) ersieht man den Effect der gegenseitigen Vertauschung von p und q.

Setzt man in der Gleichung 45)

$$\varphi = \xi^r \omega,$$

so ergiebt sich nach Division mit ξ^{r-1}

$$\xi^2 \frac{d^2 \omega}{d\xi^2} + \xi (2r + p + q + \xi) \frac{d\omega}{d\xi} + [r(r + p + q - 1) + (r + p)\xi] \omega = 0;$$

die linke Seite wird durch ξ theilbar, sobald r den Werth

$$r = 1 - p - q$$

erhält; es bleibt

$$\xi \frac{d^2 \omega}{d \xi^2} + (2 - p - q + \xi) \frac{d \omega}{d \xi} + (1 - q) \omega = 0,$$

und dies ist dasselbe, als wäre in No. 45) $1 - q$ für p und zugleich $1 - p$ für q gesetzt worden. Man hat daher $\omega = F(1 - q, 1 - p, \xi)$ und wegen $\varphi = \xi^r \omega$

50) $$F(p, q, \xi) = \xi^{1-p-q} F(1 - q, 1 - p, \xi)$$

oder auch

51) $$F(-p, -q, \xi) = \xi^{1+p+q} F(1 + q, 1 + p, \xi);$$

diese Formel zeigt, wie der Fall negativer p und q auf den Fall positiver p und q zurückgeführt werden kann.

Bemerkenswerth ist noch, dass eine mehrmalige Differentiation der Gleichung 45) wieder eine Gleichung von derselben Form giebt. Durch m-malige Differentiation erhält man nämlich

$$\xi \frac{d^{m+2} \varphi}{d \xi^{m+2}} + (m + p + q + \xi) \frac{d^{m+1} \varphi}{d \xi^{m+1}} + (m + p) \frac{d^m \varphi}{d \xi^m} = 0,$$

und wenn

$$\frac{d^m \varphi}{d \xi^m} = \Theta$$

gesetzt wird, so folgt weiter

$$\xi \frac{d^2 \Theta}{d \xi^2} + (m + p + q + \xi) \frac{d \Theta}{d \xi} + (m + p) \Theta = 0,$$

und dies ist das Nämliche, als wenn in No. 45) $p + m$ für p gesetzt worden wäre. Man hat daher $\Theta = F(p + m, q, \xi)$ und nach dem Vorigen

52) $$F(p + m, q, \xi) = \frac{d^m F(p, q, \xi)}{d \xi^m}.$$

Differenzirt man auch die Gleichung 47) n-mal in Beziehung auf ξ_1, so gelangt man ebenso leicht zu der Formel

$$F(q + n, p, \xi_1) = \frac{d^n F(q, p, \xi_1)}{d \xi_1^n},$$

oder

$$e^{\xi} F(p, q + n, \xi) = \frac{d^n [e^{\xi} F(p, q, \xi)]}{(-d \xi)^n},$$

und es ist daher

53) $$F(p, q + n, \xi) = (-1)^n e^{-\xi} \frac{d^n [e^{+\xi} F(p, q, \xi)]}{d \xi^n}.$$

Bei Ausführung der angedeuteten Differentiation erhält man $F(p, q + n, \xi)$ ausgedrückt durch $F(p, q, \xi)$, $F(p + 1, q, \xi)$, $F(p + 2, q, \xi)$ u. s. w.

Mit Hülfe der vorigen Relationen lässt sich zeigen, dass die Function $F(p, q, \xi)$ immer gefunden werden kann, wenn sie für positive ächt gebrochene p und q bekannt ist. Wir betrachten nämlich folgende vier Fälle.

a. Es mögen p und q positive unächte Brüche sein; wir setzen da

$$p = m + r, \quad q = n + s,$$

wo m und n ganze positive Zahlen, r und s positive ächte Brüche bezeichnen, die auch Null sein können. Nach Formel 52) haben wir jetzt, indem wir die mehrmalige Differentiation durch D^m andeuten,

$$F(m + r, n + s, \xi) = D^m F(r, n + s, \xi);$$

wenden wir noch rechter Hand die Formel 53) an, so wird

$$54) \quad F(m + r, n + s, \xi) = (-1)^n D^m [e^{-\xi} D^n \{e^{+\xi} F(r, s, \xi)\}].$$

b. Bei gleichzeitig negativen p und q setzen wir ähnlich wie vorhin

$$p = -(m - 1 + r), \quad q = -(n - 1 + s)$$

und erhalten zunächst aus No. 51)

$$F(-m + 1 - r, -n + 1 - s, \xi) = \xi^{m+n+r+s-1} F(n + s, m + r, \xi);$$

nach Formel 54) giebt dies

$$55) \quad \begin{cases} F(-m + 1 - r, -n + 1 - s, \xi) \\ = (-1)^m \xi^{m+n+r+s-1} D^n [e^{-\xi} D^m \{e^{+\xi} F(s, r, \xi)\}]. \end{cases}$$

c. Wenn p positiv, q negativ ist, so sei

$$p = m + r, \quad q = -n + s;$$

indem man der Reihe nach die Formeln 52) und 51) anwendet, gelangt man zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} F(m + r, -n + s, \xi) &= D^m F(r, -n + s, \xi) \\ &= D^m [\xi^{1-r+n-s} F(n + 1 - s, 1 - r, \xi)]; \end{aligned}$$

d. i.

$$56) \quad F(m + r, -n + s, \xi) = D^m [\xi^{n+1-r-s} D^n F(1 - s, 1 - r, \xi)].$$

d. Bei negativen p und positiven q setzen wir

$$p = -m + r, \quad q = n + s,$$

und benutzen der Reihe nach die Formeln 53) und 51); dies giebt

$$\begin{aligned} F(-m + r, n + s, \xi) &= (-1)^n e^{-\xi} D^n [e^{+\xi} F(-m + r, s, \xi)] \\ &= (-1)^n e^{-\xi} D^n [e^{\xi} \xi^{1+m-r-s} F(1 - s, m + 1 - r, \xi)] \end{aligned}$$

und bei nochmaliger Anwendung von Formel 53)

$$57) \quad \begin{cases} F(-m + r, n + s, \xi) \\ = (-1)^{m+n} e^{-\xi} D^n [\xi^{m+1-r-s} D^m \{e^{+\xi} F(1 - s, 1 - r, \xi)\}]. \end{cases}$$

Da r und s, mithin auch $1 - r$ und $1 - s$ positive ächte Brüche sind, so hat man den Satz: Das Integral der Differentialgleichung

$$\xi \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + (p + q + \xi) \frac{d\varphi}{d\xi} + p\varphi = 0$$

lässt sich immer auf das Integral der ähnlich geformten Differentialgleichung

$$\xi \frac{d^2\varphi_1}{d\xi^2} + (p_1 + q_1 + \xi) \frac{d\varphi_1}{d\xi} + p_1 \varphi_1 = 0$$

zurückzuführen, worin p_1 und q_1 positive ächte Brüche sind.

Der eigentliche Erfinder dieses Theoremes ist Spitzer, obschon derselbe es nicht in der vorliegenden kurzen Form ausgesprochen hat. Dies liegt an dem Umstande, dass Spitzer immer die Differentialgleichung 1)

direct nach der Laplace'schen Methode integrirt, statt auf die von Weiler angegebene reducirte Form zurückzugehen.

§. 6.

Die Integration der Gleichung 45) ist sehr leicht, wenn entweder p oder q verschwindet. Für $p = 0$ hat man nämlich, wenn $\frac{d\varphi}{d\xi}$ mit φ' bezeichnet wird,

$$\frac{d\varphi'}{\varphi'} = -\left(\frac{q}{\xi} + 1\right) d\xi$$

und daraus findet sich

58) $$\varphi = C\int \xi^{-q} e^{-\xi} d\xi + C_1.$$

Wenn $q = 0$ ist, vertauscht man p und q gegen einander, d. h. man integrirt die Gleichung 47) und erhält nachher

59) $$\varphi = e^{-\xi}\left[C\int \xi^{-p} e^{+\xi} d\xi + C_1\right].$$

Unter welchen Umständen p oder q verschwinden, sieht man leicht aus den früher angegebenen Werthen dieser Constanten, und daher möge nur für den allgemeinen Fall (§. 4, B) eine Bemerkung folgen. Nach Formel 44) wird $p = 0$, wenn $\alpha_0 = 0$, d. h. wenn

60) $$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0,$$

und da λ durch die Gleichung

61) $$b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0 = 0$$

bestimmt war, so kann das Verschwinden von p nur eintreten, sobald beide quadratische Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel λ besitzen, wozu die Bedingung

62) $$(a_0 b_1 - a_1 b_0)(a_1 b_2 - a_2 b_1) = (a_0 b_2 - a_2 b_0)^2$$

gehört, und wenn für λ diese gemeinschaftliche Wurzel λ_1 genommen wird. Damit kommt man auf den in §. 1 erörterten Fall zurück. Es verschwindet ferner q unter der Bedingung

$$(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\beta_1 - \alpha_0(\beta_2)^2 = 0,$$

welche nach Substitution der Werthe von $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ übergeht in

63) $$(a_1 b_2 - a_2 b_1)(2b_2\lambda + b_1) - (b_2)^2(a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) = 0.$$

Durch Elimination von λ aus 61) und 63) gelangt man wieder zur Bedingungsgleichung 62); es ist daher wiederum erforderlich, dass die Gleichungen 60) und 61) eine gemeinschaftliche Wurzel λ_1 besitzen, nur darf man nicht diese für λ nehmen und muss folglich die andere Wurzel der Bestimmungsgleichung 61) für λ setzen. In der That überzeugt man sich *a posteriori* sehr leicht, dass der Werth

$$\lambda = -\lambda_1 - \frac{b_1}{b_2}$$

die Gleichung 63) befriedigt.

Wir betrachten nun den etwas allgemeineren Fall, wo eine der Grössen p und q eine ganze positive Zahl ist. Bei ganzen positiven $p = m$ erhält man mittelst der Formeln 52) und 58)

$$F(m, q, \xi) = D^m F(0, q, \xi)$$
$$= D^m \left[C \int \xi^{-q} e^{-\xi} d\xi + C_1\right] = C D^{m-1} (\xi^{-q} e^{-\xi});$$

dies ist aber nur ein particuläres Integral, und daher bedarf die Methode einer kleinen Modification. Denken wir uns $\varphi = F(m, q, \xi)$ als $m$ten Differentialquotienten einer anderen Unbekannten ω und substituiren demgemäss

$$\varphi = \frac{d^m \omega}{d\xi^m} = D^m \omega$$

in die Gleichung

$$\text{64)} \qquad \xi \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + (m + q + \xi) \frac{d\varphi}{d\xi} + m\varphi = 0,$$

so gelangen wir zu der neuen Differentialgleichung

$$\xi D^{m+2} \omega + (m + q + \xi) D^{m+1} \omega + m D^m \omega = 0,$$

welche übereinkommt mit

$$D^m [\xi D^2 \omega + (q + \xi) D\omega] = 0.$$

Dieser Gleichung genügt ein ω, für welches

$$\xi D^2 \omega + (q + \xi) D\omega = C$$

wird oder, weil $D\omega = \omega'$ ist,

$$\frac{d\omega'}{d\xi} + \left(\frac{q}{\xi} + 1\right) \omega' = \frac{C}{\xi}.$$

Nach einem sehr bekannten Verfahren findet man als Integral dieser Differentialgleichung

$$\omega' = \xi^{-q} e^{-\xi} \left[C \int \xi^{q-1} e^{+\xi} d\xi + C_1\right],$$

und wegen $\varphi = D^m \omega = D^{m-1} \omega'$ hat man schliesslich

$$\text{65)} \quad \varphi = C D^{m-1} \left[\xi^{-q} e^{-\xi} \int \xi^{q-1} e^{+\xi} d\xi\right] + C_1 D^{m-1} [\xi^{-q} e^{-\xi}]$$

als vollständiges Integral von No. 64).

Bei positiven q und ξ lässt sich dieser Ausdruck in eine andere Form bringen, bei welcher die angedeuteten Differentiationen ausführbar werden. Es ist nämlich

$$\int \xi^{q-1} e^{+\xi} d\xi = \int_0^\xi t^{q-1} e^{+t} dt + C_0,$$

$$\frac{1}{\xi^q} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^\infty u^{q-1} e^{-\xi u} du,$$

mithin durch Substitution dieser Ausdrücke und bei Aenderung der Constanten C_1

$$\varphi = CD^{m-1}\left[\xi^{-q} e^{-\xi}\int_0^{\xi} t^{q-1} e^{+t} dt\right] + C_2 D^{m-1}\left[e^{-\xi}\int_0^{\infty} u^{q-1} e^{-\xi u} du\right].$$

Im ersten Integrale setzen wir $t = \xi(1-u)$ und erhalten

$$D^{m-1}\left[\xi^{-q} e^{-\xi}\int_0^{\xi} t^{q-1} e^{+t} dt\right] = D^{m-1}\int_0^1 (1-u)^{q-1} e^{-\xi u} du$$

$$= (-1)^{m-1}\int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{q-1} e^{-\xi u} du;$$

im zweiten Integrale ist

$$D^{m-1}\left[e^{-\xi}\int_0^{\infty} u^{q-1} e^{-\xi u} du\right] = D^{m-1}\int_0^{\infty} u^{q-1} e^{-\xi(1+u)} du$$

$$= (-1)^{m-1}\int_0^{\infty}(1+u)^{m-1} u^{q-1} e^{-\xi(1+u)} du,$$

mithin ergiebt sich, wenn der Factor $(-1)^{m-1}$ in die willkührlichen Constanten eingerechnet wird,

66) $$\varphi = C_1\int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{q-1} e^{-\xi u} du + C_2 e^{-\xi}\int_0^{\infty}(1+u)^{m-1} u^{q-1} e^{-\xi u} du.$$

Ist zweitens q eine ganze Zahl $= +n$, mithin die gegebene Differentialgleichung

67) $$\xi\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + (p+n+\xi)\frac{d\varphi}{d\xi} + p\varphi = 0,$$

so vertauscht man zuerst p und q gegeneinander wie in No. 47) und integrirt die Gleichung

$$\xi_1\frac{d^2\psi}{d\xi_1^2} + (n+p+\xi_1)\frac{d\psi}{d\xi_1} + n\psi = 0$$

auf dieselbe Weise wie vorhin die Gleichung 64); dies giebt

$$\psi = CD^{n-1}\left[\xi_1^{-p} e^{-\xi_1}\int \xi_1^{p-1} e^{+\xi_1} d\xi_1\right] + C_1 D^{n-1}[\xi_1^{-p} e^{-\xi_1}].$$

Wegen $\xi_1 = -\xi$ und vermöge Formel 46) folgt hieraus bei Aenderung der Constanten

68) $$\varphi = Ce^{-\xi} D^{n-1}\left[\xi^{-p} e^{+\xi}\int \xi^{p-1} e^{-\xi} d\xi\right] + C_1 e^{-\xi} D^{n-1}[\xi^{-p} e^{+\xi}].$$

Bei positiven p und ξ lässt sich dieser Ausdruck auf ähnliche Weise umwandeln, wie es vorhin mit dem unter No. 65) angegebenen Werthe von φ geschehen ist. Man hat nämlich einerseits

$$\int \xi^{p-1} e^{-\xi} d\xi = \int_0^{\xi} u^{p-1} e^{-u} du + C_0$$

und mit Hülfe der Substitution $u = \xi v$

$$\xi^{-p} e^{+\xi} \int \xi^{p-1} e^{-\xi} d\xi = \int_0^1 v^{p-1} e^{-\xi(1-v)} dv + \text{etc.};$$

andererseits ist

$$\xi^{-p} e^{+\xi} = \frac{e^{\xi}}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} v^{p-1} e^{-\xi v} dv$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)} \left[\int_0^1 v^{p-1} e^{\xi(1-v)} dv + \int_1^{\infty} v^{p-1} e^{-\xi(v-1)} dv \right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)} \left[\int_0^1 v^{p-1} e^{\xi(1-v)} dv + \int_0^{\infty} (1+u)^{p-1} e^{-\xi u} du \right];$$

nach Substitution dieser Werthe in No. 68) werden die angedeuteten Differentiationen ausführbar und man erhält

69) $$\varphi = C_1 \int_0^1 v^{p-1} (1-v)^{n-1} e^{-\xi v} dv + C_2 e^{-\xi} \int_0^{\infty} (1+u)^{p-1} u^{n-1} e^{-\xi u} du.$$

Auch in dem Falle, wo p oder q eine negative ganze Zahl ist, können ähnliche Methoden angewendet werden, doch wollen wir uns bei diesen Details nicht aufhalten.

§. 7.

Durch die Formeln 66) und 69) wird man auf die Vermuthung geführt, dass der Werth von φ, wenigstens in manchen Fällen, aus zwei bestimmten Integralen zusammengesetzt ist, in welchen die unabhängige Variabele (ξ) der Differentialgleichung die Rolle einer Constanten spielt. Dies bedarf einer genaueren Untersuchung.

Zu diesem Zwecke betrachten wir erstens den Ausdruck

70) $$M = \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1} e^{-\xi u} du.$$

Durch zweimalige Differentiation in Beziehung auf ξ erhalten wir

$$\frac{dM}{d\xi} = -\int_0^1 u^p (1-u)^{q-1} e^{-\xi u} du,$$

$$\frac{d^2 M}{d\xi^2} = +\int_0^1 u^{p+1} (1-u)^{q-1} e^{-\xi u} du,$$

und es ist daher

$$71)\qquad \xi\frac{d^2M}{d\xi^2}+(p+q+\xi)\frac{dM}{d\xi}+pM$$

$$=\int_0^1[p(1-u)-qu]\,u^{p-1}(1-u)^{q-1}e^{-\xi u}\,du-\xi\int_0^1 u^p(1-u)^q e^{-\xi u}\,du.$$

Wendet man auf das zweite Integral die theilweise Integration an, so hat man weiter

$$\xi\int u^p(1-u)^q e^{-\xi u}\,du$$

$$=-u^p(1-u)^q e^{-\xi u}+\int[p(1-u)-qu]\,u^{p-1}(1-u)^{q-1}e^{-\xi u}\,du;$$

vorausgesetzt nun, dass p und q gleichzeitig positiv und von Null verschieden sind, verschwindet $u^p(1-u)^q$ sowohl für $u=1$ als für $u=0$, und es ist daher

$$\xi\int_0^1 u^p(1-u)^q e^{-\xi u}\,du=\int_0^1[p(1-u)-qu]\,u^{p-1}(1-u)^{q-1}e^{-\xi u}\,du.$$

Nach Einführung dieses Werthes reducirt sich die rechte Seite der Gleichung 71) auf Null, und man ersieht hieraus, dass M ein particuläres Integral der Gleichung

$$\xi\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}+(p+q+\xi)\frac{d\varphi}{d\xi}+p\varphi=0$$

darstellt. Uebrigens kann dasselbe leicht in eine nach Potenzen von ξ fortschreitende Reihe verwandelt werden. Man braucht zu diesem Zwecke nur $e^{-\xi u}$ durch die bekannte Reihe zu ersetzen und die einzelnen Glieder zu integriren; für $p+q=s$ erhält man

$$72)\quad M=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(s)}\left[1-\frac{p}{s}\frac{\xi}{1}+\frac{p(p+1)}{s(s+1)}\frac{\xi^2}{1.2}-\frac{p(p+1)(p+2)}{s(s+1)(s+2)}\frac{\xi^3}{1.2.3}+\ldots\right].$$

Wir betrachten zweitens den Ausdruck

$$73)\qquad N=\int_0^\infty(1+u)^{p-1}u^{q-1}e^{-\xi(1+u)}\,du.$$

Durch eine der vorigen sehr ähnliche Rechnung ergiebt sich die Gleichung

$$74)\qquad \xi\frac{d^2N}{d\xi^2}+(p+q+\xi)\frac{dN}{d\xi}+pN$$

$$=-\int_0^\infty[pu+q(1+u)](1+u)^{p-1}u^{q-1}e^{-\xi(1+u)}du+\xi\int_0^\infty(1+u)^p u^q e^{-\xi(1+u)}\,du,$$

wobei das zweite Integral mittelst theilweiser Integration folgendermaasen umgestaltet werden kann:

$$\xi\int(1+u)^p u^q e^{-\xi(1+u)}\,du$$

$$=-(1+u)^p u^q e^{-\xi(1+u)}+\int[pu+q(1+u)](1+u)^{p-1}u^{q-1}e^{-\xi(1+u)}\,du.$$

Ist nun q positiv und ξ positiv oder eine complexe Zahl mit positivem reellen Bestandtheile, so verschwindet $u^q e^{-\xi(1+u)}$ sowohl für $u=0$ als für $u=\infty$, und daher bleibt

$$\xi\int_0^1 (1+u)^p u^q e^{-\xi(1+u)}\,du = \int_0^1 [pu+q(1+u)](1+u)^{p-1} u^{q-1} e^{-\xi(1+u)}du;$$

nach Substitution dieses Ausdrucks reducirt sich die rechte Seite der Gleichung 74) auf Null, und folglich ist N gleichfalls ein particuläres Integral der besprochenen Differentialgleichung.

Das mit N bezeichnete Integral lässt sich nicht unmittelbar in eine nach steigenden Potenzen von ξ fortschreitende Reihe verwandeln, wohl aber kann es leicht in eine sogenannte halbconvergente Reihe umgesetzt werden, und es liegt hierin keine Gefahr, wenn man den Rest dieser Reihe anzugeben weiss. Nach dem binomischen Satze ist nun allgemein, wenn ϑ einen positiven ächten Bruch bezeichnet,

$$(1+u)^{p-1} = 1 + \frac{p-1}{1}u + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}u^2 + \dots\dots$$
$$\dots\dots + \frac{(p-1)(p-2)\dots\dots(p-\overline{n-1})}{1.2\dots\dots(n-1)}u^{n-1}$$
$$+ \frac{(p-1)(p-2)\dots(p-n)}{1.2\dots\dots n}\cdot\frac{u^n}{(1+\vartheta u)^{n+1-p}};$$

substituirt man dies in No. 73), so kann man die n ersten Glieder leicht integriren und hat dann noch den Rest

$$\frac{(p-1)(p-2)\dots(p-n)}{1.2\dots\dots n}\int_0^\infty \frac{u^{q+n-1}}{(1+\vartheta u)^{n+1-p}}e^{-\xi u}du$$

hinzuzufügen. Der Werth des hierin vorkommenden Integrales ist positiv und zugleich, wenn $n > p-1$ genommen wird, kleiner als der Werth von

$$\int_0^\infty u^{q+n-1}e^{-\xi u}du = \frac{\Gamma(q+n)}{\xi^{q+n}};$$

er kann daher mit $\varrho\,\Gamma(q+n)\xi^{-q-n}$ bezeichnet werden, wo ϱ zwischen 0 und 1 enthalten ist. Nach diesen Bemerkungen zusammen erhält man ohne Mühe

$$75)\quad N = \frac{\Gamma(q)e^{-\xi}}{\xi^q}\Big[1 + \frac{(p-1)q}{1\,\xi} + \frac{(p-1)(p-2)q(q+1)}{1.2\,\xi^2} + \dots$$
$$\dots + \frac{(p-1)\dots(p-\overline{n-1})q(q+1)\dots(q+n-2)}{1.2\dots(n-1)\,\xi^{n-1}}$$
$$+ \varrho\frac{(p-1)\dots(p-n)q(q+1)\dots(q+n-1)}{1.2\dots n\,\xi^n}\Big].$$

Wie man sieht, beträgt der Rest der Reihe, sobald letztere Zeichenwechsel erhalten hat, immer einen aliquoten Theil desjenigen Terms, der

bei weiterer Fortsetzung folgen würde. Hiermit ist gleichzeitig der Beweis geliefert, dass N immer einen bestimmten angebbaren Werth besitzt.

§. 8.

Nachdem man zwei particuläre Integrale der zu integrirenden Differentialgleichung kennen gelernt hat, von welchen das erste für $p>0$ und $q>0$, das zweite für $q>0$ und $\xi>0$ gilt, ist es sehr leicht, unter allen Umständen das allgemeine Integral anzugeben. Wir müssen dabei auf folgende vier Fälle eingehen.

a. Bei positiven p und q sind beide particuläre Integrale brauchbar, wofern ξ, oder sein reeller Bestandtheil, positiv ist; man hat daher für $\xi>0$

$$76)\quad \varphi = C_1\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}e^{-\xi u}\,du + C_2 e^{-\xi}\int_0^\infty (1+u)^{p-1}u^{q-1}e^{-\xi u}\,du.$$

Bei negativen ξ macht man von der Formel

$$F(p,q,\xi) = e^{-\xi}F(q,p,-\xi)$$

Gebrauch, wo nun $-\xi$ positiv ist; indem man $F(q,p,-\xi)$ nach No. 76) bildet, erhält man zunächst

$$\varphi = C_1 e^{-\xi}\int_0^1 u^{q-1}(1-u)^{p-1}e^{\xi u}\,du + C_2\int_0^\infty (1+u)^{q-1}u^{p-1}e^{\xi u}\,du$$

oder auch, wenn man im ersten Integrale $1-u$ an die Stelle von u treten lässt,

$$77)\quad \varphi = C_1\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}e^{-\xi u}\,du + C_2\int_0^\infty u^{p-1}(1+u)^{q-1}e^{\xi u}\,du.$$

b. Der Fall gleichzeitig negativer p und q ist mittelst der Formel

$$F(p,q,\xi) = \xi^{1-p-q}F(1-q,1-p,\xi)$$

leicht auf den vorigen Fall zurückzuführen und man hat dann $F(1-q,1-p,\xi)$ nach No. 76) oder nach No. 77) zu bilden, indem man p durch $1-q$, und q durch $1-p$ ersetzt. Dies giebt für positive ξ:

$$78)\quad \varphi = \xi^{1-p-q}\left[C_1\int_0^1 (1-u)^{-p}u^{-q}e^{-\xi u}\,du + C_2 e^{-\xi}\int_0^\infty u^{-p}(1+u)^{-q}e^{-\xi u}\,du\right],$$

dagegen für negative ξ:

$$79)\quad \varphi = \xi^{1-p-q}\left[C_1\int_0^1 (1-u)^{-p}u^{-q}e^{-\xi u}\,du + C_2\int_0^\infty (1+u)^{-p}u^{-q}e^{\xi u}\,du\right].$$

c. Wenn p positiv, q negativ ist, so zerlege man p in eine ganze positive Zahl m und den positiven ächten Bruch r; man hat dann nach Formel 52)

$$\varphi = F(m+r, q, \xi) = D^m F(r, q, \xi)$$

und nach No. 50)

80) $$\varphi = D^m [\xi^{1-r-q} F(1-r, 1-q, \xi)].$$

Hier sind $1-r$ und $1-q$ gleichzeitig positiv und daher ist bei positivem ξ einzusetzen:

81) $$F(1-r, 1-q, \xi) = C_1 \int_0^1 u^{-r}(1-u)^{-q} e^{-\xi u} du + C_2 e^{-\xi} \int_0^\infty (1+u)^{-r} u^{-q} e^{-\xi u} du,$$

und bei negativen ξ:

82) $$F(1-r, 1-q, \xi) = C_1 \int_0^1 u^{-r}(1-u)^{-q} e^{-\xi u} du + C_2 \int_0^\infty (1+u)^{-r} u^{-q} e^{\xi u} du.$$

d. Im Fall p negativ, q positiv ist, zerlegt man q in die ganze positive Zahl n und den positiven ächten Bruch s; dies giebt nach Formel 53)

$$\varphi = F(p, n+s, \xi) = (-1)^n e^{-\xi} D^n [e^\xi F(p, s, \xi)]$$

und nach Formel 50)

83) $$\varphi = e^{-\xi} D^n [e^\xi \xi^{1-p-s} F(1-s, 1-p, \xi)],$$

wobei der Factor $(-1)^n$ weggelassen wurde, weil er sich in die willkührlichen Constanten C_1 und C_2 einnehmen lässt. Da nun $1-s$ und $1-p$ positiv sind, so gilt in der Formel 83) bei positivem ξ der Werth:

84) $$F(1-s, 1-p, \xi) = C_1 \int_0^1 u^{-s}(1-u)^{-p} e^{-\xi u} du + C_2 e^{-\xi} \int_0^\infty (1+u)^{-s} u^{-p} e^{-\xi u} du$$

und bei negativem ξ:

85) $$F(1-s, 1-p, \xi) = C_1 \int_0^1 u^{-s}(1+u)^{-p} e^{-\xi u} du + C_2 \int_0^\infty u^{-s}(1+u)^{-p} e^{\xi u} du.$$

§. 9.

Die Formeln des vorigen Paragraphen sind vollkommen brauchbar so lange ξ eine reelle Grösse oder eine complexe Variabele ist, deren reeller Bestandtheil nicht verschwindet; sie verlieren dagegen ihre Allgemeingültigkeit bei rein imaginären ξ. Aus den Proberechnungen in §. 7 geht nämlich hervor, dass zwar M unter allen Umständen ein particuläres Integral der betrachteten Differentialgleichung darstellt, dass hingegen N bei rein imaginären ξ keinen angebbaren Werth hat, weil

$$(1+\infty)^p \infty^q e^{-\infty\sqrt{-1}}$$

eine unbestimmte Grösse ist. Der Fall eines rein imaginären ξ kann aber vorkommen, nämlich dann, wenn die Differentialgleichung

$$\xi \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + (p+q+\xi)\frac{d\varphi}{d\xi} + p\varphi = 0$$

nicht von Hause aus gegeben, sondern durch Transformation hergeleitet worden ist. Handelt es sich z. B. um die Differentialgleichung

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2bx\frac{dy}{dx}+(a+b^2x)\,y=0,$$

so müssen zunächst die in §. 4, A erwähnten Umwandlungen vorgenommen werden, und dabei erhält man

$$\alpha_2=0,\quad \beta_2=1,\quad \alpha_1=0,\quad \beta_1=0,\quad \alpha_0=b^2,$$
$$\lambda=-b,\quad \mu=0,\quad \nu=-4b^2,\quad p=q=-\tfrac{1}{2},$$
$$\xi\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}+(-1+\xi)\frac{d\zeta}{d\xi}-\tfrac{1}{2}\zeta=0,$$
$$\xi=2\sqrt{\mu+\nu x}=4b\sqrt{-x},$$
$$y=e^{-bx+2b\sqrt{-x}}\,F(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},4b\sqrt{-x});$$

in der That entspricht hier einem positiven x ein rein imaginäres ξ. Unter diesen Umständen ist es ein zweifelloses Verdienst Spitzers, solche Formeln aufgestellt zu haben, die für jedes beliebige ξ passen, wenn auch dabei eine etwas grössere Anzahl einzelner Fälle unterschieden werden muss. Die Sache wird aber weit einfacher als beim Erfinder, sobald man sich nur auf die reducirte Differentialgleichung einlässt und die Formeln des §. 5 anwendet, welche den Algorithmus der Function F enthalten.

Wenn p und q positive ächte Brüche sind, die wir mit r und s bezeichnen wollen, so ist

$$\varphi=f(r,s,\xi)=\int_0^1 u^{r-1}(1-u)^{s-1}e^{-\xi u}\,du.$$

ein allgemein richtiges particuläres Integral der Differentialgleichung

86) $$\xi\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}+(r+s+\xi)\frac{d\varphi}{d\xi}+r\varphi=0;$$

es kommt also nur darauf an, ein zweites particuläres Integral zu finden. Nun führt aber die Substitution

$$\varphi=\xi^{1-r-s}\,\omega$$

zu der neuen Differentialgleichung

$$\xi\frac{d^2\omega}{d\xi^2}+(2-s-r+\xi)\frac{d\omega}{d\xi}+(1-s)\,\omega=0,$$

in dieser sind $1-s$ und $1-r$ wiederum positive ächte Brüche, mithin genügt ihr der Ausdruck $\omega=f(1-s,1-r,\xi)$ und folglich wird die Gleichung 86) auch erfüllt durch

$$\varphi=\xi^{1-r-s}f(1-s,1-r,\xi).$$

Im Allgemeinen ist dieser Ausdruck verschieden von $f(r,s,\xi)$ und stellt demnach ein zweites particuläres Integral von 86) dar; hieraus folgt als allgemeines Integral

$$\varphi=C_1\,f(r,s,\xi)+C_2\,\xi^{1-r-s}f(1-s,1-r,\xi)$$

d. h.

$$87)\quad \varphi = C_1 \int_0^1 u^{r-1}(1-u)^{s-1} e^{-\xi u}\, du + C_2\, \xi^{1-r-s} \int_0^1 u^{-s}(1-u)^{-r} e^{-\xi u}\, du.$$

Diese Formel bedarf einer Modification, wenn $r+s=1$, denn es werden dann beide Particularintegrale einander gleich und summiren sich zu einem nur particulären Integrale. Um diesen Ausnahmefall zu erledigen, setzen wir vorläufig $r+s=1-\delta$ und bezeichnen für den Augenblick die beiden in No. 87) vorkommenden particulären Integrale mit φ_1 und φ_2, so dass

$$\varphi = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2;$$

bei Aenderung der Constanten lässt sich dafür schreiben

$$\varphi = C'\varphi_1 + C''\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\delta},$$

d. i. vermöge der Werthe von φ_1 und φ_2

$$\varphi = C'\int_0^1 u^{r-1}(1-u)^{s-1} e^{-\xi u}\, du$$

$$+ C''\int_0^1 u^{r-1}(1-u)^{s-1} e^{-\xi u}\frac{[\xi u(1-u)]^{\delta}-1}{\delta}\, du,$$

wobei im zweiten particulären Integrale (φ_2)

$$-r = s-1+\delta, \quad -s = r-1+\delta$$

gesetzt wurde. Durch Uebergang zur Grenze für verschwindende δ ergiebt sich unter der Bedingung $r+s=1$

$$88)\qquad \varphi = C'\int_0^1 u^{r-1}(1-u)^{s-1} e^{-\xi u}\, du$$

$$+ C''\int_0^1 u^{r-1}(1-u)^{s-1} e^{-\xi u}\, l[\xi u(1-u)]\, du.$$

Für ächt gebrochene positive r und s ist also das Integral von No. 86) entweder durch No. 87) oder durch No. 88) bestimmt, jenachdem $r+s$ von der Einheit differirt oder nicht; wir bezeichnen dasselbe mit $\varphi = F(r, s, \xi)$.

Die Formeln des §. 5 erledigen nun sogleich alle übrigen Fälle, wobei immer m und n ganze positive Zahlen, r und s positive ächte Brüche bedeuten mögen; man hat nur für $F(r, s, \xi)$ den vorhin angegebenen Werth oder den analog gebildeten Werth von $F(1-s, 1-r, \xi)$ zu substituiren.

So ist z. B. für die im Anfange dieses Paragraphen erwähnte Differentialgleichung

$$\zeta = F(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \xi)$$

mithin nach Formel 55), wobei $m=n=1$, $r=s=\frac{1}{2}$,

$$\zeta = -\xi^2 D\left[e^{-\xi} D\left\{e^{+\xi} F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \xi)\right\}\right];$$

wegen $r+s=1$ hat man nach No. 88)

$$F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \xi) = C' \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} e^{-\xi u} du + C'' \int_0^1 \frac{l[\xi u(1-u)]}{\sqrt{u(1-u)}} e^{-\xi u} du.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in die vorige Gleichung, so erhält man durch Ausführung der angedeuteten Differentiationen

$$\zeta = C' \xi^2 \int_0^1 \sqrt{u(1-u)}\, e^{-\xi u} du + C'' \int_0^1 \frac{1-\xi(1-2u)}{\sqrt{u(1-u)}} e^{-\xi u} du$$

$$+ C'' \xi^2 \int_0^1 \sqrt{u(1-u)}\, e^{-\xi u}\, l[\xi u(1-u)]\, du.$$

Am Schlusse dieser Untersuchungen können wir deren Resultate in zwei Worte zusammenfassen. Durch die Weiler'schen Transformationen wird die ursprüngliche Differentialgleichung auf ihre einfachste Form gebracht; der Spitzer'sche Satz zeigt, dass die in der reducirten Differentialgleichung vorkommenden Coefficienten immer als positive ächte Brüche vorausgesetzt werden dürfen; für diesen Fall gilt aber das von Spitzer angegebene Integral, mithin ist die verlangte Integration unter allen Umständen ausführbar. Was endlich die vorliegende Darstellung anbelangt, so hat sie vielleicht das kleine Verdienst, jenen raschen Ueberblick, den man an den Quellen nicht gewinnen wird, zuerst gewährt zu haben.

XIII.

Ueber die geometrische Darstellung der Werthe einer Potenz mit complexer Basis und complexem Exponenten.

Von Dr. H. Durège,

Docent an der Universität Zürich.

Man kennt seit längerer Zeit die Art und Weise, wie sich complexe Grössen durch Punkte in einer Ebene geometrisch darstellen lassen und wie man dieselben durch die Operationen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division zu neuen Punkten mit einander verbinden kann. Weniger vollständig aber kennt man die geometrische Darstellung der verschiedenen Werthe einer complexen Potenz. Es existirt darüber meines Wissens nur die folgende Abhandlung von John Warren: „*On the geome-*

trical representation of the powers, whose indices involve the square roots of negative quantities. Philosophical Transactions, 1829.“ Zur vollständigeren Kenntniss dieses Gegenstandes etwas beizutragen, ist der Zweck des gegenwärtigen Aufsatzes.

1.

Es soll im Folgenden die Potenz als eine vieldeutige Grösse aufgefasst und die verschiedenen Werthe einer solchen von einander unterschieden werden. Es ist daher nöthig, für dieselben eine besondere Bezeichnung einzuführen.

Bedeutet a eine positive reelle und μ eine beliebige reelle Grösse, so befindet sich bekanntlich unter den verschiedenen Werthen der Potenz a^μ immer ein einziger positiver reeller Werth. Diesen werde ich mit

$$a_0^\mu$$

bezeichnen. Tritt an die Stelle von a die Grundzahl e der natürlichen Logarithmen, so bedeutet e_0^μ zugleich die Summe der Exponentialreihe. Irgend einen anderen Werth der Potenz a^μ, der aus dem Ausdrucke

$$a_0^\mu\,(\cos 2n\mu\pi + i \sin 2n\mu\pi)$$

($i = \sqrt{-1}$ gesetzt) hervorgeht, wenn man für n eine bestimmte positive oder negative ganze Zahl setzt, werde ich mit

$$a_n^\mu$$

bezeichnen. Ist ferner

$$u = a\,(\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

eine beliebige complexe Grösse, so erhält man alle Werthe der Potenz u^μ, wenn man in dem Ausdrucke

$$a_0^\mu\,[\cos\mu\,(\alpha + 2n\pi) + i \sin\mu\,(\alpha + 2n\pi)]$$

für n alle positiven und negativen ganzen Zahlen und Null setzt. Wenn nun α entweder Null ist, oder zwischen 0 und 2π liegt, werde ich den bestimmten Werth, den der vorige Ausdruck für einen bestimmten Werth von n annimmt, mit

$$1)\qquad u_n^\mu = a_0^\mu\,[\cos\mu\,(\alpha + 2n\pi) + i \sin(\alpha + 2n\pi)]$$

bezeichnen. Denn es erhellt, dass nur unter einer derartigen Beschränkung diese Bezeichnungsart mit der vorigen conform sein wird. Wenn dagegen $2m\pi$ das grösste in α enthaltene Vielfache von 2π ist, so wird man haben

$$u_{n+m}^\mu = a_0^\mu\,[\cos\mu\,(\alpha + 2n\pi) + i \sin\mu\,(\alpha + 2n\pi)].$$

Für einen rein imaginären Exponenten $i\beta$ werde durch $e_0^{i\beta}$ wieder die Summe der Exponentialreihe bezeichnet, oder es sei

$$e_0^{i\beta} = \cos\beta + i \sin\beta.$$

Ferner sei

$$a_0^{i\beta} = e_0^{i\beta \log a},$$

wo unter $\log a$ der reelle Werth des natürlichen Logarithmen zu verstehen ist. Da nun auch für einen reellen Exponenten μ

$$a_0^\mu = e_0^{\mu \log a}$$

ist, so kann man statt der Gleichung 1) auch schreiben

$$u_n^{\mu} = e_0^{\mu \log a + i\mu(\alpha + 2n\pi)}, \quad [0 \leqq \alpha < 2\pi].$$

Nun werden aber durch den Ausdruck

$$\log a + i(\alpha + 2n\pi)$$

alle Werthe des Logarithmen von μ ausgedrückt; bezeichnet man daher mit

$$\log_n u = \log a + i(\alpha + 2n\pi)$$

denjenigen Werth des Logarithmen, der einer bestimmten positiven oder negativen ganzen Zahl n entspricht, so hat man auch

$$u_n^{\mu} = e_0^{\mu \log_n u}.$$

Aehnlich möge nun auch die Bezeichnung sein, wenn der Exponent complex ist. Nämlich, ist $v = x + iy$ ein complexer Exponent, ferner wie vorhin $u = a(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ und zugleich $0 \leq \alpha < 2\pi$, so sei

$$u_n^{v} = e_0^{v \log_n u}.$$

Entwickelt man den Exponenten, so erhält man vollständig:

$$2) \qquad u_n^{v} = e_0^{x \log a - y(\alpha + 2n\pi)}\, e_0^{i[y \log a + x(\alpha + 2n\pi)]}.$$

2.

Hiernach ist es nun leicht, wenn irgend zwei complexe Grössen u und v und damit auch die sie darstellenden Punkte gegeben sind, denjenigen Punkt zu finden, welcher den $n$ten Werth der Potenz u^v darstellt. Nämlich bezeichnen r_n und φ_n den Radiusvector und den Neigungswinkel des Punktes u_n^v, so erhält man aus 2):

$$3) \qquad \begin{cases} \log r_n = x \log a - y(\alpha + 2n\pi) \\ \varphi_n = y \log a + x(\alpha + 2n\pi) \end{cases}$$

oder wenn man der Kürze wegen

$$x \log a - y\alpha = R; \quad y \log a + x\alpha = \Phi$$

setzt,

$$4) \qquad \begin{cases} \log r_n = R - 2n\pi \,.\, y \\ \varphi_n = \Phi + 2n\pi \,.\, x \end{cases}$$

Des kürzeren Ausdrucks halber mögen die Punkte, welche die verschiedenen Werthe der Potenz u^v darstellen, Potenzpunkte, und derjenige unter ihnen, welcher den, einem bestimmten Werthe von n entsprechenden Werth von u_n^v darstellt, der $n$te Potenzpunkt genannt werden.

Die vorstehenden Gleichungen bieten die Mittel dar, um die Fragen über die Construction der Potenzwerthe zu beantworten. Warren untersucht vorzüglich, wie sich ein bestimmter $n$ter Potenzpunkt bewegt, wenn man einen der Punkte u und v auf gewisse einfache Weisen sich bewegen lässt. Besonders interessant aber erscheint die von Warren nur oberflächlich berührte Frage, auf welcher Curve die sämmtlichen Potenzpunkte liegen. Diese Curve erhält man, wenn man n aus den Gleichungen 3) oder 4) eliminirt. Alsdann ergiebt sich, wenn mit r und φ die laufenden Polarcoordinaten bezeichnet werden, eine lineare Gleichung zwischen $\log r$ und φ, also die Gleichung einer logarithmischen Spirale, die sich in den Formen

$$\log r = \frac{(x^2 + y^2) \log a}{x} - \frac{y}{x} \varphi$$

oder

$$\log r = R - \frac{y}{x}(\varphi - \Phi)$$

schreiben lässt. Die sämmtlichen Potenzpunkte, d. h. die Punkte, welche die sämmtlichen Werthe einer und derselben Potenz darstellen, liegen also auf einer logarithmischen Spirale*), und so vertheilt, dass die Radienvectoren je zweier auf einander folgender Potenzpunkte den constanten Winkel $2\pi x$ einschliessen. Diese Spirale hat den Anfangspunkt zu ihrem Pole und durchschneidet ihre Radienvectoren unter einem Winkel, der von der Neigung des Exponenten v um 90° verschieden ist.

Von ihr ist zuerst zu bemerken, dass sie von der Neigung α der Basis u unabhängig ist. Lässt man also den Punkt u sich in einem Kreise mit dem Radius a um den Anfangspunkt herumbewegen, so bewegen sich die Potenzpunkte auf derselben Spirale fort, und zwar so, dass der Winkel zwischen den Radienvectoren je zweier auf einander folgender Potenzpunkte constant gleich $2\pi x$ bleibt. Jeder Radiusvector dreht sich also um einen gleichen Winkel, nämlich, wenn der Radiusvector des Punktes u den Winkel $\alpha' - \alpha$ beschreibt, um den Winkel $(\alpha' - \alpha)x$.

Viel wesentlicher als von der Basis, hängt die Beschaffenheit der Spirale von dem Exponenten ab. Ist dieser nämlich zuerst reell, also $y = 0$, so geht die Spirale in einen Kreis über, der um den Anfangspunkt mit dem Radius $e_0^{x \log a} = a_0^x$ beschrieben ist. Auf der Peripherie desselben sind die Potenzpunkte so vertheilt, dass die Radienvectoren je zweier auf einander folgender Potenzpunkte wiederum den constanten Winkel $2\pi x$ bilden. Ist daher x ein rationaler Bruch, so fallen nach einer gewissen Anzahl von Potenzpunkten alle späteren mit früheren zusammen, so dass die Anzahl der Potenzpunkte dann eine endliche ist. Ist x aber eine ganze Zahl, so fallen alle Potenzpunkte in einen zusammen; die Potenz hat dann nur einen Werth.

Ist zweitens der Exponent rein imaginär, also $x = 0$, so geht die Spirale in eine Gerade über, und zwar in eine Gerade, welche zwar auf der einen Seite unbegränzt, auf der andern Seite aber durch den Anfangspunkt begränzt ist. Denn der Winkel zwischen den Radienvectoren je zweier auf einander folgender Potenzpunkte ist dann ebenfalls Null, also fallen die Radienvectoren sämmtlicher Potenzpunkte in einen zusammen, welcher um den Winkel $y \log a$ gegen die Abscissenachse geneigt ist, und auf welchem der $n$te Potenzpunkt die Entfernung $e_0^{-y(\alpha+2n\pi)}$ vom Anfangspunkte hat. Ist $a = 1$, so fällt die Gerade, auf welcher alle Potenzpunkte liegen, mit der positiven Abscissenachse zusammen, folglich haben alle Potenzen von der Form

*) Dieses Resultat giebt Warren schon an.

$$(\cos\alpha + i \sin\alpha)^{iy'}$$

lauter reelle und positive Werthe.

Aus dieser Eigenschaft, dass die Potenzpunkte einer Potenz mit rein imaginärem Exponenten auf einer durch den Anfangspunkt begrenzten Geraden liegen, folgt ein auffallender Unterschied zwischen den Werthen einer solchen Potenz und denjenigen einer Potenz mit reellem Exponenten. Während nämlich die letzteren durchaus ungleichartig sind, indem höchstens zwei derselben reell und ebenso auch höchstens zwei rein imaginär, alle übrigen aber complex sind, so sind die sämmtlichen Werthe einer Potenz mit rein imaginärem Exponenten stets gleichartig, nämlich entweder alle reell, oder alle rein imaginär, oder alle complex, und zwar, wenn A und B zwei reelle und positive Grössen bedeuten, alle von einer und derselben der folgenden acht Formen: $+A$, $-A$, $+iB$, $-iB$, $+A+iB$, $+A-iB$, $-A+iB$, $-A-iB$.

Dieselbe Eigenschaft, lauter gleichartige Werthe zu besitzen, hat auch die allgemeine Potenz

$$u^{x+iy},$$

wenn der reelle Theil x des Exponenten eine ganze Zahl ist. Auch dann liegen sämmtliche Potenzpunkte auf einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden, weil die verschiedenen Werthe von $\varphi_n = \Phi + 2n\pi . x$ dann nur um eine ganze Anzahl von Peripherieen von einander verschieden sind. Dasselbe erhellt auch aus folgender Betrachtung. Wie sich leicht zeigen lässt, ist allgemein

$$u_n^{x+iy} = u_n^x . u_n^{iy}.$$

Ist nun aber x eine ganze Zahl, so sind die Werthe u_n^x alle einander gleich, die Werthe von u_n^{iy} dagegen werden durch Punkte dargestellt, welche in gerader Linie liegen. Es seien (Fig. 1, Taf. IV) $p_1, p_2, p_3 \ldots$ diese letzteren und s der Punkt, der die einwerthige Potenz u^x darstellt. Alsdann ist leicht zu sehen, dass die Producte der Punkte $p_1, p_2, p_3 \ldots$ in den Punkt s die ebenfalls in gerader Linie liegenden Punkte $q_1, q_2, q_3 \ldots$ liefern, weil die Dreiecke op_1q_1, op_2q_2, $op_3q_3 \ldots$ dem Dreieck $o1s$ ähnlich sein müssen.

3.

Die Potenzpunkte einer beliebigen complexen Potenz, welche, wie wir gesehen haben, auf einer logarithmischen Spirale liegen, besitzen die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass sich durch dieselbe noch unendlich viele von der vorigen verschiedene logarithmische Spiralen hindurch legen lassen. Diess beruht auf der bekannten Eigenschaft der Polarcoordinaten, dass zwar durch einen bestimmten Werth r des Radiusvectors und einen bestimmten Werth φ des Neigungswinkels ein bestimmter Punkt der Ebene festgesetzt wird, dass aber, wenn umgekehrt der Punkt gegeben ist, demselben nicht blos die vorigen Werthe von r und φ als Polarcoordinaten zugehören, sondern dass man den Winkel φ um ein beliebiges Vielfaches

von 2π vermehren oder vermindern kann, und dass dann diese neuen Werthe der Polarcoordinaten denselben Punkt bestimmen, wie r und φ.

Denken wir uns daher die Potenzpunkte als gegeben, so gehören ihnen nicht allein die vorigen Werthe 4) von $\log r_n$ und φ_n an, sondern dieselben Potenzpunkte werden auch durch die Werthe

$$\log r_n = R - 2n\pi y$$
$$\varphi_n = \Phi + 2n\pi x - 2m\pi$$

bestimmt, wenn m eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet. So lange nun m von n ganz unabhängig ist, erhalten wir hieraus allerdings keine neue Curve für die Potenzpunkte; allein nehmen wir an, m sei ein beliebiges Vielfaches von n, setzen wir also

$$m = \lambda n,$$

wo λ wiederum eine beliebige positive oder negative ganze Zahl oder auch Null bedeutet, so liefert die Elimination von n aus den Gleichungen

$$\log r_n = R - 2n\pi y; \quad \varphi_n = \Phi + 2n\pi(x - \lambda)$$

die Gleichung

$$5) \qquad \log r = R + \frac{y}{\lambda - x}(\varphi - \Phi),$$

welche für jeden Werth von λ eine besondere logarithmische Spirale darstellt*). Es ergiebt sich also, dass man durch die sämmtlichen Potenzpunkte eine Schaar von unendlich vielen logarithmischen Spiralen hindurch legen kann. Alle diese Spiralen haben den Anfangspunkt als gemeinschaftlichen Pol und werden aus 5) erhalten, wenn man für λ alle positiven und negativen ganzen Zahlen und Null setzt.

In dem Falle, dass der Exponent reell, also $y = 0$ ist, fallen alle diese Spiralen mit dem schon früher gefundenen Kreise zusammen. Ist aber der Exponent rein imaginär, also $x = 0$, so geht nur die dem Werthe $\lambda = 0$ zugehörige Spirale in eine Gerade über, während alle übrigen logarithmische Spiralen bleiben, die paarweise gleich, aber entgegengesetzt gewunden sind. Dasselbe tritt auch ein, wenn x eine ganze Zahl ist; dann geht die Spirale, welche dem Werthe $\lambda = x$ angehört, in eine Gerade über, und jeder Spiralen mit einem Werthe $\lambda = \lambda'$ entspricht eine andere mit dem Werthe $\lambda = 2x - \lambda'$, welche ihr gleich ist, aber nach der entgegengesetzten Richtung gewunden.

Zur Erläuterung des Vorigen ist die Fig. 2, Taf. IV, beigefügt worden, bei deren Verzeichnung ich von der Potenz

$$(\cos 60^0 + i \sin 60^0)^{\cos 180 + i \sin 180}$$

*) Man könnte für m irgend eine Function von n annehmen, von der Beschaffenheit, dass allen ganzzahligen Werthen von n auch ganzzahlige Werthe von m entsprechen, z. B. die Anzahl der zu n relativen Primzahlen, welche kleiner als n sind; die Anzahl der Divisoren von n u. dgl. Eine logarithmische Spirale erhält man aber nur dann, wenn m eine lineare Function von n mit ganzzahligen Coefficienten ist. Man überzeugt sich leicht, dass der letzte Fall von dem im Texte angenommenen im Resultate nicht verschieden ist.

ausgegangen bin. In derselben sind P und P' zwei aufeinander folgende Potenzpunkte, welche den Werthen $n = 0$ und $n = -1$ angehören; ihre Polarcoordinaten haben die absoluten Werthe

$$r_0 = 7^{mm},2, \quad \varphi_0 = 57^0,1; \quad r_{-1} = 50^{mm},4, \quad \varphi_{-1} = 74^0,7.$$

Zur Einheit wurde die Länge von 10^{mm} genommen. Von den durch sämmtliche Potenzpunkte hindurchgehenden Spiralen sind 7 gezeichnet worden, nämlich diejenigen, welche den Werthen $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ von λ zugehören. Von denselben sind aber, damit die Figur nicht zu complicirt werde, nur diejenigen Theile in der Zeichnung vorhanden, welche zwischen den beiden Punkten P und P' liegen.

4.

Die im vorigen Abschnitte betrachteten Spiralen schneiden sich zwar alle in den Potenzpunkten, ausserdem besitzen sie jedoch noch andere Durchschnittspunkte, welche nicht allen Spiralen zugleich angehören, und die näher untersucht zu werden verdienen.

Betrachten wir zu dem Ende zunächst die Art und Weise, wie sich zwei beliebige logarithmische Spiralen, welche denselben Pol haben, überhaupt schneiden können.

Es seien

$$\text{I)} \quad \varrho = q + p \cdot \varphi; \quad \text{II)} \quad \varrho' = q' + p' \cdot \varphi'$$

die Gleichungen zweier beliebiger, um den Anfangspunkt als Pol geschlungener, logarithmischer Spiralen, indem zur Abkürzung $\log r = \varrho$, $\log r' = \varrho'$ gesetzt ist und darunter die reellen Logarithmen der stets als positiv angesehenen Radienvectoren verstanden werden. Dann ist zunächst klar, da diese Gleichungen in Bezug auf ϱ und φ linear sind, dass es nur einen einzigen Punkt giebt, für welchen zu gleicher Zeit $r' = r$ und $\varphi' = \varphi$ ist. Allein da der nämliche Punkt, welcher die Polarcoordinaten r und φ hat, auch durch die Polarcoordinaten r und $\varphi + 2n\pi$ bestimmt ist, wenn n eine ganze Zahl bedeutet, so folgt, dass auch alle diejenigen Punkte beiden Spiralen gemeinschaftlich sein werden, für welche zugleich

$$r' = r \quad \text{und} \quad \varphi' = \varphi + 2n\pi$$

ist. Die beiden Spiralen durchschneiden sich daher in unendlich vielen Punkten und man wird die Polarcoordinaten sämmtlicher Durchschnittspunkte erhalten, wenn man ϱ und φ aus den Gleichungen

$$\varrho = q + p \cdot \varphi, \quad \varrho = q' + p'(\varphi + 2n\pi)$$

bestimmt und dem n alle ganzzahligen Werthe (Null eingeschlossen) zuertheilt. Bezeichnet man daher mit ϱ_n, φ_n, ϱ_n', φ_n' die einem bestimmten n zukommenden Werthe der Polarcoordinaten der Durchschnittspunkte, so erhält man

$$6)\quad \begin{cases} \varrho_n = \varrho_n' = \dfrac{pq' - p'q + 2pp'n\pi}{p - p'}, \\ \varphi_n = \dfrac{q' - q + 2p'n\pi}{p - p'}. \end{cases}$$

Alsdann sind die Winkel φ in der Spirale I) gezählt. Zählt man diese Winkel in der Spirale II), so erhält man

$$\varphi_n' = \varphi_n + 2n\pi = \frac{q' - q + 2pn\pi}{p - p'}.$$

Beide Spiralen nähern sich ihrem gemeinschaftlichen Pole in unendlich vielen Windungen. Es giebt daher keine Windung, die man absolut als die erste oder nullte annehmen und von der aus man die übrigen zählen könnte. Vielmehr kann dazu irgend eine beliebig angenommen werden. Bezeichnet man nun dem Obigen gemäss mit φ_0 und φ_0' die demjenigen Durchschnittspunkte angehörigen Winkel, welchem in beiden Spiralen gezählt derselbe Werth zukommt (was bestimmt ist, sobald die Constanten p, q, p', q' gegeben sind), so hat man successive

$$\begin{gathered} \varphi_0' = \varphi_0 \\ \varphi_1' = \varphi_1 + 2\pi, \quad \varphi_{-1}' = \varphi_{-1} - 2\pi, \\ \varphi_2' = \varphi_2 + 4\pi, \quad \varphi_{-2}' = \varphi_{-2} - 4\pi, \\ \varphi_3' = \varphi_3 + 6\pi, \quad \varphi_{-3}' = \varphi_{-3} - 6\pi, \\ \dots \qquad \dots \end{gathered}$$

Daraus geht hervor, dass die Durchschnittspunkte der beiden Spiralen so vertheilt sind, dass der Unterschied der, einem und demselben Durchschnittspunkte zugehörigen Winkel, wenn derselbe einmal in der einen und dann in der anderen Spirale gezählt wird, bei jedem folgenden Durchschnittspunkte um eine ganze Peripherie grösser wird. Man erhält nämlich leicht

$$\varphi_n - \varphi_{n-1} = \frac{2p'\pi}{p - p'}; \quad \varphi_n' - \varphi_{n-1}' = \frac{2p\pi}{p - p'} = \frac{2p'\pi}{p - p'} + 2\pi,$$
$$\varphi_n' - \varphi_n = \varphi_{n-1}' - \varphi_{n-1} + 2\pi,$$

worin das ausgesprochene Gesetz liegt. Sind z. B. zwei gleich gewundene Spiralen so beschaffen, dass vier ihrer Durschnittspunkte auf der 0ten, 1ten, 2ten, 3ten Windung der einen Spirale liegen, so liegen dieselben Punkte in der andern Spirale auf der 0ten, 2ten, 4ten, 6ten Windung. Oder nimmt man zwei gleiche aber entgegengesetzt gewundene Spiralen an, welche immer auf jeder Windung zwei Durchschnittspunkte besitzen, so liegen die Punkte, welche in der einen Spirale sich resp. auf der 0ten, 0ten, 1ten, 1ten, 2ten Windung befinden, in der anderen Spirale der Reihe nach auf der 0ten, —1ten, —1ten, —2ten, —2ten Windung.

Durch die sämmtlichen Durchschnittspunkte der beiden Spiralen I) und II) kann man nun aufs Neue logarithmische Spiralen hindurch legen. Ist

$$\text{III)}\quad \varrho'' = q'' + p'' . \varphi''$$

die Gleichung einer solchen, so müssen p'' und q'' so bestimmt werden können, dass für jeden Werth von n zugleich

$$\varrho_n''=\varrho_n \text{ und } \varphi_n''=\varphi_n+2m\pi$$

werde, wo m wiederum eine ganze Zahl oder Null bedeutet. Man erhält aber, wenn man in die Gleichung

$$\varrho_n=q''+p''(\varphi_n+2m\pi)$$

die Werthe 6) von ϱ_n und φ_n substituirt,

$$\frac{pq'-p'q}{p-p'}+\frac{2pp'n\pi}{p-p'}=q''+p''.\frac{q'-q}{p-p'}+p''.\frac{2p'n\pi}{p-p'}+2p''m\pi,$$

welche Gleichung für jeden Werth von n erfüllt sein muss. Steht nun m in keiner Verbindung mit n, so erhält man daraus nur wieder die beiden ersten Spiralen. Ist aber m ein Vielfaches von n, also $m=\lambda n$, so erhält man die beiden Gleichungen

$$\frac{pq'-p'q}{p-p'}=q''+p''.\frac{q'-q}{p-p'};\quad \frac{pp'}{p-p'}=\frac{p'p''}{p-p'}+\lambda p''$$

aus welchen sich

$$7)\qquad p''=\frac{pp'}{p'+\lambda(p-p')};\qquad q''=\frac{p'q+\lambda(pq'-p'q)}{p'+\lambda(p-p')}$$

ergiebt. Hieraus folgt, dass man durch alle Durchschnittspunkte zweier beliebiger logarithmischer Spiralen, die denselben Pol haben, unendlich viele andere logarithmische Spiralen hindurch legen kann, deren Bestimmungsflächen aus den Ausdrücken 7) hervorgehen, wenn man λ alle ganzzahligen Werthe zutheilt. Für die Werthe $\lambda=0$ und $\lambda=1$ erhält man die Spiralen I) und II) selbst.

Heben wir nun aus allen diesen Spiralen irgend eine heraus, welche einem beliebigen, von 0 und 1 verschiedenen Werthe von λ zugehört und bezeichnen dieselbe wie vorhin durch

$$\text{III)}\qquad \varrho''=q''+p''.\varphi'',$$

so ist für die allen drei Spiralen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte $\varphi_n''=\varphi_n+2\lambda n\pi$. Diese Punkte haben also folgende Winkel:

in der Spirale I gezählt ... φ_{-2}, φ_{-1}, φ_0, φ_1, φ_2 ...
„ „ „ II „ ... $\varphi_{-2}-4\pi$, $\varphi_{-1}-2\pi$, φ_0, $\varphi_1+2\pi$, $\varphi_2+4\pi$ ...
„ „ „ III „ ... $\varphi_{-2}-4\lambda\pi$, $\varphi_{-1}-2\lambda\pi$, φ_0, $\varphi_1+2\lambda\pi$, $\varphi_2+4\lambda\pi$ ...

Betrachten wir jetzt aber die beiden Spiralen I) und II) für sich und bezeichnen die ihren Durchschnittspunkten zugehörigen Winkel in der Spirale I) gezählt mit ... ψ_{-2}, ψ_{-1}, ψ_0, ψ_1, ψ_2 ..., so ist für irgend einen derselben, ψ_k, gemäss 6):

$$\psi_k=\frac{q''-q+2p''k\pi}{p-p''},$$

oder wenn man darin die Ausdrücke 7) für p'' und q'' substituirt,

$$\psi_k=\frac{q'-q+2p'\frac{k}{\lambda}\pi}{p-p'}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem für φ_n in 6), so ergiebt sich, dass jedesmal und nur dann $\psi_k = \varphi_n$ ist, so oft $k = n\lambda$ ist. Unter den Durchschnittspunkten der Spiralen I) und III) gehören also nur diejenigen auch der Spirale II) an, für welche k ein Vielfaches von λ ist, und daher liegen zwischen je zwei auf einander folgenden Durchschnittspunkten, welche allen drei Spiralen gemeinsam sind, noch $\lambda - 1$ Durchschnittspunkte, die nur den Spiralen I) und III) angehören. Z. B. zwischen den Punkten, welche den Werthen 0 und 1 von n zugehören, liegen diejenigen Durchschnittspunkte der Spiralen I) und III), welche den Werthen 1, 2, 3 ... $\lambda - 1$ von k entsprechen. In ähnlicher Weise ergiebt sich aus der Vergleichung irgend zweier Spiralen, welche den Werthen λ_1 und λ_2 von λ angehören, wo $\lambda_2 > \lambda_1$ sei, dass diese Spiralen sich zwischen je zwei auf einander folgenden, allen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkten noch in $\lambda_2 - \lambda_1 - 1$ Punkten schneiden. In Fig. 2, Taf. IV, z. B. treffen sich die beiden Spiralen für $\lambda = -2$ und $\lambda = 4$ zwischen P und P' in 5 Punkten, welche mit 1, 2, 3, 4, 5 bezeichnet worden sind. Je zwei Spiralen dagegen, welche zweien auf einander folgenden Werthen von λ angehören, schneiden sich nur in den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkten und in keinen andern.

Die durch die Reihenfolge der Zahlen λ bedingte Aufeinanderfolge der Spiralen tritt noch deutlicher hervor, wenn man die Tangenten untersucht, welche man in einem der gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte an sämmtliche Spiralen legen kann. Es sei (Fig. 3, Taf. IV) P einer der gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte, O der gemeinschaftliche Pol. Auf dem Radiusvector errichte man in O die Senkrechte ON (die Polarsubtangente) und lege in P an alle durch P hindurch gehende Spiralen Tangenten, welche die Senkrechte ON in den Punkten L_0, L_1, L_2 ... schneiden mögen. Es seien PL_0 und PL_1 die Tangenten an den Spiralen I) und II) und PL_λ die Tangente an der einem beliebigem Werthe von λ zugehörigen Spirale III). Bezeichnen ferner γ_0, γ_1, γ_λ die Winkel, welche diese Tangenten mit der Senkrechten ON bilden, so ist bekanntlich

$$p = tg\,\gamma_0, \quad p' = tg\,\gamma_1, \quad p'' = tg\,\gamma_\lambda,$$

folglich hat man wegen der zwischen p, p', p'' bestehenden Relation 7):

$$tg\,\gamma_\lambda = \frac{tg\,\gamma_0\; tg\,\gamma_1}{tg\,\gamma_1 + \lambda\,(tg\,\gamma_0 - tg\,\gamma_1)},$$

woraus durch leichte Rechnung

$$\frac{\sin(\gamma_0 - \gamma_\lambda)}{\sin\gamma_\lambda} = \lambda \,.\, \frac{\sin(\gamma_0 - \gamma_1)}{\sin\gamma_1}$$

folgt. Nun ist aber

$$\frac{\sin(\gamma_0 - \gamma_\lambda)}{\sin\gamma_\lambda} = \frac{L_\lambda L_0}{PL_0}, \quad \frac{\sin(\gamma_0 - \gamma_1)}{\sin\gamma_1} = \frac{L_1 L_0}{PL_0},$$

folglich ergiebt sich

$$L_\lambda L_0 = \lambda \,.\, L_1 L_0$$

oder es ist

$$L_0L_1 = L_1L_2 = L_2L_3 = \ldots = L_{-1}L_0 = L_{-2}L_{-1} = \ldots$$

Hiernach hat man folgenden Satz: Legt man durch die Durchschnittspunkte zweier logarithmischen Spiralen alle möglichen logarithmischen Spiralen, die mit den beiden gegebenen denselben Pol haben, und zieht in einem der gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte P Tangenten an sämmtliche Spiralen, so schneiden diese die auf dem Radiusvector PO im Anfangspunkte O senkrecht stehende Gerade (die Polarsubtangente) in gleichen Abständen von einander.

Mit Rücksicht auf die hierdurch hervortretende Aufeinanderfolge der Spiralen kann man das oben gefundene Gesetz über das gegenseitige Durchschneiden derselben so aussprechen: Je zwei auf einander folgende Spiralen schneiden sich nur in den allen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkten; je zwei nicht auf einander folgende Spiralen dagegen schneiden sich zwischen je zwei auf einander folgenden, allen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkten noch so viele Male, als man Spiralen zwischen den beiden in Betracht kommenden ziehen kann.

5.

Kehren wir nun zu der Form zurück, welche die Gleichungen der Spirale erhielten, wenn wir von den Potenzpunkten ausgingen, nämlich zu der Gleichung 5)

$$8)\qquad log\, r = R + \frac{y}{\lambda - x}(\varphi - \Phi),$$

so gehen hier sämmtliche Spiralen durch die Potenzpunkte hindurch; diese sind also die allen Spiralen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte. Es werden sich daher irgend zwei Spiralen, welche zwei auf einander folgenden Werthen von λ angehören, nur in den Potenzpunkten und in keinen anderen schneiden und die im vorigen Abschnitt ermittelten Sätze werden von diesen Spiralen gleichfalls gelten.

Man kann nun hier zuerst den oben betrachteten Winkel γ_λ noch auf eine andere Weise construiren. Man hat nämlich aus 8)

$$tg\, \gamma_\lambda = \frac{y}{\lambda - x}.$$

Verbindet man also den Punkt v (Fig. 3, Taf. IV), welcher den Exponenten $v = x + iy$ darstellt, mit dem Punkte λ, der die ganze Zahl auf der Abscissenachse darstellt, so ist der Winkel, den die Gerade $v\lambda$ mit der Abscissenachse bildet, ebenfalls der Winkel γ_λ. Da nun dies für jeden Werth von λ gilt, so ist die Figur, welche aus den im Punkte P gezogenen Tangenten, dem Radiusvector und der Polarsubtangente ON besteht, derjenigen Figur ähnlich, welche entsteht, wenn man die alle positiven und negativen ganzen Zahlen repräsentirenden Punkte $\ldots -1, 0, 1, 2, 3 \ldots$ mit v verbindet und die Ordinate vx des letzteren zieht. Den Tangenten PL_0, PL_1, $PL_2 \ldots$ entsprechen die Geraden $v0$, $v1$, $v2 \ldots$, der Polarsubtangente

entspricht die Abscissenachse und dem Radiusvector die Ordinate des Punktes v.

Aus dem Vorigen ergiebt sich, dass die sämmtlichen Werthe einer Potenz geometrisch dargestellt werden durch die sämmtlichen Durchschnittspunkte zweier logarithmischer Spiralen, nämlich durch irgend zwei auf einander folgende aus der durch die Gleichung 8) dargestellten Schaar. Nur in dem Falle, dass der Exponent reell ist, degeneriren beide Spiralen in den nämlichen Kreis. Derselbe hat dann den Radius a_0^x und den Anfangspunkt zum Mittelpunkt, und die Radienvectoren der Potenzpunkte bilden mit der Abscissenachse die Winkel $x(\alpha + 2n\pi)$. Man kann aber auch die umgekehrte Aufgabe lösen, nämlich, wenn irgend zwei um denselben Pol gewundene logarithmische Spiralen gegeben sind, so kann man immer eine Potenz bestimmen, deren sämmtliche Werthe durch die Durchschnittspunkte der gegebenen Spiralen geometrisch dargestellt werden. Denn, sind

$$\varrho = \log r = q + p \,.\, \varphi; \quad \varrho = \log r = q' + p' . \varphi$$

die gegebenen Spiralen, so darf man nur die Werthe 6) den Ausdrücken 3) für jeden Werth von n gleich setzen. Dann erhält man die Basis $u = a(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ und den Exponenten $v = x + iy$ der gesuchten Potenz, wenn man aus den Gleichungen

$$x \log a - y\alpha = \frac{pq' - p'q}{p - p'}, \quad y = -\frac{pp'}{p - p'},$$
$$y \log a + x\alpha = \frac{q' - q}{p - p'}, \quad x = \frac{p'}{p - p'}$$

die Werthe von x, y, $\log a$ und α bestimmt. Auf den Umstand, dass man dabei verschiedene Potenzen finden kann, welche dieselben Werthe haben, soll hier nicht näher eingegangen werden.

Anstatt zwei Spiralen durch die vier Constanten p, q, p', q' zu bestimmen, kann man auch in der Ebene zwei beliebige Punkte annehmen, gegeben durch ihre Polarcoordinaten r_0, φ_0 und r_1, φ_1, und die Aufgabe stellen, durch diese beiden Punkte alle möglichen logarithmischen Spiralen hindurch zu legen, welche den Anfangspunkt zum Pol haben, wobei zugleich festgesetzt sein möge, dass der dem ersten Punkte zugehörige Winkel, in allen Spiralen gezählt, denselben Werth φ_0 habe.

Setzt man

$$\log r_0 = \varrho_0, \quad \log r_1 = \varrho_1 = \varrho_0 + t, \quad \varphi_1 = \varphi_0 + \Theta,$$

und ist

$$\varrho = q + p \,.\, \varphi$$

die Gleichung von irgend einer der gesuchten Spiralen, so müssen derselben die Werthe ϱ_0 und $\varrho_0 + t$ von ϱ und die Werthe φ_0 und $\varphi_0 + \Theta - 2\lambda\pi$ von φ genügen, und es kann dabei λ keine andere als eine ganze Zahl oder Null sein, weil sonst durch $\varrho_0 + t$ und $\varphi_0 + \Theta - 2\lambda\pi$ nicht derselbe Punkt

bestimmt wäre wie durch $\varrho_0 + t$ und $\varphi_0 + \Theta$. Man hat also die beiden Gleichungen

$$\varrho_0 = q + p\varphi_0; \quad \varrho_0 + t = q + p(\varphi_0 + \Theta - 2\lambda\pi).$$

Daraus folgt zuerst

$$p = \frac{t}{\Theta - 2\lambda\pi}, \quad q = \varrho_0 - \frac{t}{\Theta - 2\lambda\pi}\varphi_0.$$

Da man aber den Grössen t und Θ immer die Form

$$t = -2\pi\eta, \quad \Theta = 2\pi\xi$$

geben kann, so kann man auch schreiben

$$p = \frac{\eta}{\lambda - \xi}, \quad q = \varrho_0 - \frac{\eta}{\lambda - \xi}\varphi_0$$

und erhält dadurch die Gleichung

$$9) \qquad \varrho = \varrho_0 + \frac{\eta}{\lambda - \xi}(\varphi - \varphi_0),$$

welche für jeden ganzzahligen Werth von λ (Null eingeschlossen) eine Spirale darstellt, die durch die beiden Punkte hindurchgeht, welche durch die Werthe ϱ_0, φ_0 und $\varrho_0 - 2\pi\eta$, $\varphi_0 + 2\pi\xi$ bestimmt sind.

Nun hat aber die vorstehende Gleichung genau dieselbe Form, wie die Gleichung 5), welche alle durch die Potenzpunkte hindurchgehenden Spiralen darstellt. Man kann also die durch zwei gegebene Punkte hindurchgehende Schaar immer als identisch mit der durch die Potenzpunkte hindurchgehenden betrachten und daher auch folgenden Satz aufstellen: Durch zwei beliebig gegebene Punkte kann man unendlich viele, um denselben Pol sich windende logarithmische Spiralen hindurch legen. Diese Spiralen schneiden sich ausser in den gegebenen Punkten noch in unendlich vielen, allen gemeinsamen Durchschnittspunkten und die letzteren nebst den gegebenen Punkten kann man als geometrische Darstellung der sämmtlichen Werthe einer und derselben Potenz ansehen.

6.

Um das Gewebe der in Rede stehenden Schaar von Spiralen vollständig zu durchschauen, suchen wir noch diejenigen unter den nicht allen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkten auf, durch welche drei oder mehrere Spiralen zugleich hindurch gehen.

Heben wir aus den durch die Gleichung 9) dargestellten Spiralen irgend drei heraus, welche den ganzen Zahlen λ, $\lambda + \delta$, $\lambda + \delta'$ angehören, so erhalten wir die Durchschnittspunkte der beiden ersten durch Auflösung der Gleichungen

$$\varrho = \varrho_0 + \frac{\eta}{\lambda - \xi}(\varphi - \varphi_0), \quad \varrho = \varrho_0 + \frac{\eta}{\lambda + \delta - \xi}(\varphi - \varphi_0 + 2k\pi),$$

wo k jede ganze Zahl und Null sein kann. Daraus folgt

$$\varrho - \varrho_0 = \frac{\eta \cdot 2k\pi}{\delta}, \quad \varphi - \varphi_0 = \frac{(\lambda - \xi)\,2k\pi}{\delta}.$$

Ebenso erhält man für die Durchschnittspunkte der Spiralen λ und $\lambda+\delta'$

$$\varrho-\varrho_0=\frac{\eta\,.\,2k'\pi}{\delta'},\quad \varphi-\varphi_0=\frac{(\lambda-\xi)\,2k'\pi}{\delta'},$$

wo k' ebenfalls jede ganze Zahl und Null sein kann. Sollen nun die drei Spiralen sich in einem Punkte schneiden, so müssen die entsprechenden der obigen Ausdrücke einander gleich werden, also muss

10) $$\frac{k'}{\delta'}=\frac{k}{\delta}$$

sein. Halten wir jetzt irgend einen Werth von δ und irgend einen von k fest und bezeichnen mit ε den grössten gemeinschaftlichen Theiler von δ und k, so folgt aus

$$\delta'=\frac{k'\,.\,\frac{\delta}{\varepsilon}}{\frac{k}{\varepsilon}},$$

dass k' ein Vielfaches von $\frac{k}{\varepsilon}$ und daher δ' das nämliche Vielfache von $\frac{\delta}{\varepsilon}$ sein muss. Demnach gehen durch irgend einen Durchschnittspunkt der Spiralen λ und $\lambda+\delta$, welcher irgend einem Werthe von k zugehört, auch alle diejenigen Spiralen, welche durch die Zahlen

$$\lambda,\ \lambda\pm\frac{\delta}{\varepsilon},\ \lambda\pm2\frac{\delta}{\varepsilon},\ \lambda\pm3\frac{\delta}{\varepsilon},\ \ldots$$

bestimmt werden, wobei ε den grössten gemeinschaftlichen Theiler von δ und k bedeutet. Ist k ein Vielfaches von δ, so ist $\frac{\delta}{\varepsilon}=1$; die vorige Zahlenreihe verwandelt sich dann in die aller ganzen Zahlen, und daher gehen durch diejenigen Durchschnittspunkte der Spiralen λ und $\lambda+\delta$, für welche k ein Vielfaches von δ ist, sämmtliche Spiralen hindurch, wie wir dies auch schon früher gefunden haben. Ist δ' ein Vielfaches von δ, so wird der Gleichung 10) für jeden Werth von k genügt, wenn k' das gleiche Vielfache von k ist. Daher gehen die Spiralen, welche den Zahlen

$$\lambda,\ \lambda\pm\delta,\ \lambda\pm2\delta,\ \lambda\pm3\delta,\ \ldots$$

angehören, durch alle Durchschnittspunkte der Spiralen λ und $\lambda+\delta$ hindurch.

Beispiele zu dem Vorigen zeigt die Fig. 2, Taf. IV, in welcher im Punkte 3 die Spiralen $\lambda=-2$, $\lambda=0$, $\lambda=2$, $\lambda=4$; in den Punkten 2 und 4 die Spiralen $\lambda=-2$, $\lambda=1$, $\lambda=4$, und im Punkte c die Spiralen $\lambda=-1$, $\lambda=1$, $\lambda=3$ zusammentreffen.

7.

Auch die von den Spiralen eingeschlossenen Flächenräume bieten eigenthümliche Verhältnisse dar. Der Sector einer logarithmischen Spirale vom Pole an bis zu einem beliebigen Punkte P der Spirale ist bekanntlich

gleich der Hälfte des rechtwinkligen Dreiecks POL_λ (Fig. 3, Taf. IV), welches von dem Radiusvector PO, der Polarsubtangente OL_λ und der Tangente PL_λ gebildet wird. Wir wollen nun für P einen der allen Spiralen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte annehmen und den in der Spirale λ genommenen Sector mit S_λ bezeichnen, so ist

$$S_0 = \tfrac{1}{2} POL_0, \quad S_1 = \tfrac{1}{2} POL_1, \quad S_2 = \tfrac{1}{2} POL_2 \text{ etc.},$$

wobei wir diejenigen Sectoren und Dreiecke als positiv annehmen wollen, welche auf derjenigen Seite des Radiusvectors liegen, auf welcher die Zahlen λ wachsen, die auf der entgegengesetzten Seite liegenden aber als negativ. Zieht man je zwei auf einander folgende Sectoren von einander ab, so erhält man

$$S_\lambda - S_{\lambda-1} = PL_{\lambda-1}L_\lambda.$$

Nun sind aber die Dreiecke $PL_{\lambda-1}L_\lambda$ für jeden Werth von λ einander gleich, weil sie alle eine gemeinschaftliche Spitze und nach dem im Abschnitt 4 bewiesenen Satze auch gleiche Grundlinien haben. Also ist

$$S_1 - S_0 = S_2 - S_1 = S_3 - S_2 = \ldots$$

Macht man dieselbe Betrachtung für den auf P folgenden Durchschnittspunkt P' und bezeichnet die bis zu diesem Punkte reichenden Sectoren mit S_λ', so ist auch

$$S_1' - S_0' = S_2' - S_1' = S_3' - S_2' = \ldots$$

und wenn man

$$S_\lambda' - S_\lambda = s_\lambda$$

setzt, gleichfalls

$$s_1 - s_0 = s_2 - s_1 = s_3 - s_2 = \ldots$$

Nun bedeutet s_λ den Sector der Spirale λ, welcher zwischen den beiden auf einander folgenden gemeinschaftlichen Durchschnittspunkten oder Potenzpunkten P und P' enthalten ist; die Differenz $s_\lambda - s_{\lambda-1}$ bedeutet also das Flächenstück, welches von zwei auf einander folgenden Spiralen $\lambda - 1$ und λ begrenzt wird, wenn von diesen Spiralen nur die zwischen zwei auf einander folgenden Potenzpunkten enthaltenen Theile in Betracht gezogen werden. Wir erhalten daher folgenden Satz: Nimmt man von der durch zwei Punkte hindurchgehenden Schaar von Spiralen diejenigen Theile, welche zwischen zwei auf einander folgenden gemeinschaftlichen Durchschnittspunkten enthalten sind, so haben die von je zwei auf einander folgenden Spiralen eingeschlossenen Flächenräume gleichen Flächeninhalt.

Denselben Satz kann man noch in einer etwas anderen Form aussprechen. Betrachtet man irgend drei auf einander folgende Spiralen, so haben die beiden von ihnen eingeschlossenen Flächenstücke stets ein gewisses Stück gemeinschaftlich. Nämlich zwischen je zwei auf einander folgenden Potenzpunkten P und P' liegt dann noch der Durchschnittspunkt Q (Fig. 4 und 5, Taf. IV) der beiden äusseren Spiralen und das Stück, welches von den zwischen den Punkten P und Q liegenden Theilen der beiden äusseren Spiralen begrenzt ist, ist beiden Flächenräumen gemeinschaftlich.

len, einander ebenfalls gleichen Flächenstücke aber bil- nige Dreiecke, welche die Punkte P, Q und P' zu Ecken drei S alen zu Seiten haben. Daher hat man auch folgenden irgend drei auf einander folgenden logarithmischen Spiralen aus durch zwei Punkte hindurchgehenden Schaar schneiden sich die beiden hen je zwei auf einander folgenden gemeinschaftlichen unkten P und P' in einem dritten Punkte Q; und die beiden eiecke, welche die Punkte P, Q, P' zu Ecken und die drei alen zu Seiten haben, sind an Flächeninhalt einander gleich. In Fig. 4 5. Taf. IV, sind die Spiralen für die Werthe 1, 2, 3 und 2, 3, 4 von λ 2 besonders gezeichnet, und die zwischen zwei auf einander fol- ide piralen enthaltenen, einander gleichen Flächenräume durch ver- ene Schraffirung unterschieden worden, wodurch die gemeinschaft- Stücke und die übrig bleibenden krummlinigen Dreiecke deutlicher vortreten.

8.

Zum Schlusse mögen noch einige Worte über die Construction der nen der Potenzwerthe hinzugefügt werden. Versteht man unter denselben Werth, welcher nach der Bezeichnung des Abschnitts 1 durch $v \,.\, log_n\, u$ ausgedrückt ist, so erhält man aus 2)

$$log\,(u_n{}^v) = x\,log\,a - y\,(\alpha + 2n\pi) + i\,[y\,log\,a + x\,(\alpha + 2n\pi)].$$

Bezeichnet man nun mit ξ_n und η_n die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes $log\,(u_n{}^v)$, setzt man also

$$log\,(u_n{}^v) = \xi_n + i\eta_n,$$

so ist

$$11)\qquad \begin{cases} \xi_n = x\,log\,a - y\,(\alpha + 2n\pi), \\ \eta_n = y\,log\,a + x\,(\alpha + 2n\pi). \end{cases}$$

Eliminirt man daraus n, so erhält man für die Linie, auf welcher die Logarithmen sämmtlicher Werthe der Potenz u^v liegen, die Gleichung

$$x\xi + y\eta = (x^2 + y^2)\,log\,a,$$

wenn ξ und η die laufenden Coordinaten dieser Linie bedeuten. Diese Gleichung schreibt sich auch, wenn mit b und β der Radiusvector und der Neigungswinkel des Exponenten v bezeichnet werden,

$$\xi\,cos\,\beta + \eta\,sin\,\beta = b\,log\,a;$$

und zeigt, dass die Punkte, welche die Logarithmen der Werthe der Potenz u^v darstellen, auf einer Geraden liegen, welche senkrecht auf dem Radiusvector des Exponenten v steht und denselben in der Entfernung $b\,log\,a$ vom Anfangspunkte durchschneidet.

Die Werthe 11) sind dieselben, welche sich auch für $log\,r_n$ und φ_n ergeben haben, wenn r_n und φ_n die Polarcoordinaten des Punktes $u_n{}^v$ bedeuten. Setzt man nun

$$log\,(u_n{}^v) = X = \xi + i\eta,$$
$$u_n{}^v = Y = r\,(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi),$$

so dass $Y = e_0{}^X$ ist, so hat man stets

$$\xi = log\,r \text{ und } \eta = \varphi.$$

Daraus kann man den Schluss ziehen, dass wenn der Punkt X eine Curve beschreibt, die in rechtwinkligen Coordinaten ξ und η durch die Gleichung

$$f(\xi, \eta) = 0$$

ausgedrückt ist, der Punkt Y in der besonderen isogonalen Verwandtschaft*), welche durch die Gleichung

$$Y = e_0{}^X$$

gegeben ist, eine Curve durchläuft, deren Gleichung, in Polarcoordinaten r und φ ausgedrückt, die folgende

$$f(log\,r, \varphi) = 0$$

ist. In dem besonderen Falle, dass der Punkt X eine Gerade durchläuft, beschreibt der Punkt Y eine logarithmische Spirale. Jeder Geraden in X entspricht also eine logarithmische Spirale in Y; weil aber, wenn k eine ganze Zahl bedeutet,

$$e_0{}^{X+2k\pi i} = e_0{}^X = Y$$

ist, so entspricht jeder logarithmischen Spirale in Y eine Schaar paralleler Geraden in X, deren Durchschnitte mit der Ordinatenachse den constanten Abstand 2π von einander haben. Ebenso entspricht jeder durch die Gleichung $f(log\,r, \varphi) = 0$ gegebenen Curve in Y eine Schaar von Curven in X, die durch die Gleichung $f(\xi, \eta + 2k\pi) = 0$ bestimmt werden, worin für k Null und alle ganzen Zahlen zu setzen sind.

---

*) Vgl. Seebeck. Ueber die graphische Darstellung imaginärer Functionen. Crelle's Journal, Bd. 55.

Kleinere Mittheilungen.

XXXI. Zusammenhang unter den Coefficienten zweier gleichen Kettenbrüche von verschiedener Form. Von Dr. HEILERMANN, Director der Prov.-Gewerbeschule zu Koblenz. Wenn die Kettenbrüche

$$\cfrac{1}{x+a_0-\cfrac{b_0}{x+a_1-\cfrac{b_1}{x+a_2-\cdots-\cfrac{b_{n-1}}{x+a_n}}}} \quad \text{und} \quad \cfrac{1:x}{1+\cfrac{p_1:x}{1+\cfrac{p_2:x}{1+\cfrac{p_3:x}{1+\cdots+\cfrac{p_{2n}:x}{1+p_{2n+1}}}}}}$$

gleich sein sollen, so ist zunächst

$$\frac{1}{x+a_0}=\frac{1:x}{1+p_1:x},$$

folglich

1) $$a_0=p_1.$$

Zweitens ist

$$a_0-\frac{b_0}{x+a_1}=\cfrac{p_1}{1+\cfrac{p_2}{x+p_3}},$$

oder

$$\frac{a_0x+a_0a_1-b_0}{x+a_1}=\frac{p_1x+p_1p_3}{x+p_2+p_3},$$

folglich

2) $$a_1=p_2+p_3, \quad b_0=p_1p_2.$$

Drittens ist

$$a_1-\frac{b_1}{x+a_2}=p_2+\cfrac{p_3}{1+\cfrac{p_4}{x+p_5}},$$

oder

$$\frac{a_1x+a_1a_2-b_1}{x+a_2}=\frac{(p_2+p_3)x+p_2p_4+p_2p_5+p_3p_5}{x+p_4+p_5},$$

und daraus folgt wieder

3) $$a_2 = p_4 + p_5, \quad b_1 = p_3 p_4.$$

a diese Vergleichung fortgesetzt und auch das Kästner'sche Inductions-rfahren in derselben Weise angewendet werden kann, so ist allgemein

4) $$a_\alpha = p_{2\alpha} + p_{2\alpha+1}, \quad b_{\alpha-1} = p_{2\alpha-1} p_{2\alpha}.$$

lletzt erhält man

5) $$a_n = p_{2n} + p_{2n+1}, \quad b_{n-1} = p_{2n-1} p_{2n}.$$

Die vorstehenden Gleichungen geben an, wie die Coefficienten des stern Kettenbruches aus denen des zweiten gebildet werden; durch Umhrung derselben erhält man den letztern aus dem erstern, und zwar

$$p_1 = a_0, \qquad p_2 = \frac{b_0}{a_0},$$

$$p_3 = a_1 - \frac{b_0}{a_0}, \qquad p_4 = \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_0}{a_0}},$$

$$p_5 = a_2 - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_0}{a_0}}, \qquad p_6 = \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_0}{a_0}}},$$

$$\vdots$$

$$p_{2\alpha-1} = a_{\alpha-1} - \cfrac{b_{\alpha-2}}{a_{\alpha-2} - \cfrac{b_{\alpha-3}}{a_{\alpha-3} - \cfrac{\vdots}{- \cfrac{b_0}{a_0}}}},$$

$$p_{2\alpha} = \cfrac{b_{\alpha-1}}{a_{\alpha-1} - \cfrac{b_{\alpha-2}}{a_{\alpha-2} - \cfrac{b_{\alpha-3}}{a_{\alpha-3} - \cfrac{\vdots}{- \cfrac{b_0}{a_0}}}}},$$

$$p_{2n} = \cfrac{b_{n-1}}{a_{n-1} - \cfrac{b_{n-2}}{a_{n-2} - \cfrac{\vdots}{- \cfrac{b_0}{a_0}}}},$$

$$p_{2n+1} = a_n - \cfrac{b_{n-1}}{a_{n-1} - \cfrac{b_{n-2}}{a_{n-2} - \cfrac{\vdots}{- \cfrac{b_0}{a_0}}}}.$$

XXXII. Ueber die grössten Polygone, die sich über eine gegebene Gerade einer Parabel einschreiben lassen. Von Prof. Simon Spitzer.

(1. Aufgabe. Fig. 8, Taf. IV.) Es soll der Parabel über die Seite AB das grösste Dreieck eingezeichnet werden.

.. ..g. Halbirt man *AB* in *C* und zieht durch *C* eine Gerade | zur Achse der Parabel, so wird offenbar eine Tangente an *D* *AB* sein, der Punkt *D* ist also bezüglich der Geraden *AB* ein .. Punkt der Parabel, somit das Dreieck *ABD* das grösste, was sich *AB* in der Parabel construiren lässt.

2. Aufg. Fig. 7, Taf. IV. Es soll der Parabel über die Seite *AB* das sste Viereck eingezeichnet werden.

Aufl. Gesetzt, es sei *ANMB* das grösste Viereck, welches sich der abel einschreiben lässt. Zieht man die Diagonale *BN*, so muss offenbar *I* das grösste Dreieck sein, welches sich über *BN* der Parabel ein- eiben lässt, folglich muss nach dem Früheren die durch *M* zur Parabel- ie gezogene Parallele die Sehne *BN* in *m* halbiren und folglich muss, Aehnlichkeit der Dreiecke *BmC* und *D* halber, $BC = CD$ sein. Ganz lässt sich zeigen, dass $CD = AD$ muss, folglich findet man das .. Viereck, das sich der Parabel *B* einzeichnen lässt, wenn man in drei gleiche Theile theilt und die Theilpunkte parallele Ge- zur Hauptachse zieht; da, wo diese ien die Parabel schneiden, sind i Eckpunkte des Vierecks.

Ebenso müsste man verfahren, wollte man über *AB* der Parabel das ste *n*Eck einzeichnen. Man theile nä ch *AB* in $n-1$ gleiche Theile, .. durch die Theilpunkte parallele Gerade zur Achse der Parabel; da, o diese Linien die Parabel treffen, sind die gesuchten Eckpunkte des grössten der Parabel eingezeichneten *n* Eckes.

XXXIII. Ueber die grössten Dreiecke, die sich über eine gegebene Gerade einer Ellipse oder Hyperbel einschreiben lassen. Von Prof. S. Spitzer. 1. Aufg. Fig. 8, Taf. IV. Es soll der Ellipse über die Seite *AB* das grösste Dreieck eingezeichnet werden.

Aufl. Halbirt man *AB* in *C* und verbindet den Mittelpunkt der Ellipse *O* mit *C* durch eine Gerade, welche die Ellipse in den zwei Punkten *M* und *N* schneidet, so werden offenbar die Tangenten an *M* und *N* parallel zu *AB* sein, folglich sind die Punkte *M* und *N* bezüglich der Geraden *AB* die höchsten oder tiefsten Punkte der Ellipse, folglich die Dreiecke *AMB* und *ANB* die grössten Dreiecke, die sich der Ellipse über *AP* einschreiben lassen.

2. Aufg. Es soll der Hyperbel über die Seite *AB* das grösste Dreieck eingezeichnet werden. (Figur ist leicht selbst zu entwerfen.)

Aufl. Halbirt man *AB* in *C* und verbindet den Mittelpunkt *O* der Hyperbel mit *C* durch eine Gerade, welche die Hyperbel in den zwei Punkten *M* und *N* schneidet, so werden offenbar die Tangenten an *M* und *N* parallel zu *AB* sein, folglich sind die Punkte *M* und *N* bezüglich der Geraden *AB* die höchsten oder tiefsten Punkte der Hyperbel, folglich ist

das Dreieck ANB das grösste und das Dreieck AMB das kleinste Dreieck, was sich über AB der Hyperbel einschreiben lässt. — Würde die Sehne AB beide Zweige der Hyperbel schneiden, so fände man weder ein grösstes noch ein kleinstes Dreieck, was sich der Hyperbel einschreiben liesse.

Ganz analog lassen sich die Aufgaben lösen, wo es sich um Einschreiben einer grössten Pyramide in eine Fläche zweiten Grades über eine gegebene Grundfläche handelt.

XXXIV. Die Beziehung zwischen den Halbmessern von vier sich gegenseitig berührenden Kreisen, sowie von fünf derartigen Kugeln.

Von C. W. Baur.

Vier Kreise.

1. Sind x_m und y_m die Coordinaten eines Punktes P_m in einem ebenen Systeme, so geben drei Punkte P_1, P_2, P_3 folgende identische Gleichung zwischen ihren Coordinaten zu erkennen:

$$=0 \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 0 \\ x_2, & y_2, & 0 \\ x_3, & y_3, & 0 \end{vmatrix}^2$$

oder nach der Vorschrift für die Multiplication zweier Determinanten mit gleichviel Gliedern (Baltzer, Determinanten, §. 6. 2):

$$1)\qquad 0=\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2, & x_1x_2+y_1y_2, & x_1x_3+y_1y_3 \\ x_1x_2+y_1y_2, & x_2^2+y_2^2, & x_2x_3+y_2y_3 \\ x_1x_3+y_1y_3, & x_2x_3+y_2y_3, & x_3^2+y_3^2 \end{vmatrix}$$

Ist das System ein rechtwinkliges und man bezeichnet den Abstand des Punktes P_m vom Ursprung O mit a_m, den Abstand P_mP_n aber mit a_{mn}, so wird

$$2)\qquad a_m^2=x_m^2+y_m^2,\quad a_n^2=x_n^2+y_n^2,$$
$$a_{mn}^2=(x_m-x_n)^2+(y_m-y_n)^2$$

und es folgt

$$3)\qquad 2(x_mx_n+y_my_n)=a_m^2+a_n^2-a_{mn}^2,$$

oder, wenn der hohle Winkel P_mOP_n mit (a_ma_n) bezeichnet wird,

$$4)\qquad x_mx_n+y_my_n=a_ma_n\cos(a_ma_n).$$

In Folge der Gleichungen 2) und 4) geht die Identität 1) mit $a_1^2a_2^2a_3^2$ durchdividirt in die Beziehung über, welche zwischen den hohlen Winkeln dreier von einem Punkt ausgehenden Geraden in einer Ebene stattfindet und einen Ausdruck dafür darbietet, dass der Rauminhalt des Tetraeders $OP_1P_2P_3$ Null sein müsse. (Baltzer. §. 16. 2.)

In Folge der Gleichungen 2) und 3) dagegen giebt 1):

$$5)\qquad 0=\begin{vmatrix} 2a_1^2, & a_1^2+a_2^2-a_{12}^2, & a_1^2+a_3^2-a_{13}^2 \\ a_1^2+a_2^2-a_{12}^2, & 2a_2^2, & a_2^2+a_3^2-a_{23}^2 \\ a_1^2+a_3^2-a_{13}^2, & a_2^2+a_3^2-a_{23}^2, & 2a_3^2 \end{vmatrix}$$

ei[illegible]ung zwischen den Abständen a_1, a_2, a_3 eines Punktes O [illegible] Ecken eines durch seine Seiten a_{23}, a_{31}, a_{12} bestimmten Dreiecks [illegible]bietet einen Ausgangspunkt dar für die Auflösung der viel behan-n A[illegible]ge, den Halbmesser eines Kreises zu bestimmen, der drei ge-ne[illegible]ise berühren soll.

Nim[illegible] man nämlich an, ein aus O mit r beschriebener Kreis berühre drei aus P_1, P_2, P_3 mit r_1, r_2, r_3 beschriebenen Kreise, so wird, wenn die letzteren Halbmesser ihre absoluten Längen positiv oder negativ [illegible]eführt werden, je nachdem der betreffende Kreis den aus O beschrie-[illegible]en von Aussen oder von Innen berührt:

$$a_1 = r + r_1, \quad a_2 = r + r_2, \quad a_3 = r + r_3.$$

[illegible]t man diese Werthe in 5) ein [illegible]rwandelt die Determinante mit [illegible] i[illegible]ine solch[illegible] [illegible]n, indem man den vorhandenen [illegible] vor[illegible] [illegible]a die neue Horizontalreihe

$$+[illegible], \quad -[illegible]), \quad -[illegible] r_2), \quad -2r(r+r_3)$$

[illegible]igt und diese zu den drei unt[illegible], so erhält man, wenn

$$r_m^2 + r_n^2 - a_{mn}^2 = 2k_{mn}$$

[illegible]etzt wird (Baltzer, §. 2. 6, §. 3. 4):

$$0 = \begin{vmatrix} +1, & -2r(r+r_1), & -2r(r+r_2), & -2r(r+r_3) \\ +1, & +2r_1(r+r_1), & +2rr_1+2k_{12}, & +2rr_1+2k_{13} \\ +1, & +2rr_2+2k_{12}, & +2r_2(r+r_2), & +2rr_2+2k_{23} \\ +1, & +2rr_3+2k_{13}, & +2rr_3+2k_{23}, & +2r_3(r+r_3) \end{vmatrix}$$

oder, wenn man abermals links Nullen vorsetzt, oben die Horizontalreihe

$$+1, \quad 0, \quad +2r, \quad +2r, \quad +2r$$

anfügt und dieselbe mit beziehungsweise $+r$, $-r_1$, $-r_2$, $-r_3$ multiplicirt zu den vier unteren addirt:

$$0 = \begin{vmatrix} +1, & 0, & +2r, & +2r, & +2r \\ +r, & +1, & -2rr_1, & -2rr_2, & -2rr_3 \\ -r_1, & +1, & +2r_1^2, & +2k_{12}, & +2k_{13} \\ -r_2, & +1, & +2k_{12}, & +2r_2^2, & +2k_{23} \\ -r_3, & +1, & +2k_{13}, & +2k_{23}, & +2r_3^2 \end{vmatrix}$$

Werden endlich, unbeschadet der Gleichheit, die zwei oberen Horizontalreihen mit r, die drei letzten Vertikalreihen mit 2 durchdividirt und die zwei ersten links vertauscht, so ergiebt sich:

$$6) \qquad 0 = \begin{vmatrix} 0, & +\frac{1}{r}, & +1, & +1, & +1 \\ +\frac{1}{r}, & +1, & -r_1, & -r_2, & -r_3 \\ +1, & -r_1, & +r_1^2, & +k_{12}, & +k_{13} \\ +1, & -r_2, & +k_{12}, & +r_2^2, & +k_{23} \\ +1, & -r_3, & +k_{13}, & +k_{23}, & +r_3^2 \end{vmatrix}$$

Die Entwickelung der Determinante liefert eine in Beziehung auf $\frac{1}{r}$ quadratische Gleichung, aus welcher r in den gegebenen Halbmessern auszudrücken wäre. Bemerkt man, dass ein gleichzeitig vor allen vier Halbmessern ausgeführter Zeichenwechsel auf die Elemente in den drei letzten Horizontal- und Vertikalreihen ohne Einfluss ist, also keine andere Wirkung hat als eine Multiplication der zweiten Horizontal- und Vertikalreihe mit -1, d. h. die Gleichheit nicht stört, so wird man die Zweideutigkeit der Auflösung dahin auszulegen haben, dass die eine Wurzel den positiven Halbmesser desjenigen Kreises angebe, der von den gegebenen Kreisen so berührt wird, wie es die Vorzeichen, mit denen ihre Halbmesser eingeführt worden sind, erfordern, die andere Wurzel aber den negativen Halbmesser des anderen Kreises, der von allen drei gegebenen Kreisen anders berührt wird, als der erstere. Die Erörterung der verschiedenen Fälle, welche in Betreff der Vorzeichen der Halbmesser r_1, r_2, r_3 eintreten können, führt in Verbindung mit der Beziehung zwischen dem Coefficienten des zweiten Glieds einer quadratischen Gleichung und der Summe ihrer Wurzeln zu dem von H. Wiegand*) mitgetheilten Satze des Engländers Mr. G. W. Hearn:

Wenn drei Kreise in einer Ebene gegeben sind, so kann man im Allgemeinen acht Kreise beschreiben, welche die drei gegebenen berühren. Bezeichnet nun R_n den Radius eines Kreises, welcher von n der gegebenen Kreise berührt wird, und $\Sigma\frac{1}{R_n}$ die Summe der reciproken Werthe aller derartigen Kreise, so ist:

$$\frac{1}{R_3}+\Sigma\frac{1}{R_1}=\frac{1}{R_0}+\Sigma\frac{1}{R_2}.$$

2. Nimmt man aber den besonderen Fall an, dass sich die drei gegebenen Kreise selbst äusserlich berühren, so vereinigen sich sechs von diesen acht Kreisen in drei Paaren mit den drei gegebenen Kreisen und es treten nur zwei neue auf, unter welchen der eine von allen drei gegebenen von Aussen, der andere aber von Innen berührt wird. Der Halbmesser des einen wird positiv, der des anderen negativ für r eingeführt werden müssen, wenn unsere Gleichung 6) befriedigt werden soll. In dieser geht aber die Veränderung vor sich, dass

$$2k_{mn}=r_m^2+r_n^2-a_{mn}^2=r_m^2+r_n^2-(r_m+r_n)^2=-2r_mr_n,$$
$$k_{mn}=-r_m\,.\,r_n$$

wird. Man hat also, wenn die drei letzten Horizotal- und Vertikalreihen beziehungsweise mit r_1, r_2, r_3 durchdividirt werden:

---

*) Die schwierigeren Aufgaben aus des Herrn Prof. Jacobi Anhängen zu van Swinden's Geometrie mit Ergänzungen englischer Mathematiker etc. von Dr. A. Wiegand. Halle, Schwetschke u. S., 1849. S. 154.

$$0=\begin{vmatrix} 0, & +\frac{1}{r}, & +\frac{1}{r_1}, & +\frac{1}{r_2}, & +\frac{1}{r_3} \\ +\frac{1}{r}, & +1, & -1, & -1, & -1 \\ +\frac{1}{r_1}, & -1, & +1, & -1, & -1 \\ +\frac{1}{r_2}, & -1, & -1, & +1, & -1 \\ +\frac{1}{r_3}, & -1, & -1, & -1, & +1 \end{vmatrix}$$

oder, wenn die Determinante ausgeführt und die Gleichung mit 4 durchdividirt wird:

$$7)\quad 0=\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}-2\left(\frac{1}{rr_1}+\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{rr_2}+\frac{1}{r_1r_3}+\frac{1}{rr_3}+\frac{1}{r_1r_2}\right)$$

oder in abgekürzter Schreibart:

$$\Sigma\frac{1}{r^2}=2\Sigma\frac{1}{rr_1}.$$

Dieses ist also die Beziehung, welche zwischen den Halbmessern von vier sich gegenseitig berührenden Kreisen in der Art stattfindet, dass für jeden Halbmesser seine Länge positiv oder negativ einzuführen ist, je nachdem den betreffenden Kreis die drei anderen alle von Aussen oder alle von Innen berühren.

3. Da es für graphische Zwecke von Vortheil sein kann, in einen gegebenen Kreis mit dem Halbmesser r drei andere sich gegenseitig berührende Kreise zu beschreiben, deren Halbmesser zu r in rationalen Verhältnissen stehen, so mögen hier die Formeln entwickelt werden, welche das Mittel zu diesem Zweck darbieten.

Durch Auflösung der Gleichung 4) nach $\frac{1}{r_3}$ erhält man, nachdem r negativ genommen worden ist:

$$8)\qquad \frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r}\pm 2\sqrt{\frac{1}{r_1r_2}-\frac{1}{rr_1}-\frac{1}{rr_2}}.$$

Der Bedingung wird daher genügt sein, wenn — unter u eine beliebige rationale Zahl verstanden —

$$\frac{1}{r_1r_2}-\frac{1}{rr_1}-\frac{1}{rr_2}=\frac{u^2}{r_1^2}.$$

Nimmt man daher beliebig das rationale Verhältniss:

$$9)\qquad \frac{r_1}{r_2}=\varepsilon,$$

so gibt die vorhergehende Gleichung mit r_1^2r durchmultiplicirt:

$$r\varepsilon-r_1-r_1\varepsilon=ru^2,$$

also:

10) $$r_1 = r \cdot \frac{\varepsilon - u^2}{1+\varepsilon}, \quad r_2 = \frac{r}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon - u^2}{1+\varepsilon},$$

vermöge 8) also:

$$\frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_1}(1 \pm 2u + \varepsilon) - \frac{1}{r}$$

$$= \frac{1}{r}\left\{(1 \pm 2u + \varepsilon) \cdot \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon - u^2} - 1\right\}$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \frac{(1+\varepsilon \pm 2u)^2 - \varepsilon}{\varepsilon - u^2}$$

oder

11) $$r_3 = r \cdot \frac{\varepsilon - u^2}{(1+\varepsilon \pm u)^2 - \varepsilon}.$$

Die Gleichungen 9), 10) und 11) enthalten also die Auflösung der Aufgabe.

Nimmt man insbesondere $\varepsilon = 1$, so wird

$$r_1 = r_2 = r \cdot \frac{1-u^2}{2}, \quad r_3 = \frac{1-u^2}{(2 \pm u)^2 - 1} = r \cdot \frac{1 \mp u}{3 \pm u}.$$

Beide Werthe von r_3 dagegen werden einander gleich, wenn $u = 0$, in Folge dessen, den Gleichungen 8) und 10) gemäss, sich herausstellt:

$$r = r_1 + r_2, \quad \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r}.$$

Auf den letztern Fall bezieht sich eine Schul-Aufgabe aus Sohncke's Sammlung zur Differentialrechnung, wo in §. 11 unter No. 68 verlangt ist, der Durchmesser $2r$ eines gegebenen Halbkreises solle in zwei solche Theile getheilt werden, dass, wenn man über jedem Theile wieder einen Halbkreis, sodann aber einen diese beiden von aussen und den gegebenen von Innen berührenden Vollkreis beschreibt, der Flächeninhalt, welchen diese drei neuen Figuren an der gegebenen übrig lassen, ein Maximum werde. Eine etwas aufmerksame Behandlung zeigt, dass die im Buche angegebene Auflösung, der Halbmesser jedes der beiden neuen Halbkreise soll $\frac{1}{2}r$, der des Vollkreises aber $\frac{1}{3}r$ werden, ein Minimum und nicht ein Maximum des übrig bleibenden Flächeninhalts bestimmt; durch Auflösung einer Gleichung des dritten Grades dagegen stösst man auf ein ziemlich unerwartetes Maximum, welches dann eintritt, wenn die Halbmesser der neuen Halbkreise die Werthe $0{,}64463\ldots r$ und $0{,}35537\ldots r$ erhalten.

Fünf Kugeln.

4. Sind x_m, y_m z_m die Coordinaten eines Punktes P_m in einem räumlichen Systeme, so geben vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 folgende Identität zwischen ihren Coordinaten zu erkennen:

$$0 = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1, & 0 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 0 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 0 \\ x_4, & y_4, & z_4, & 0 \end{vmatrix}^2$$

oder durch Ausführung der Multiplication:

$$12)\quad 0=\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2+z_1^2, & x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2, & x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3, & x_1x_4+y_1y_4+z_1z_4 \\ x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2, & x_2^2+y_2^2+z_2^2, & x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3, & x_2x_4+y_2y_4+z_2z_4 \\ x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3, & x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3, & x_3^2+y_3^2+z_3^2, & x_3x_4+y_3y_4+z_3z_4 \\ x_1x_4+y_1y_4+z_1z_4, & x_2x_4+y_2y_4+z_2z_4, & x_3x_4+y_3y_4+z_3z_4, & x_4^2+y_4^2+z_4^2 \end{vmatrix}.$$

Wird wieder der Abstand des Punktes P_m vom Ursprunge 0 mit a_m, derjenige der Punkte P_m und P_n aber mit a_{mn} bezeichnet, so ist im Falle eines rechtwinkligen Systems:

$$13)\quad a_m^2=x_m^2+y_m^2+z_m^2,\quad a_n^2=x_n^2+y_n^2+z_n^2,$$
$$a_{mn}^2=(x_m-x_n)^2+(y_m-y_n)^2+(z_m-z_n)^2,$$

somit

$$14)\quad 2(x_mx_n+y_my_n+z_mz_n)=a_m^2+a_n^2-a_{mn}^2,$$

oder, wenn wieder (a_ma_n) der hohle Winkel P_mOP_n ist:

$$15)\quad x_mx_n+y_my_n+z_mz_n=a_ma_n\cos(a_ma_n).$$

Vermöge der Gleichungen 13) und 15) liefert 12) die Beziehung zwischen den Cosinus der sechs hohlen Winkel, welche vier von einem Punkte ausgehende Geraden im Raume mit einander bilden, oder — wenn man sich zu jedem Abstande OP_m eine Ebene senkrecht gelegt denkt — die Beziehung zwischen den Cosinus der Neigungswinkel eines Tetraeders, wie solche Carnot S. 407 ff. der *Géométrie de position* aufgestellt hat.

Dagegen liefern die Ausdrücke 13) in Verbindung mit 14) in 12) eingesetzt, die Beziehung zwischen den vier Abständen eines Punktes O von den Ecken eines durch seine sechs Kanten gegebenen Tetraeders, und eine solche ist es, von welcher man bei Auflösung der folgenden Aufgabe auszugehen hat:

Den Halbmesser einer Kugel zu bestimmen, welche vier gegebene Kugeln berührt.

Carnot stellt diese Aufgabe auf S. 416 der *Géom. de pos.* auf und zeigt, wie die obige Beziehung zwischen den Cosinus jener sechs hohlen Winkel in eine solche zwischen den vier Halbmessern und den sechs Centralen der gegebenen Kugeln nebst dem gesuchten Halbmesser R umgesetzt werden kann, fügt aber bei: „*il viendra une équation, où il n'y aura plus que R d'inconnue, et qui, à ce que je présume, ne sera que du second degré. Mais le calcul étant fort long, quoique sans aucune difficulté, je me contente de l'indiquer.*“

Es erfordert aber weder lange noch schwierige Rechnungen, diese quadratische Gleichung vermittelst einer Determinante darzustellen. Nimmt man nämlich an, eine aus O mit dem Halbmesser r beschriebene Kugel werde von den vier aus P_1, P_2, P_3, P_4 mit r_1, r_2, r_3, r_4 beschriebenen Kugeln berührt, so hat man unter Beibehaltung der oben über die Vorzeichen der Kreishalbmesser gegebenen Vorschriften:

$$a_m = r + r_m.$$

Setzt man nun wieder

$$r_m^2 + r_n^2 - a_{mn}^2 = 2k_{mn},$$

so erhält man ganz auf demselben Wege, wie oben 6) aus 5) abgeleitet worden ist,

$$13)\ 0 = \begin{vmatrix} 0, & +\frac{1}{r}, & +1, & +1, & +1, & +1 \\ +\frac{1}{r}, & +1, & -r_1, & -r_2, & -r_3, & -r_4 \\ +1, & -r_1, & +r_1^2, & +k_{12}, & +k_{13}, & +k_{14} \\ +1, & -r_2, & +k_{12}, & +r_2^2, & +k_{23}, & +k_{24} \\ +1, & -r_3, & +k_{13}, & +k_{23}, & +r_3^2, & +k_{34} \\ +1, & -r_4, & +k_{14}, & +k_{24}, & +k_{34}, & +r_4^2 \end{vmatrix}.$$

Diese Darstellung der in Beziehung auf $\frac{1}{r}$ quadratischen Gleichung gewährt wenigstens einen genügenden Einblick in den Bau, den die rechte Seite durch Entwickelung der Determinante annehmen würde, um die Mittel zum Beweis der folgenden Sätze, welche an die Stelle des oben angeführten Satzes von Hearn treten, darzubieten:

Sind vier Kugeln im Raume gegeben, so sind im Allgemeinen sechszehn andere möglich, welche von denselben theils innerlich, theils äusserlich berührt werden. Es seien R_m und R_m' die Halbmesser zweier solchen unter den sechszehn Kugeln, deren eine von m unter den gegebenen äusserlich, die andere aber von allen vier anders berührt wird als die erstern, ferner S_n und S_n' die Halbmesser zweier solchen, deren eine ausser von einer bestimmten unter den vieren noch von n unter den drei andern äusserlich, die andere aber von allen vier anders berührt wird als die erstere, so finden folgende Beziehungen statt:

$$\frac{2}{R_4} - \frac{2}{R_0} = \Sigma\frac{1}{R_3} - \Sigma\frac{1}{R_1},$$

$$\frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_0} + 2\left(\frac{1}{S_0} - \frac{1}{S_0'}\right) = \Sigma\left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_1'}\right),$$

$$\frac{1}{R_4 R_0} + \Sigma\frac{1}{R_2 R_2'} = \Sigma\frac{1}{R_3 R_3'}.$$

Sämmtliche Glieder der zweiten Gleichung beziehen sich auf einerlei bestimmte Kugeln, es giebt also vier derartige Gleichungen; zusammen liefern diese wieder die erste der drei obigen.

5. Gehen wir aber wieder zu der besonderen Voraussetzung über, dass sich die vier gegebenen Kugeln selbst gegenseitig äusserlich berühren, so giebt die Anwendung des oben mit Gleichung 6) vorgenommenen Verfahrens auf Gleichung 13):

$$0=\begin{vmatrix} 0, & +\frac{1}{r}, & +\frac{1}{r_1}, & +\frac{1}{r_2}, & +\frac{1}{r_3}, & +\frac{1}{r_4} \\ +\frac{1}{r}, & +1, & -1, & -1, & -1, & -1 \\ +\frac{1}{r_1}, & -1, & +1, & -1, & -1, & -1 \\ +\frac{1}{r_2}, & -1, & -1, & +1, & -1, & -1 \\ +\frac{1}{r_3}, & -1, & -1, & -1, & +1, & -1 \\ +\frac{1}{r_4}, & -1, & -1, & +1, & -1, & +1 \end{vmatrix}$$

oder durch Entwickelung der Determinante in abgekürzter Schreibart, nach welcher das Summenzeichen auf alle fünf Halbmesser gleichmässig bezogen wird:

$$14)\qquad \Sigma\frac{1}{r^2}=\Sigma\frac{1}{r r_1}.$$

Wollen wir diese Formel, um sie zu prüfen, auf die Bestimmung des Halbmessers r einer Kugel anwenden, welche von vier gleichen, sich gegenseitig äusserlich berührenden Kugeln berührt werden soll, so geht aus der Annahme

$$r_3=r_2=r_1$$

die Gleichung

$$\frac{1}{r^2}+\frac{4}{r_1^2}=\frac{4}{r r_1}+\frac{6}{r_1^2}$$

hervor, welche die Wurzeln

$$r=r_1\left(-1\pm\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)$$

liefert. Die eine positive giebt unmittelbar den Halbmesser der von allen vier gegebenen Kugeln äusserlich, die andere negative mit gewechseltem Vorzeichen denjenigen der von allen vier innerlich berührten Kugel an. Die Nachweisung der Richtigkeit dieser Ausdrücke aus geometrischen Betrachtungen unterliegt keinem Anstand.

Handelt es sich darum, in eine gegebene Kugel vom Halbmesser r vier andere sich gegenseitig äusserlich berührende Kugeln zu beschreiben, so giebt die Bestimmung von r_4 aus den als gegeben angenommenen Halbmessern $-r$, $+r_1$, $+r_2$, $+r_3$ nach Gleichung 14), wenn nachfolgend das Summenzeichen nur auf die drei letzteren Halbmesser bezogen wird:

$$15)\quad \frac{1}{r_4}=\tfrac{1}{2}\left(\Sigma\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\left(-\frac{1}{r^2}-\Sigma\frac{1}{r_1^2}-\frac{2}{r}\Sigma\frac{1}{r_1}+2\Sigma\frac{1}{r_1 r_2}\right)}.$$

Die Wurzelgrösse verschwindet vermöge Gleichung 7), wenn drei in einer Ebene mit den Halbmessern r_1, r_2, r_3 beschriebene, sich gegenseitig äusserlich berührende Kreise einen mit r beschriebenen innerlich berühren, d. h. beide Werthe von r_4 werden einander gleich, wenn die Mittelpunkte der

drei als gegeben angenommenen einbeschriebenen Kugeln in der Ebene eines Grosskreises der umschriebenen liegen. Dass in diesem Falle in der That zwei gleiche, symmetrisch gegen die Ebene des Grosskreises liegende Kugeln der an die vierte innere Kugel gestellten Bedingung gleichmässig genügen, folgt unmittelbar aus der Natur der Aufgabe, nicht so aber, dass der Halbmesser dieser vierten Kugel durch die einfache Beziehung

$$\frac{1}{r_4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r}\right)$$

angegeben wird.

6. Die andere Aufgabe, r_1, r_2, r_3, r_4 in rationale Verhältnisse zu r zu bringen, habe ich folgendermaassen aufzulösen versucht.

Setzt man

$$16)\qquad \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\left(-\frac{1}{r^2}-\Sigma\frac{1}{r_1^2}-\frac{2}{r}\Sigma\frac{1}{r_1}+2\Sigma\frac{1}{r_1 r_2}\right)}=\frac{3u}{2r_1},$$

so erhält man, nachdem quadrirt und mit r_1^2 durchmultiplicirt ist, durch Auflösung nach $\frac{r_1}{r}$, wenn

$$17)\qquad \frac{r_1}{r_2}=\varepsilon_2 \text{ und } \frac{r_1}{r_3}=\varepsilon_3$$

gesetzt wird:

$$18)\qquad \frac{r_1}{r}=-(1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\pm\sqrt{4(\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_3)-3u^2};$$

nimmt man daher

$$4(\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_3)-3u^2=v^2,$$

so bestimmt sich aus dem beliebig gewählten rationalen Verhältniss ε_2 ebenfalls rational:

$$19)\qquad \varepsilon_3=\frac{v^2+3u^2-4\varepsilon_2}{4(1+\varepsilon_2)}.$$

Dadurch geht 18), wenn wegen des nur positiv verlangten Werthes von r_4 nur das obere Zeichen berücksichtigt wird, über in:

$$20)\qquad \frac{r_1}{r}=\frac{4\varepsilon_2-3u^2-(2+2\varepsilon_2-v)^2}{4(1+\varepsilon_2)}.$$

Dieser Ausdruck giebt aber in Verbindung mit 15) und 16):

$$21)\qquad \frac{r_1}{r_4}=\frac{3(1+\varepsilon_2\pm u)^2+(1+\varepsilon_2-v)^2-4\varepsilon_2}{4(1+\varepsilon_2)}.$$

Die Gleichungen 17), 19), 20) und 21) enthalten jetzt die vollständige Auflösung der Aufgabe.

Wird insbesondere $r_3=r_2=r_1$ oder $\varepsilon_3=\varepsilon_2=\varepsilon_1$ verlangt, so sind vermöge 19) die rationalen Zahlen u und v so zu wählen, dass

$$v^2+3u^2=12.$$

Derartige Werthe lassen sich aber in einer beliebigen rationalen Zahl w folgendermaassen angeben:

$$v=\frac{12w}{1+3w^2}, \quad u=2.\frac{1-3w^2}{1+3w^2}$$

und führen vermöge 20) und 21) zu folgender doppelten Auflösung:

22) $$r_1=3r.\frac{(3w-1)(1-w)}{1+3w^2} \text{ und } r_4=\frac{r}{2}.\frac{1-w}{w} \text{ oder } r_4=r.\frac{3w-1}{2}.$$

Durch unmittelbare Behandlung dieses speciellen Falles habe ich, von Gleichung 15) mit $r_3=r_2=r_1$ ausgehend, folgende Ausdrücke in einer beliebigen rationalen Zahl $t>3$ erhalten:

$$r_1=6r.\frac{t-3}{t^2+3} \text{ und } r_4=\frac{t-1}{2r} \text{ oder } r_4=r.\frac{t-3}{t+3}.$$

Beide Auflösungen sind identisch, denn in die letzteren Ausdrücke gehen diejenigen unter 22) über für

$$w=\frac{t-1}{t+3}.$$

N. S. Nachdem vorstehende Arbeit schon geschrieben und auch abgesendet war, wurde ich durch eine Veröffentlichung auf Seite 438 des XVIII. Bandes der *Nouvelles Annales* auf ein *Mémoire* aufmerksam, das in No. 30 und 31 des XVII. Bandes des *Bulletin de la classe physico-mathématique de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg* unter folgendem Titel erschienen ist: *Des relations qui existent entre les rayons des huit cercles tangents à trois autres et entre les rayons des seize sphères tangentes à quatre autres: par M. J. Mention (lu le 26 Nov. 1858).*

Wie schon aus diesem Titel ersichtlich, hat die Abhandlung mit dem Hauptgegenstsnd meiner Mittheilung, nämlich den vier sich gegenseitig berührenden Kreisen und den vier derartigen Kugeln sich nicht befasst, dagegen ist der allgemeinere Fall, den ich nur vorübergehend berührt habe, durch ausgeführtere Behandlung der Gleichungen, die ich in unentwickelter Gestalt gelassen habe, erschöpfender betrachtet worden. Ich glaube eine Pflicht gegen die Leser, die sich weiter für den Stoff interessiren, zu erfüllen, indem ich sie auf die obige Abhandlung aufmerksam mache.

XXXV. Notiz über die photographirten Lichtspectren des Herrn Dr. Julius Müller in Freiburg. Der genannte Herr hat bekanntlich vor zwei Jahren das mit Hülfe eines Glasspectrums erhaltene Sonnenspectrum photographirt, um auch den chemisch wirksamen ultravioletten Theil des Sonnenspectrums darzustellen. Da die Absorption des Glases gegen die äussersten Strahlen um Vieles stärker ist, als die des Bergkrystalles, so wendete Müller bei erneuten Versuchen eine Bergkrystalllinse und ein Bergkrystallprisma an, um den ultravioletten Theil des Spectrums in grösserer Ausdehnung als bei den früheren Versuchen zu erhalten. Bei Anwendung von nur einem Quarzprisma würden durch Doppelbrechung zwei

theilweise sich deckende Spectren entstehen, deshalb schob Müller zwischen Spalte und Quarzprisma das von ihm (Pouillet, 5. Aufl., 1. Bd. 671, Fig. 747) angegebene achromatisirte Quarzprisma ein, welches nur zwei gänzlich von einander getrennte, senkrecht gegen einander polarisirte Strahlen hindurchlässt. Der eine derselben wird zur Abbildung des Spectrums benutzt, indem die Kante des Bergkrystallprismas die geeignete Lage zur Polarisationsebene des einfallenden Strahles erhält. Müller gelang es auf diese Weise, die über die letzte sichtbare Gruppe von *H* hinaus liegenden Linien *L*, *M*, *N*, *O*, *P*, *Q*, *R*, *S* (nach Stokes und Esselbach) darzustellen. Für diejenigen Herren Physiker, welche sich dergleichen photographische Abbildungen des Sonnenspectrums käuflich zu verschaffen wünschen, entnehmen wir aus Poggendorf's Annalen die Notiz, dass verschiedene photographirte Spectren direct durch Herrn Hofphotographen Theodor Hase oder durch die Buchhandlung von Diernfellner zu Freiburg im Breisgau oder endlich durch Herrn Joh. Val. Albert Sohn in Frankfurt a. M. zu beziehen sind, und zwar:

1. Die Tafel mit 5 Glasspectren zu 1 Thlr. 10 Sgr. Das Spectrum ist hier in derselben Weise erhalten, wie es Müller in seinem Lehrbuche der Physik (4. Aufl. I. Bd. S. 436) beschrieben hat; an die Stelle des Papierschirmes war aber die mit photographischem Collodium überzogene Glasplatte gesetzt worden. Das Spectrum ist fünfmal, bei 1, 2, 4, 10 und 15 Secunden Lichtwirkung abgebildet worden. Bei 1″ Lichtwirkung hatte sich nur der Theil zwischen *H* und *G* mit allen zwischenliegenden dunkeln Linien abgebildet, übrigens hatten alle Strahlen von den hellblauen zwischen *G* und *F* an bis zu den rothen Strahlen nicht mit gewirkt. Bei 2″ Lichtwirkung wurden noch die von Stokes*) mit *l* bezeichneten Linien sichtbar, welche indess bei 4″ Lichtwirkung am schönsten ausfielen. Die Gruppe *m* trat am deutlichsten bei 10″ Lichtwirkung hervor.

2. Die Tafel I. der Quarzspectra zu 1 Thlr. Diese enthält zwei bei 1″ und 2″ Lichtwirkung erhaltene Spectra. Die Partie zwischen *G* und *L* ist hier weniger rein und scharf, als bei dem einen Glasspectrum. Die Streifen *M*, *N* sind bei 1″ Lichtwirkung, die Streifen *M*, *N*, *O* bei 2″ Lichtwirkung sehr schön sichtbar.

3. Die Tafel II. der Quarzspectra, enthaltend fünf Abbildungen, bei 1, 2, 4, 8 und 16 Secunden Lichtwirkung erhalten. Etwas weniger scharf und kleiner als Tafel I., jedoch hinlänglich deutlich, um die Positionen der dunkeln Linien zu bestimmen. Das erste Spectrum geht über *O* hinaus, das zweite bis *Q*, das dritte über *Q* hinaus, das vierte und fünfte über *R* hinaus.

4. Die Tafel III. der Quarzspectra, fünf Spectra enthaltend zu 1 Thlr.

*) Stokes giebt eine Abbildung des ultravioletten Theiles, zum Theil mit Anwendung flurrescirter Körper erhalten und übereinstimmend mit den damals von Kingley verfertigten photographischen Spectren in Pogg. Ann. Ergänzungsbd. IV. Taf. I. Fig. 1.

:wei letzten Spectren dieser Tafel enthalten eine besondere Eigen-
ıkeit, eine nebelartige Erweiterung des Spectrums zwischen *F* und
ıche dadurch hervortritt, dass man eine bromhaltige Collodium-
dem Lichte des Spectrums 45 bis 60 Secunden lang aussetzt.

Anmerk. Eine recht nette Abbildung des ganzen Spectrums befindet sich in Karstens allgemeiner Encyklopädie der Physik. 7. Lieferung. Taf. IV. Fig. 1. Dr. Kahl.

VI. Ueber die Fraunhofer'schen Linien (Pogg. Ann. Bd. 109.
ıch den Monatsber. der Berl. Akad. Octbr. 1859) **von G. Kirchhoff.**
ht, welches von den Himmelskörpern ausgestrahlt wird, giebt uns Kunde von ihrer gegenseitigen Stellung zu einander; die Untersuchung desselben zeigt, ob die Lichtquelle in dem ausstrahlenden Körper selbst liegt oder ob selbiger nur fremdes Licht wiedergiebt; man kann indess auch (nach dem oben citirten Aufsatze) durch die Analyse des Lichtes der Sonne und der helleren Fixsterne Aufschlüsse über die Bestandtheile dieser selbstleuchtenden Körper erhalten. Bei einer noch nicht veröffentlichten Arbeit über das Spectrum der bunten Flammen haben Kirchhoff und Bunsen folgende Entdeckung gemacht: Treten im Spectrum einer Flamme helle Linien auf, wie z. B. im Spectrum der durch Kochsalz oder Chlorlithium gefärbten Spiritusflamme, und man lässt durch die Flamme Licht hindurch gehen, welches die eben genannten hellen Linien auch hat (z. B. Kalklicht), so sieht man nun im Spectrum an der Stelle der hellen Linien scharfe dunkle Linien entstehen, es scheint hiernach, als ob Strahlen von der Farbe der hellen Linien am Meisten durch die Flamme geschwächt würden. Das Sonnenspectrum nun zeigt dunkle Linien, wo nach Brewster im Spectrum der Salpeterflamme und nach Kirchhoff und Bunsen im Spectrum der Natronflamme helle Linien sind; hieraus schliessen die letzteren auf die Anwesenheit von Kali und Natron in der als Flamme wirkenden Photosphäre der Sonne. Die hoffentlich bald erfolgenden Mittheilungen von Kirchhoff und Bunsen werden uns Veranlassung geben, weitere Berichte über den interessanten Gegenstand zu geben. Dr. Kahl.

XIV.

Das Problem des Pappus und die Gesetze der Doppelschnittsverhältnisse bei Curven höherer Ordnungen und Classen.

Von Dr. Wilh. Fiedler,
Lehrer der darstellenden Geometrie an der Gewerbschule in Chemnitz.

Wenn die Gleichungen von vier geraden Linien durch

$$\alpha = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta = 0, \quad \beta_1 = 0$$

dargestellt werden und C eine Constante bezeichnet, so lässt sich die Gleichung eines Kegelschnittes, welcher dem von diesen vier geraden Linien, in der angegebenen Ordnung genommen, gebildeten Vierecke umschrieben ist, durch

$$\alpha . \beta = C . \alpha_1 . \beta_1$$

ausdrücken. Denn diese Gleichung repräsentirt einen Kegelschnitt und derselbe muss durch die Punkte gehen, wo die geraden Linien $\alpha = 0$, $\beta = 0$ von den beiden andern geraden Linien $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$ geschnitten werden.

Indem man der Constanten C nach einander alle möglichen reellen Werthe beilegt, erhält man die Gleichungen aller der Kegelschnitte, welche diesem Viereck umschrieben werden können.

Dieselbe Gleichung spricht bei zweckmässiger Interpretation zugleich die allgemeine Eigenschaft der Punkte jedes solchen Kegelschnittes aus, die im 7. Buche der mathematischen Sammlungen des Pappus schon gegeben und von Newton in seinen *Principiis math. philos. nat.* neu bewiesen und erfolgreich angewendet worden ist: In jedem einem Viereck umschriebenen Kegelschnitt besteht zwischen dem Product der Entfernungen eines Punktes desselben von zwei Gegenseiten des Vierecks und dem Product seiner Entfernungen von den zwei andern Gegenseiten ein constantes Verhältniss.

Dann führt eine leichte Erweiterung auch zu der allgemeinen Auflösung des berühmten alten Problems *ad tres aut plures lineas*, welches fordert, den geometrischen Ort eines Punktes in Bezug auf eine Reihe von geraden Linien so zu bestimmen, dass das Product seiner Entfernungen von einer Anzahl derselben zu dem Product seiner Entfernungen

von allen übrigen in einem constanten Verhältnisse stehe, und von welchem Problem der Satz des Pappus das enthält, was die Geometrie der Alten zu seiner Auflösung gethan hat.

Man findet diesen Satz in der obigen Gleichung ausgedrückt, sobald man die in ihr durch Symbole vertretenen Gleichungen der vier geraden Linien in der Form

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha \dot{-} n = 0$$

voraussetzt, wo α den von der geraden Linie mit der positiven Seite der Achse der x eingeschlossenen Winkel und n den senkrechten Abstand des Coordinatenanfangspunktes von ihr unter Annahme rechtwinkliger Coordinaten bedeutet.

In dieser Form besitzt die Gleichung den Vorzug, die Länge der Normale von einem beliebigen Punkte (x_1, y_1) auf die durch sie dargestellte gerade Linie anzugeben, denn diese letztere ist

$$x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - n.$$

Man kann dies leicht direct beweisen; es folgt aber auch aus der Regel zur Bestimmung dieses Abstandes für die durch

$$Ax + By + C = 0$$

dargestellte gerade Linie, welche die Formel ausdrückt

$$n_1 = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Hiernach drückt offenbar die Gleichung

$$\alpha \,.\, \beta = C \,.\, \alpha_1 \,.\, \beta_1$$

den Satz des Pappus aus, sobald man die Symbole $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$ als Abkürzungen für die Gleichungen der vier geraden Linien in dieser Form betrachtet, nämlich

$$\alpha \text{ für } x \cos \alpha + y \sin \alpha - n, \quad \beta \text{ für } x \cos \beta + y \sin \beta - n',$$
$$\alpha_1 \text{ für } x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - n_1, \quad \beta_1 \text{ für } x \cos \beta_1 + y \sin \beta_1 - n_1'.$$

Alles diess gilt auch unter der Voraussetzung, dass man sich zur analytischen Entwickelung des Systems dreiseitiger Punktcoordinaten bedient, bei welchem ein Punkt durch seine drei Abstände von drei festen Fundamentallinien bestimmt und eine gerade Linie durch eine homogene Gleichung ersten Grades zwischen diesen drei Veränderlichen ausgedrückt wird. Und damit erlangt man den wesentlichen Vortheil, dass dieselben Relationen auch nach dem System der dreipunktigen Liniencoordinaten interpretirt werden können, bei welchem eine gerade Linie durch ihre drei Abstände von drei festen Fundamentalpunkten bestimmt und ein Punkt durch eine homogene Gleichung zwischen diesen Veränderlichen dargestellt wird *). Dann liefert dieselbe Gleichung noch den Satz: Wenn ein

*) Ich darf wohl für diese beiden Coordinatensysteme und ihre gegenseitigen Beziehungen auf meine Abhandlung: „Die Theorie der Pole und Polaren bei Curven höherer Ordnung" in dieser Zeitschrift, 2. Hft. 1859, S. 91 f. und S. 127, verweisen.

Kegelschnitt einem Viereck eingeschrieben ist, so besteht zwischen dem Product aus den senkrechten Abständen einer beliebigen Tangente desselben von zweien seiner Gegenecken und dem Product der Abstände derselben Tangente von den zwei andern Gegenecken ein constantes Verhältniss.

Lässt man in jener Symbolgleichung die beiden geraden Linien α_1 und β_1 zusammenfallen, so dass

$$\alpha \, . \, \beta = C \, . \, \alpha_1^2,$$

so wird die dadurch repräsentirte Curve zweiter Ordnung von den Linien $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ in je zwei zusammenfallenden Punkten geschnitten, nämlich in den Punkten, wo die Linie $\alpha_1 = 0$ ihr begegnet; $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ sind Tangenten der Curve und $\alpha_1 = 0$ ist ihre Berührungssehne.

Für jeden Punkt eines Kegelschnittes ist das Product der Entfernungen von zwei festen Tangenten desselben zu dem Quadrat seiner Entfernung von ihrer Berührungssehne in constantem Verhältniss.

Für jede Tangente eines Kegelschnittes ist das Product der Entfernungen von zwei festen Punkten desselben zu dem Quadrat ihrer Entfernung von dem Durchschnitt der in jenen Punkten an die Curve gezogenen Tangenten in constantem Verhältniss.

Da sich die Gleichung einer unendlich entfernten geraden Linie auf eine Constante reducirt, so wird die letzte Symbolgleichung unter der Voraussetzung, dass die Berührungssehne α_1 in unendlicher Ferne sei,

$$\alpha \, . \, \beta = C^2,$$

die Asymptotengleichung der Kegelschnitte, und drückt den Satz aus: Für jeden Punkt eines Kegelschnitts ist das Product seiner Abstände von den Asymptoten der Curve constant.

Alle diese Symbolgleichungen enthalten fünf oder mehr Constanten und drücken daher allgemeine Eigenschaften aller Kegelschnitte aus; auch die aus ihnen ohne weitere speciellere Voraussetzungen gezogenen Folgerungen gelten allgemein. Ich gehe unter diesen nur auf die Eigenschaften von fünf Punkten und fünf Tangenten eines Kegelschnittes hinsichtlich der Doppelschnittsverhältnisse ein.

Sind a_1', a_1'', a_2'', a_2' die Ecken des eingeschriebenen Vierecks, h_1 und h_2 die Abstände eines beliebigen Punktes p auf dem Kegelschnitte von den Gegenseiten $a_1'a_1''$, $a_2''a_2'$ respective, H_1 und H_2 die Abstände desselben Punktes von dem andern Paare der Gegenseiten, so sagt der Satz des Pappus, dass

$$\frac{h_1 h_2}{H_1 H_2} = const.;$$

indem man die Abstände h_1, h_2... als Höhen der entsprechenden Dreiecke von der Spitze p und über den Seiten des Vierecks ausdrückt,

$$h_1 = \frac{pa_1' . pa_1'' . \sin a_1' pa_1''}{a_1' a_1''} \text{ u. s. w.,}$$

ıan

$$\frac{\ldots \sin a_1' pa_1'' . pa_2' . pa_2'' . \sin a_2' pa_2''}{\ldots \sin a_1'' pa_2'' . pa_1' . pa_2' . \sin a_1' pa_2'} . \frac{a_1'' a_2'' . a_1' a_2'}{a_1' a_1'' . a_2' a_2''} = const.,$$

r

$$\frac{\sin a_1' pa_1''}{\sin a_1' pa_2'} : \frac{\sin a_2'' pa_1''}{\sin a_2' pa_2''} = const.$$

Bezeichne man ebenso durch a_1', a_1'', a_2'', a_2' die Seiten des umschrie- ›enen Vierseits, durch p eine fünfte Tangente des Kegelschnittes und mit lenselben Buchstaben a_1', a_1''... die Durchschnittspunkte dieser Tangente t jenen Seiten, endlich mit h_1, h_2 die ... tfernungen dieser Tangente von n Gegenecken (a_1', a_1'') und (a_2'', a_2'), mit H_1, H_2 die Entfernungen der- ... Tangente von den Gegenecken (a_1'', a_2'') und (a_2', a_1') des Vierecks, ... man endlich die Entfernungen h_1, h_2... als Höhen der entspre- ...nden Dreiecke aus, welche von den paarweise genommenen Seiten des ...ıen Vierecks mit der fünften Tangente gebildet werden, nämlich

$$h_1 = \frac{a_1' a_1'' . \sin (a_1', p) . \sin (a_1'', p)}{\ldots} \text{ u. s. w.*)},$$

› geht aus

$$\frac{h_1 h_2}{H_1 H_2} = \ldots t.$$

hervor

$$\frac{a_1' a_1'' . \sin (a_1', p) . \sin (a_1'', p) . a_2' a_2'' . \sin (a_2', p) . \sin (a_2'', p)}{a_1' a_2' . \sin (a_1', p) . \sin (a_2' p) . a_1'' a_2'' . \sin (a_1'', p) . \sin (a_2'', p)} . \frac{\sin (a_1'', a_2'') . \sin (a_1', a_2')}{\sin (a_1', a_1'') . \sin (a_2', a_2'')}$$
$$= const.,$$

oder

$$\frac{a_1' a_1''}{a_1' a_2'} : \frac{a_2'' a_1''}{a_2'' a_2'} = const.$$

Man kann diese Sätze auch ohne weiteren Beweis aus dem Princip des anharmonischen Entsprechens schliessen, von welchem, als von einem sehr ausgedehnter Anwendungen fähigen allgemeinen Gesetze, ich in dieser Zeitschrift demnächst handeln werde. Gewiss können sie nur durch die Form, in der sie hier vorgetragen wurden, und durch die Beziehung des Folgenden auf diese Darlegung an dieser Stelle berechtigt sein; ich verdanke die Anregung zu dieser Darstellungsweise der Kenntniss der Werke des Rev. George Salmon.

---

*) Aus den Seiten a, b, c und den Gegenwinkeln α, β, γ ergiebt sich die zu a gehörige Höhe ebensowohl

$$h = \frac{b . c . \sin \alpha}{a},$$

als auch

$$h = \frac{a . \sin \beta . \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

Es liegt sehr nahe, von dem Satze des Pappus über zwei Gruppen von zwei geraden Linien in Bezug auf eine Curve zweiter Ordnung und dem entsprechenden über zwei Gruppen von zwei Punkten in Bezug auf eine Curve zweiter Classe zu Sätzen über zwei Systeme von drei geraden Linien in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung und über zwei Systeme von drei Punkten in Bezug auf eine Curve dritter Classe überzugehen.

Diese Sätze sind in der Symbolgleichung

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = C \cdot \alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \gamma_1$$

enthalten; sie repräsentirt eine Curve dritter Ordnung, welche durch die neun Punkte geht, wo die geraden Linien $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ respective den geraden Linien $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$ begegnen, und weil die Zahl der in ihr enthaltenen Constanten grösser ist, als die Zahl der Constanten in der allgemeinen Gleichung dritten Grades, so kann jede Curve dritter Ordnung durch sie dargestellt werden.

Man findet in ihr, je nach der Interpretation in Punkt- oder in Liniencoordinaten, die folgenden beiden Sätze:

Für jeden Punkt einer Curve dritter Ordnung, die durch die neun Punkte geht, in denen ein System von drei geraden Linien in einer Ebene einem zweiten System von drei geraden Linien in derselben Ebene begegnet, ist das Product seiner Entfernungen von den geraden Linien des einen Systems zu dem Product seiner Entfernungen von den geraden Linien des andern Systems in constantem Verhältniss*).

Für jede Tangente einer Curve dritter Classe, welche die neun geraden Linien berührt, welche drei Punkte eines ersten Systems mit den drei Punkten eines zweiten Systems in derselben Ebene verbinden, ist das Product der Entfernungen von den drei Punkten des ersten Systems zu dem Product der Entfernungen von den drei Punkten des zweiten Systems in constantem Verhältniss.

Andererseits liefert dieselbe Gleichung die Sätze: Wenn man zwei gerade Linien ($\alpha = 0$, $\alpha = 0$) zieht, welche eine Curve dritter Ordnung je in drei Punkten schneiden, und diese Schnittpunkte paarweise durch drei neue gerade Linien ($\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$) verbindet, so liegen die drei Schnittpunkte, welche

*) Dieser Satz ist von M. Terquem in seinen *Nouvell. Annal.* Oct. 1858 gegeben worden und es ist von ihm die damit zusammenhängende Verallgemeinerung der Relation der Doppelschnittsverhältnisse angeführt; M. Terquem hat auch neuestens die Beziehung der Involution in ähnlicher Weise auf Curven und Oberflächen höherer Ordnung übertragen, indem er von dem Sturm'schen Satze über die drei dem nämlichen Viereck umschriebenen Kegelschnitte ausging. (*Nouvell. Annal. Mars* 1859.)

Die Symbolgleichung dritter Ordnung haben jedoch schon Herr Plücker im System der analytischen Geometrie und Rev. G. Salmon im *Treatise on the higher plane curves* (1852) zum Theil discutirt.

diese letzteren auf der Curve ferner bestimmen, in einer geraden Linie.

Sind durch zwei Punkte an eine Curve dritter Classe je drei Tangenten gelegt, welche sich paarweise in drei neuen Punkten schneiden, so begegnen sich die drei Tangenten, die man von diesen Punkten noch ferner an die Curve ziehen kann, in einem Punkte.

Unter der Voraussetzung, dass zwei der geraden Linien des zweiten Systems ($\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$) in eine zusammenfallen, begegnen die drei geraden Linien $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ der Curve da, wo sie diese Doppellinie $\alpha_1 = 0$ schneiden, in je zwei zusammenfallenden Punkten und sind somit Tangenten der Curve, für welche $\alpha_1 = 0$ die gemeinschaftliche Berührungssehne ist. Die Gleichung

$$\alpha . \beta . \gamma = C . \alpha_1^2 . \gamma_1$$

lehrt, dass die drei Punkte, in denen diese Tangenten die Curve ferner schneiden, in einer geraden Linie liegen müssen*). Diese Eigenschaft ist auch eine Folge des allgemeinen Satzes: Wenn die Berührungspunkte von n Tangenten einer Curve $n$ten Grades in einer geraden Linie liegen, so sind die Punkte, wo dieselben die Curve ferner schneiden, auf einer Curve $(n-2)$ten Grades.

Für Curven dritter Classe heisst das Analogon des vorigen Satzes: Wenn von einem Punkte an eine Curve dritter Classe die drei Tangenten gezogen werden, so begegnen die drei von ihren Berührungspunkten an die Curve ferner möglichen Tangenten sich in einem Punkte.

Denkt man die Berührungssehne $\alpha_1 = 0$ im Falle der Curven dritter Ordnung oder den Durchschnittspunkt $\alpha_1 = 0$ der drei Tangenten im Fall der Curven dritter Classe in unendlicher Entfernung, so dass in beiden Fällen α_1 zu einer Constanten wird und die Gleichung in

$$\alpha . \beta . \gamma = C^2 . \gamma_1$$

übergeht, so sind $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ die drei Asymptoten einer Curve dritter Ordnung oder die drei parallelen Tangenten einer Curve dritter Classe. Die Gleichung lehrt, dass jene die Curve dritter Ordnung in drei Punkten einer geraden Linie durchschneiden, und dass die Tangenten, die man von den Berührungs-

*) Dieser Satz ist der VI. in Maclaurin's Abhandlung über die Curven dritter Ordnung. Man kann ihn auch aus dem allgemeineren Satze ableiten, welchen M. Poncelet in seinem *Mémoire sur l'analyse des transversales* (Crelle's Journal, VIII, S. 129) gegeben hat: Wenn von den neun Schnittpunkten einer Linie dritter Ordnung mit drei Transversalen sechs auf einem Kegelschnitt liegen, so sind die übrigen drei in einer geraden Linie enthalten.

punkten dieser an die Curve dritter Classe ferner ziehen kann, sich in einem Punkte schneiden. Wenn man endlich annimmt, dass die drei geraden Linien des zweiten Systems alle in eine einzige zusammenfallen, so dass

$$\alpha . \beta . \gamma = C . \alpha_1^3,$$

so sind $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ für Curven dritter Ordnung gerade Linien, welche mit ihr je drei zusammenfallende Punkte gemein haben, für Curven dritter Classe Punkte, in welchen je drei zusammenfallende Tangenten an die Curve gelegt werden. Die Gleichung lehrt, dass jene drei Punkte in einer geraden Linie liegen und dass diese drei Tangenten sich in einem Punkte begegnen. Dass jede gerade Linie, welche zwei Inflexionspunkte einer Curve dritter Ordnung verbindet, auch durch den dritten geht, ist der X. Satz von Maclaurin.

Alle diese Relationen sind allgemein für die Curven dritter Ordnung und Classe, weil die Zahl der Constanten in den sie darstellenden Gleichungen in keinem Falle geringer ist, als in der allgemeinen Gleichung dritten Grades. Wollte man aber etwa voraussetzen, dass an die Stelle des Symbols α_1 in der letzten Gleichung eine Constante trete, oder dass die Curve drei Inflexionspunkte im Unendlichen oder drei parallele Inflexionstangenten hat, so gälte diess sammt den daran geknüpften Folgerungen nicht mehr von Curven dritter Ordnung oder Classe im Allgemeinen.

In der Reihe der speciellen Fälle ist der einer der interessantesten, wo die Curve dritter Ordnung zugleich von der dritten Classe ist; sie muss dann einen stationären oder Rückkehrpunkt und eine Rückkehrtangente in ihm besitzen. Man bezeichne diesen Punkt durch B, den Inflexionspunkt durch A und die in beiden Punkten an die Curve gezogenen Tangenten durch BC und AC respective, das so entstandene Dreieck betrachte man als Fundamentaldreieck, beziehe auf die Seiten BC, CA und AB desselben die Punkte der Curve durch ihre Coordinaten x, y, z, wenn man Punktcoordinaten gebraucht, oder wenn man die Curve als von der dritten Ordnung betrachten will, und auf seine Ecken A, B, C durch ihre Coordinaten x, y, z die Tangenten der Curve, wenn man sie als Curve dritter Classe in Tangentialcoordinaten ausdrücken will. Dieses Dreieck repräsentirt in der ersten Voraussetzung zugleich zwei Systeme von drei geraden Linien; das eine bildet die Verbindungslinie der Spitze und des Inflexionspunktes AB, das andere besteht aus der Tangente BC, der Spitze als einer Doppellinie und der Tangente des Inflexionspunktes AC. In der zweiten Voraussetzung repräsentirt dasselbe Dreieck zwei Systeme von drei Punkten; das eine bildet der Durchschnittspunkt C der Inflexionstangente mit der Tangente der Spitze, das andere besteht aus dem Inflexionspunkt A und der Spitze B.

Darnach erscheint unter beiden Annahmen die Gleichung der Curve nothwendig in der Form

$$x^2 y = C z^3,$$

wo C eine Constante bedeutet. Wenn übrigens diese Gleichung die nämliche Curve einmal in Punkt-, das andere Mal in Liniencoordinaten bedeutet, so entsprechen der Constanten zwei verschiedene Werthe.

Für diese Curven hat Mr. G. Salmon eine sehr elegante Methode gegeben, Punkte oder Tangenten derselben durch eine einzige Veränderliche auszudrücken, und durch dieselbe mehrere allgemeine auf diese Curven bezügliche Aufgaben gelöst*).

Später hat Rev. Lawr. Smith über die Polarkegelschnitte derselben eine Abhandlung veröffentlicht**).

Ich erwähne nur, dass man die **Mittelpunkte dieser Curven** auf sehr einfache Art construiren kann.

Als Curve dritter Classe besitzt jede derselben einen einzigen Mittelpunkt***), welcher der punktförmige Pol der unendlich entfernten geraden Linie in der Ebene der Curve ist. Da die Gleichung dieses Pols einer geraden Linie allgemein durch

$$x\left(\frac{dU}{dx}\right)_1 + y\left(\frac{dU}{dy}\right)_1 + z\left(\frac{dU}{dz}\right)_1 = 0$$

ausgedrückt wird, wenn $U=0$ die Gleichung der Curve bedeutet, und

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_1, \quad \left(\frac{dU}{dy}\right)_1, \quad \left(\frac{dU}{dz}\right)_1$$

die Substitutionsresultate von x_1, y_1, z_1 als Coordinaten der geraden Linie für x, y, z in die entsprechenden partiellen Differentialquotienten sind, so ist für die Gleichung

$$x^2 y - C z^3 = 0$$

die Gleichung des punktförmigen Pols der geraden Linie x_1, y_1, z_1

$$2 x_1 y_1 x + x_1^2 y - 3 C z_1^2 z = 0.$$

Liegt diese gerade Linie in unendlicher Entfernung, so ist $x_1 = y_1 = z_1$ und die Gleichung ihres Pols wird zur **Gleichung des Mittelpunktes**

$$2x + y - 3Cz = 0.$$

Man construirt diesen Punkt, indem man die Strecke AB in D so theilt, dass $\frac{DA}{DB} = -\frac{1}{2}$, und auf der Verbindungslinie von D mit dem Punkte C den Punkt M so bestimmt, dass $\frac{MD}{MC} = -C$; oder man bestimmt auf AC den Punkt E so, dass $\frac{EA}{EC} = 3C$, und erhält M als Durchschnittspunkt von CD und BE.

---

*) *Higher plane curves*, S. 165 f.

**) *Quarterly Journal*, *May* 1858, S. 327 f.

***) Theorie der Pole und Polaren u. s. w. Diese Zeitschrift, Bd. IV, Heft 2, S. 129.

Man sieht daraus, dass die Mittelpunkte aller Curven dritter Classe, die zugleich dritter Ordnung sind, und die die Gleichung

$$x^2 y = Cz^3$$

darstellt, in einer und derselben geraden Linie CD liegen, welche den Durchschnittspunkt der Rückkehrtangente und der Inflexionstangente mit dem Punkte verbindet, der die gerade Strecke zwischen dem Inflexionspunkt und der Spitze in dem Verhältniss $-\frac{1}{2}$ theilt. Die Lage des Mittelpunktes auf dieser Linie hängt von der Grösse der Constanten C ab. So lange sie positiv ist, liegt er innerhalb der Strecke CD; ist sie negativ und grösser als 1, so liegt er ausserhalb derselben auf der Seite von C, und für negative ächt gebrochene Werthe auf der Seite von D; für $C = -1$ in unendlicher Entfernung.

Indem man die Curve als von der dritten Ordnung betrachtet und die Gleichung

$$x^2 y - Cz^3 = 0$$

auf Punktcoordinaten bezieht, erhält man durch dieselbe allgemeine Symbolgleichung

$$x\left(\frac{dU}{dx}\right)_1 + y\left(\frac{dU}{dy}\right)_1 + z\left(\frac{dU}{dz}\right)_1 = 0$$

die gerade Polare des Punktes x, y, z in der Form

$$2x_1 y_1 x + x_1^2 y - 3Cz_1^2 z = 0.$$

Die Pole der geraden Linie

$$ax + by + cz = 0$$

sind alsdann durch

$$\frac{2xy}{a} = \frac{x^2}{b} = -\frac{3Cz^2}{c}$$

bestimmt und die Pole der unendlich entfernten geraden Linie, d. h. die Mittelpunkte der Curve dritter Ordnung durch

$$\frac{2xy}{\sin\alpha} = \frac{x^2}{\sin\beta} = -\frac{3Cz^2}{\sin\gamma},$$

weil für diese unendlich entfernte gerade Linie

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

ist. Diese Bedingung liefert aber zur Bestimmung der Mittelpunkte die zwei Gleichungen

$$2y\sin\beta = x\sin\alpha \quad \text{und} \quad x^2\sin\gamma + 3Cz^2\sin\beta = 0.$$

Die erste von beiden ist genau die Linie CD der vorigen Construction; in derselben liegen daher auch die Mittelpunkte aller in der gegebenen Gleichung enthaltenen Curven dritter Ordnung. Ihre Lage in dieser bestimmt sich durch die Constante C, denn die zweite Gleichung repräsentirt zwei gerade Linien

durch den Punkt B, welche mit $x = 0$ und $z = 0$, d. h. mit BA und BC ein harmonisches Büschel bilden, dem das Theilungsverhältniss

$$k = \pm \sqrt{\frac{3\,C \sin\beta}{\sin\alpha}}$$

entspricht. Man sieht leicht, dass die Parabel-Evolute oder die Neil'sche Parabel eine besondere Curve dieser Art ist; ihre Gleichung $px^2 = z^3$ lehrt, dass ihr besonderer Character darin besteht, dass die unendlich entfernte gerade Linie die Curve im Inflexionspunkte berührt, dass also dieser selbst im Unendlichen liegt; ihre Spitze liegt im Coordinatenanfang und die Achse der x ist die Rückkehrtangente.

Für die Cubische Parabel

$$p^2 y = z^3$$

liegt dagegen die Spitze unendlich entfernt und der Inflexionspunkt im Anfangspunkt der Coordinaten; er ist auch der Mittelpunkt der Curve.

Indem man zum allgemeinen Fall zurückkehrt, erkennt man, dass alle die früheren Gleichungen Correlata des Satzes von Pappus für Curven dritter Ordnung und Classe liefern, von denen hier nur die folgenden zwei angeführt sein mögen:

Für jeden Punkt einer Curve dritter Ordnung ist das Product seiner Entfernungen von den drei Asymptoten der Curve in constantem Verhältniss zu seinem Abstand von der Verbindungslinie der drei Punkte, wo diese der Curve ferner begegnen*).

Für jeden Punkt einer Curve dritter Ordnung ist das Product der Entfernungen eines Punktes von den Tangenten der drei Inflexionspunkte zu dem Cubus seiner Entfernung von der Verbindungslinie dieser letzteren in constantem Verhältniss.

Alle diese Sätze lassen sich nun, ganz ebenso wie es oben mit dem Satze von Pappus und seinem reciproken geschehen ist, in constante Relationen zwischen den Sinus der Winkel eines Strahlenbüschels an dem die Curve durchlaufenden Punkte übertragen, welches von den Verbindungslinien dieses Punktes mit den die Basis der Curve bildenden neun festen Punkten zusammengesetzt wird, oder in constante Relationen zwischen den Längen der Segmente zwischen den Punkten einer Reihe auf der die Curve umhüllenden Tangente, welche von den neun festen Tangenten, die die Basis der Curve bilden, in ihr bestimmt werden. Ich werde die allgemeinen Relationen für die Strahlenbüschel und Punktreihen bei der Curve

*) H. Plücker hat diese gerade Linie durch S bezeichnet und sie in seiner Classification der Curven dritter Ordnung zur Bildung der Gruppen benutzt.

dritter Ordnung und der Curve dritter Classe entwickeln, ohne aber auf die mannichfachen speciellen Fälle einzugehen, die sich aus ihnen ableiten lassen.

Dazu bezeichne ich mit a_1', a_1'', a_1''' die drei Punkte, in denen die drei geraden Linien des zweiten Systems respective die erste gerade Linie des ersten Systems schneiden, mit p einen Punkt der bezüglichen Curve dritter Ordnung und mit h_1 die senkrechte Entfernung desselben von jener; dann ist

$$\sin a_1' p a_1'' = \frac{h_1 \,.\, a_1'a_1''}{a_1'p \,.\, a_1''p}$$

und ebenso:

$$\sin a_1'' p a_1''' = \frac{h_1 \,.\, a_1''a_1'''}{a_1''p \,.\, a_1'''p}, \quad \sin a_1''' p a' = \frac{h_1 \,.\, a_1'''a'}{a_1'''p \,.\, a_1'p}$$

und das Product dieser drei Gleichungen liefert:

$$\sin a_1' p a_1'' \,.\, \sin a_1'' p a_1''' \,.\, \sin a_1''' p a_1' = \frac{h_1^3 \,.\, a_1'a_1'' \,.\, a_1''a_1''' \,.\, a_1'''a_1'}{\overline{a_1'p}^2 \cdot \overline{a_1''p}^2 \cdot \overline{a_1'''p}^2}.$$

Sind alsdann die Schnittpunkte der geraden Linien des zweiten Systems mit der zweiten und dritten Geraden des ersten respective a_2', a_2'', a_2''' und a_3', a_3'', a_3''' und die entsprechenden Entfernungen des Punktes p von diesen zwei geraden Linien h_2 und h_3, so ergeben sich die entsprechenden Sinusproducte:

$$\sin a_2' p a_2'' \,.\, \sin a_2'' p a_2''' \,.\, \sin a_2''' p a_2' = \frac{h_2^3 \,.\, a_2'a_2'' \,.\, a_2''a_2''' \,.\, a_2'''a_2'}{\overline{a_2'p}^2 \cdot \overline{a_2''p}^2 \cdot \overline{a_2'''p}^2},$$

$$\sin a_3' p a_3'' \,.\, \sin a_3'' p a_3''' \,.\, \sin a_3''' p a_3' = \frac{h_3^3 \,.\, a_3'a_3'' \,.\, a_3''a_3''' \,.\, a_3'''a_3'}{\overline{a_3'p}^2 \cdot \overline{a_3''p}^2 \cdot \overline{a_3'''p}^2}.$$

Um die entsprechenden Producte für die drei geraden Linien des zweiten Systems zu bilden, ist nur nöthig, die drei Entfernungen dieser Linien vom Punkte p als H_1, H_2, H_3 respective einzuführen, dann ist für die erste Linie des zweiten Systems, als welche die Punkte a_1', a_2', a_3' enthält,

$$\sin a_1' p a_2' \,.\, \sin a_2' p a_3' \,.\, \sin a_3' p a_1' = \frac{H_1^3 \,.\, a_1'a_2' \,.\, a_2'a_3' \,.\, a_3'a_1'}{\overline{a_1'p}^2 \cdot \overline{a_2'p}^2 \cdot \overline{a_3'p}^2},$$

und ebenso

$$\sin a_1'' p a_2'' \,.\, \sin a_2'' p a_3'' \,.\, \sin a_3'' p a_1'' = \frac{H_2^3 \,.\, a_1''a_2'' \,.\, a_2''a_3'' \,.\, a_3''a_1''}{\overline{a_1''p}^2 \cdot \overline{a_2''p}^2 \cdot \overline{a_3''p}^2},$$

$$\sin a_1''' p a_2''' \,.\, \sin a_2''' p a_3''' \,.\, \sin a_3''' p a_1''' = \frac{H_3^3 \,.\, a_1'''a_2''' \,.\, a_2'''a_3''' \,.\, a_3'''a_1'''}{\overline{a_1'''p}^2 \cdot \overline{a_2'''p}^2 \cdot \overline{a_3'''p}^2}.$$

Wenn man diese letzten drei Producte multiplicirt und damit in das aus den drei auf die ersten drei geraden Linien bezüglichen Ausdrücken gebildete Product dividirt, so erhält man für die Sinusrelation

$$\frac{\sin a_1'a_1'' \,.\, \sin a_1''a_1''' \,.\, \sin a_1'''a_1' \,.\, \sin a_2'a_2'' \,.\, \sin a_2''a_2''' \,.\, \sin a_2'''a_2' \,.\, \sin a_3'a_3'' \,.\, \sin a_3''a_3''' \,.\, \sin a_3'''a_3'}{\sin a_1'a_2' \,.\, \sin a_2'a_3' \,.\, \sin a_3'a_1' \,.\, \sin a_1''a_2'' \,.\, \sin a_2''a_3'' \,.\, \sin a_3''a_1'' \,.\, \sin a_1'''a_2''' \,.\, \sin a_2'''a_3''' \,.\, \sin a_3'''a_1'''} \text{ *)}$$

den folgenden Ausdruck:

---

*) Zur Abkürzung ist überall der Scheitel p aus der Bezeichnung der Winkel weggelassen.

$$\left(\frac{h_1 h_2 h_3}{H_1 H_2 H_3}\right)^3 \cdot \frac{a_1'a_1'' \, . \, a_1''a_1''' \, . \, a_1'''a_1' \, . \, a_2'a_2'' \, . \, a_2''a_2''' \, . \, a_2'''a_2' \, . \, a_3'a_3'' \, . \, a_3''a_3''' \, . \, a_3'''a_3'}{a_1'a_2' \, . \, a_2'a_3' \, . \, a_3'a_1' \, . \, a_1''a_2'' \, . \, a_2''a_3'' \, . \, a_3''a_1'' \, . \, a_1'''a_2''' \, . \, a_2'''a_3''' \, . \, a_3'''a_1'''} \cdot$$

$$\cdot \frac{\overline{a_1'p}^2 \cdot \overline{a_2'p}^2 \cdot \overline{a_3'p}^2 \cdot \overline{a_1''p}^2 \cdot \overline{a_2''p}^2 \cdot \overline{a_3''p}^2 \cdot \overline{a_1'''p}^2 \cdot \overline{a_2'''p}^2 \cdot \overline{a_3'''p}^2}{\overline{a_1'p}^2 \cdot \overline{a_1''p}^2 \cdot \overline{a_1'''p}^2 \cdot \overline{a_2'p}^2 \cdot \overline{a_2''p}^2 \cdot \overline{a_2'''p}^2 \cdot \overline{a_3'p}^2 \cdot \overline{a_3''p}^2 \cdot \overline{a_3'''p}^2}.$$

Von den drei Factoren dieses Ausdrucks sind aber die beiden ersten für alle Lagen des Punktes p auf einer und derselben Curve dritter Ordnung unveränderlich, der dritte ist der Einheit gleich und man erhält den Satz:

Wenn eine Curve dritter Ordnung durch die neun Punkte $a_1', a_1'', a_1''', a_2', a_2'', a_2''', a_3', a_3'', a_3'''$ geht, in denen ein System von drei geraden Linien durch ein zweites System solcher drei geraden Linien geschnitten wird, so ist für alle Punkte p dieser Curve:

$$\frac{\sin a_1'a_1'' . \sin a_1''a_1''' . \sin a_1'''a_1' . \sin a_2'a_2'' . \sin a_2''a_2''' . \sin a_2'''a_2' . \sin a_3'a_3'' . \sin a_3''a_3''' . \sin a_3'''a_3'}{\sin a_1'a_2' . \sin a_2'a_3' . \sin a_3'a_1' . \sin a_1''a_2'' . \sin a_2''a_3'' . \sin a_3''a_1'' . \sin a_1'''a_2''' . \sin a_2'''a_3''' . \sin a_3'''a_1'''}$$
$$= \text{const.}$$

Diese constante Function ist aus zwei Producten von Sinus gebildet, deren eines sich auf das erste, das andere auf das zweite System der geraden Linien bezieht; jedes derselben enthält als Factoren die Sinus der neun Winkel, unter denen die auf der Geraden des einen Systemes von denen des andern gebildeten Segmente von dem Curvenpunkte aus gesehen werden.

Der Ort der Scheitel aller Strahlenbüschel mit unveränderter Basis, für welche dieses Gesetz erfüllt ist, ist eine Curve dritter Ordnung, der die Basis angehört; und durch jeden speciellen Werth dieser Function ist eine dieser Curven individualisirt.

Ich bezeichne ferner durch a_1', a_1'', a_1''' die drei geraden Linien, welche den ersten Punkt des ersten Systems mit den Punkten des zweiten verbinden, und zugleich auf dieselbe Weise die Punkte, wo diese Linie von einer beliebigen Tangente p der Curve dritter Classe geschnitten werden, die man betrachtet; desgleichen mit a_2', a_2'', a_2''' und a_3', a_3'', a_3''' die Linien, die den zweiten und dritten Punkt des ersten respective mit den Punkten des zweiten Systems verbinden und zugleich die Punkte, wo diese Linien derselben Tangente begegnen; endlich durch h_1, h_2, h_3 die Entfernungen der Punkte des ersten und durch H_1, H_2, H_3 die der Punkte des zweiten Systems von dieser Tangente.

Alsdann ist das auf dieser Tangente von den geraden Linien a_1', a_1'' bestimmte Segment

$$a_1'a_1'' = \frac{h_1 \, . \, \sin(a_1', a_1'')}{\sin(a_1', p) \, . \, \sin(a_1'', p)}$$

und das Product der drei durch die vom ersten Punkte des ersten Systems ausgehenden geraden Linien auf dieser Tangente bestimmten Segmente

$$a_1'a_1'' . a_1''a_1''' . a_1'''a_1' = \frac{h_1^3 . \sin(a_1', a_1'') . \sin(a_1'', a_1''') . \sin(a_1''', a_1')}{\sin^2(a_1', p) . \sin^2(a_1'', p) . \sin^2(a_1''', p)}.$$

Analoge Produkte liefern die vom zweiten und dritten Punkte des ersten Systems ausgehenden Geraden, und durch Multiplication dieser drei Producte erhält man das Product aller der Segmente, welche die von den Punkten des ersten Systems ausgehenden geraden Linien, d. h. die Tangenten der Curve vom ersten System auf der veränderlichen Tangente p bestimmen.

Auf gleiche Weise bildet man das Product aller in ihr von den Tangenten des zweiten Systems bestimmten Segmente; der erste Factor desselben ist

$$a_1'a_2' . a_2'a_3' . a_3'a_1' = \frac{H_1^3 . \sin(a_1', a_2') . \sin(a_2', a_3') . \sin(a_3', a_1')}{\sin^2(a_1', p) . \sin^2(a_2', p) . \sin^2(a_3', p)}.$$

Der Quotient

$$\frac{a_1'a_1'' . a_1''a_1''' . a_1'''a_1' . a_2'a_2'' . a_2''a_2''' . a_2'''a_2' . a_3'a_3'' . a_3''a_3''' . a_3'''a_3'}{a_1'a_2' . a_2'a_3' . a_3'a_1' . a_1''a_2'' . a_2''a_3'' . a_3''a_1'' . a_1'''a_2''' . a_2'''a_3''' . a_3'''a_1'''}$$

der beiden so gebildeten Segmentenproducte liefert einen Ausdruck, der aus einem constanten Theile und einem der Einheit gleichen Theile besteht. Der erstere ist:

$$\left(\frac{h_1 h_2 h_3}{H_1 H_2 H_3}\right)^3 . \frac{\sin(a_1', a_1'') . \sin(a_1'' . a_1''') . \sin(a_1''', a_1')}{\sin(a_1', a_2') . \sin(a_2', a_3') . \sin(a_3', a_1')} .$$

$$. \frac{\sin(a_2', a_2'') . \sin(a_2'', a_2''') . \sin(a_2''', a_2') . \sin(a_3', a_3'') . \sin(a_3'', a_3''') . \sin(a_3''', a_3')}{\sin(a_1'', a_2'') . \sin(a_2'', a_3'') . \sin(a_3'', a_1'') . \sin(a_1''', a_2''') . \sin(a_2''', a_3''') . \sin(a_3''', a_1''')},$$

der letztere:

$$\frac{\sin^2(a_1', p) . \sin^2(a_2', p) . \sin^2(a_3', p) . \sin^2(a_1'', p) . \sin^2(a_2'', p) . \sin^2(a_3'', p)}{\sin^2(a_1', p) . \sin^2(a_1'', p) . \sin^2(a_1''', p) . \sin^2(a_2', p) . \sin^2(a_2'', p) . \mathrm{sic}^2(a_2''', p)} .$$

$$. \frac{\sin^2(a_1''', p) . \sin^2(a_2''', p) . \sin^2(a_3''', p)}{\sin^2(a_3', p) . \sin^2(a_3'', p) . \sin^2(a_3''', p)} .$$

Man erhält so eine charakteristische constante Function der Segmente, welche von jenen neun Verbindungslinien der drei Punkte des ersten mit jenen des zweiten Systems auf einer beliebigen Tangente der Curve dritter Classe gebildet werden; sie ist der Quotient zweier Producte, deren jedes auf eins der beiden Punktsysteme sich bezieht und drei Factoren enthält nach der Zahl der Punkte in jedem System; jeder dieser Factoren ist das Product der drei Segmente, welche von den Verbindungslinien dieses Punktes mit denen des zweiten Systems auf der Tangente bestimmt werden.

Die Enveloppe aller der geraden Punktreihen, für welche bei unveränderter Lage der beiden dreipunktigen Systeme diese Function einen constanten Werth behält, ist eine durch diesen Werth characteristisch bestimmte Curve dritter Classe.

Es werden somit auch die Büschel von neun Strahlen an den Punkten der Curven dritter Ordnung und die Reihen von neun Punkten auf den Tangenten der Curven dritter Classe durch ein Gesetz der Constanz einer gewissen einfach zu bildenden Function der Sinus der Winkel zwischen

ihren Strahlen oder der Segmente zwischen ihren Punkten beherrscht, sofern nur das Punkte- oder Liniensystem, welches die Basis der Curve bildet, auf die hier vorausgesetzte Weise bestimmt ist; und diese characteristischen Functionen sind offenbar durch die grössere Zahl ihrer Strahlen oder Punkte einer weit grössern Reihe von Particularitäten fähig als die entsprechenden Functionen bei den Kegelschnitten. Man sieht sich aufgefordert, analog den Eigenschaften der Kegelschnitte, die man die anharmonischen genannt hat, Eigenschaften der Curven dritter Ordnung und dritter Classe durch eine Untersuchung derselben zu entwickeln.

Hier liegt mir die Bemerkung näher, dass alle vorhergehenden Entwickelungen sich auf Symbolgleichungen der Formen

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta = C \cdot \alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \gamma_1 \cdot \delta_1$$

und

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta \cdot \varepsilon = C \cdot \alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \gamma_1 \cdot \delta_1 \cdot \varepsilon_1$$

leicht ausdehnen lassen, dass sie also analoge Eigenschaften und entsprechende charakteristische Functionen für die Curven des vierten und fünften Grades und der vierten und fünften Classe liefern. Die Allgemeinheit solcher Gleichungen hört nur da auf, wo die Zahl der Coefficienten, über die man in ihnen verfügen kann, nicht die Zahl der Coefficienten erreicht, welche die allgemeine Gleichung des entsprechenden Grades enthält. So darf man z. B. in der Gleichung des vierten Grades, ohne die Allgemeinheit zu verlieren, zwei der geraden Linien des einen Systems zusammenfallend annehmen, so dass sie die Form annimmt:

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta = C \cdot \alpha_1^2 \cdot \gamma_1 \cdot \delta_1.$$

Nun sind $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ die Tangenten, welche in den auf der geraden Linie $\alpha_1 = 0$ gelegenen vier Punkten an die Curve gezogen werden können, und man sieht, dass die acht Punkte, in denen diese der Curve noch ferner begegnen, dem durch die Gleichung

$$C' = \gamma_1 \cdot \delta_1$$

dargestellten Orte angehören müssen, d. h. dass sie in einem Kegelschnitte liegen.

Die den Curven vierter Ordnung entsprechende constante Function der Sinus besteht im Zähler und Nenner aus vier Factoren, deren jeder sechs Sinus enthält, ist also der Quotient zweier Producte von je vierundzwanzig Sinus, und entsprechend bei den Curven vierter Classe der Quotient zweier Producte aus je vierundzwanzig Segmenten; für die fünfte Ordnung und Classe ist die Zahl der Sinus oder Segmente, welche jedes dieser Producte zusammensetzen, fünfzig.

Wie bereits M. Terquem am angeführten Orte bemerkt hat, lassen sich analoge Sätze auch im Raume aussprechen. Die fruchtbarste Anwen-

dung dürfte für dieselben in der Theorie der Oberflächen dritter Ordnung möglich sein; für diese gilt allgemein der Satz:

Hat man zwei Systeme von drei Ebenen, so gehen durch die neun geraden Linien, in denen die Ebenen des ersten Systems die des zweiten durchschneiden, unendlich viele Oberflächen dritter Ordnung; sie sind dargestellt durch die Gleichung

$$A . B . C = const. A_1 . B_1 . C_1 ,$$

in welcher $A=0$, $B=0$, $C=0$ *und* $A_1=0$, $B_1=0$, $C_1=0$ *respective die drei Ebenen des ersten und des zweiten Systems repräsentiren. Es geht aus der Zählung der Constanten hervor, dass jede Oberfläche dritter Ordnung analytisch in dieser Form ausgedrückt werden kann. Für alle Punkte einer solchen Oberfläche ist das Product der Entfernungen von den drei Ebenen des ersten Systems zu dem Product der Entfernungen von den drei Ebenen des zweiten Systems in constantem Verhältniss.*

Für die Oberflächen dritter Ordnung ist dieser Satz mehr als eine rein analytische Relation, denn es ist bekannt und leicht zu beweisen, dass auf einer jeden Oberfläche dritter Ordnung gerade Linien gezogen werden können, und dass dies eben unter allen höhern Oberflächen nur den Oberflächen dritter Ordnung allgemein eigen ist. Ich erinnere an den schönen Satz, nach welchem *jeder Oberfläche dritter Ordnung siebenundzwanzig gerade Linien angehören*, über welchen in der letzten Zeit von so vielen namhaften Geometern — ich nenne die Herren *Hart*, *Steiner*, *Salmon*, *Cayley*, *Brioschi*, *Schläfli* — gehandelt worden ist; er steht in nahem Zusammenhang mit der angegebenen Beziehung.

Ich kehre aber zu den Curven zurück, um noch eine andere Reihe von Ergebnissen der allgemeinen symbolischen Gleichungen zu erörtern; dabei unterdrücke ich die Beziehung auf die Curven der entsprechenden Classen als selbstverständlich.

Man verbinde mit der Symbolgleichung der dritten Ordnung

$$\alpha . \beta . \gamma = C . \alpha_1 . \beta_1 . \gamma_1$$

die andere

$$\alpha . \beta = C_1 . \alpha_1 . \beta_1 ,$$

welche einen Kegelschnitt darstellt, der durch diejenigen vier von den neun Basispunkten der Curve dritter Ordnung geht, welche den geraden Linien $\alpha=0$, $\beta=0$ und $\alpha_1=0$, $\beta_1=0$ angehören; man sieht sofort, dass die zwei Punkte, welche dieser Kegelschnitt mit der Curve dritter Ordnung ferner gemein hat, der Gleichung

$$\gamma = \frac{C}{C_1} . \gamma_1$$

genügen müssen, d. h. dass sie stets mit dem Durchschnittspunkt der der Basis der Curve angehörigen geraden Linien $\gamma = 0$, $\gamma_1 = 0$ in einer geraden Linie liegen müssen. Man hat so den Satz:

Wenn eine Curve dritter Ordnung durch die neun Schnittpunkte zweier Systeme von je drei geraden Linien gelegt ist, so wird sie von jedem Kegelschnitt, der einem aus vier von jenen geraden Linien — je zwei aus einem System — gebildeten Viereck umschrieben ist, in zwei ferneren Punkten geschnitten, deren gerade Verbindungslinie stets durch den festen Punkt der Curve geht, in welchem die jenem Viereck nicht angehörigen geraden Linien beider Systeme sich schneiden*).

Auf solche Weise correspondirt dem Büschel von Kegelschnitten, welches durch jene vier Punkte bestimmt ist, ein Strahlenbüschel um den angegebenen Punkt, und zwar so, dass jedem Kegelschnitt des Büschels ein Strahl und jedem Strahl ein Kegelschnitt und nur einer entspricht. Das Entsprechen zwischen dem Strahlenbüschel und dem Büschel von Kegelschnitten ist somit ein anharmonisches, ein Entsprechen nach gleichem Doppelschnittsverhältniss. Der Ort der Durchschnittspunkte correspondirender Elemente beider Büschel ist die Curve dritter Ordnung.

So kehrt das Doppelschnittsverhältniss, welches für die Gebilde erster Ordnung, die Strahlenbüschel und Punktereihen, einer zusammengesetzteren Function gewichen war, als Gesetz bei Gebilden einer höheren Ordnung zurück, die wie jene die Curve erzeugen.

Wenn ebenso die Symbolgleichungen

$$\alpha \, . \, \beta \, . \, \gamma \, . \, \delta = C \, . \, \alpha_1 \, . \, \beta_1 \, . \, \gamma_1 \, . \, \delta_1 ,$$
$$\alpha \, . \, \beta \, . \, \gamma = C_1 \, . \, \alpha_1 \, . \, \beta_1 \, . \, \gamma_1$$

mit einander verbunden werden, deren erste eine Curve vierter Ordnung durch die sechzehn Punkte darstellt, wo das System der vier geraden Linien $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ von dem andern System $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$, $\delta_1 = 0$ geschnitten wird, und deren zweite eine Curve dritter Ordnung durch die neun Schnittpunkte der geraden Linien $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ mit denen $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$ bezeichnet, so erkennt man, dass die drei Punkte, welche beide Curven ferner mit einander gemein haben müssen, dem Orte

$$\delta = \frac{C}{C_1} \, . \, \delta_1$$

angehören und daher immer in einer geraden Linie liegen, welche durch

---

*) Dieser Satz findet sich bereits in Mr. Salmon's *Higher plane curves* (1852); er nennt den Punkt (γ, γ_1) den „*point opposite*" der vier gegebenen Punkte. — Mr. Chasles gab ihn in anderer Gestalt in dem XIV. Bande der *Nouv. annal.* 1855 als eine Aufgabe; sie rief eine schöne analytische Auflösung durch H. Brioschi hervor.

den Punkt geht, in dem die geraden Linien $\delta = 0$, $\delta_1 = 0$ sich schneiden, die zur Basis der Curve dritter Ordnung nicht gehören. Durch jene neun Punkte gehen unendlich viele Curven dritter Ordnung und jeder von ihnen entspricht auf diese Weise ein bestimmter durch den oben bezeichneten Punkt gehender Strahl und umgekehrt jedem dieser Strahlen eine einzige von jenen Curven dritter Ordnung. Demnach bilden diese Curven ein Büschel, dessen einzelne Elemente denen des Strahlenbüschels nach gleichem Doppelschnittsverhältniss entsprechen; der Durchschnittsort entsprechender Elemente beider Büschel ist die Curve vierter Ordnung.

Bezeichnet man dagegen durch

$$\alpha \cdot \beta = C_1 \cdot \alpha_1 \cdot \beta_1$$

einen der Kegelschnitte, die dem Viereck aus den geraden Linien $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$ umschrieben sind, so schneidet derselbe die Curve vierter Ordnung in ferneren vier Punkten, welche nothwendig dem Kegelschnitte

$$\gamma \cdot \delta = \frac{C}{C_1} \cdot \gamma_1 \cdot \delta_1$$

angehören; und man sieht, dass die Curve vierter Ordnung der Durchschnittsort der homologen Elemente zweier Büschel von Kegelschnitten ist, zwischen deren Basen jene zwei Systeme von vier geraden Linien, welche die Basis der Curve vierter Ordnung bilden, so vertheilt sind, dass jede zwei aus jedem System enthält und keine von allen beiden gemeinsam ist.

Ich breche hier ab, denn das Gegebene ist völlig hinreichend, um zu sehen, wie aus diesen einfachen Betrachtungen die Grundlagen der schönen Erzeugungsmethoden der algebraischen Curven hervorgehen, durch welche Mr. Chasles und andere Forscher die reine Geometrie in der letzten Zeit bereichert haben. Auf die allgemeine Begründung derselben für Curven aller Grade und Classen, sowie auf ihre specielle Ausbildung zu linearen Constructionsmethoden der durch die hinreichende Anzahl von Punkten oder Tangenten bestimmten Curven dritter und vierter Ordnung oder Classe gedenke ich nächstens in dieser Zeitschrift ausführlich zurückzukommen. Ueberall spielen in diesen Methoden Büschel von Curven, welche andern solchen Büscheln nach gleichem Doppelschnittsverhältniss entsprechen, die Rolle der Generatoren; unter allen solchen Büscheln ist das erste und einfachste und zugleich das für die Curven dritter, vierter und fünfter Ordnung wichtigste das Büschel der demselben Viereck umschriebenen Kegelschnitte. Obgleich man von diesem interessanten System eine grosse Zahl höchst merkwürdiger Eigenschaften kennt, so ist doch meines Wissens nach keine zusammenhängende Untersuchung desselben

veröffentlicht worden. Und doch scheint die Bemerkung, dass eine allgemeine Gleichung zweiten Grades in Cartesischen Coordinaten ein solches System darstellt, wenn man darin den Coefficienten des Rechtecks der Veränderlichen variiren, die übrigen Coefficienten aber beständig sein lässt, eine solche ziemlich einfach zu machen.

Schon der Umstand, dass die durch die Voraussetzung der Ungleichheit der Nenner in den allgemeinen Collineationsgleichungen entspringende allgemeinere geometrische Verwandtschaft, welche, von H. Möbius bereits angedeutet, später von H. Magnus und H. Steiner untersucht worden ist, sich auf dieses System stützt, indem zu jedem Punkte der [illegible] derjenige als entsprechend betrachtet wird, in dem die [illegible] des ersteren in Bezug auf die einem festen Viereck umschriebenen Kegelschnitte sich schneiden, fordert zu einer solchen Untersuchung [illegible]

Es sei mir gestattet, für die Discussion eines solchen Systems eine Methode vorläufig anzudeuten, welche von besonderer [illegible] ist und aus mehreren Gründen als die der Aufgabe gemässeste [illegible] werden darf.

Ich setze die Benutzung dreiseitiger Coordinaten voraus, weil durch sie den Gleichungen der Vorzug der Homogeneität gegeben wird, den die neuere Algebra so hoch schätzen lehrt. Die allgemeine homogene Gleichung zweiten Grades zwischen drei Veränderlichen kann durch lineare Transformationen in unendlich vielen Arten auf die Summe der Quadrate von drei Veränderlichen, als auf ihre canonische Form reducirt werden. Der Sinn dieser Transformation, in der Sprache der Geometrie ausgedrückt, ist der, dass man die Curve zweiter Ordnung auf ein Dreieck als Fundamentaldreieck bezieht, welches sich selbst conjugirt ist, d. h. in welchem jede der drei Seiten die Polare des gegenüberliegenden Eckpunktes in Bezug auf den betrachteten Kegelschnitt ist. N u n b e s i t z e n a b e r alle d i e d e m s e l b e n V i e r e c k u m s c h r i e b e n e n K e g e l s c h n i t t e e i n g e m e i n s c h a f t l i c h e s s i c h s e l b s t c o n j u g i r t e s D r e i e c k, d. h. algebraisch: e s i s t m ö g l i c h, f ü r e i n u n d d a s s e l b e C o o r d i n a t e n s y s t e m d i e G l e i c h u n g e n a l l e r K e g e l s c h n i t t e d e r F a m i l i e a u f d i e c a n o n i s c h e F o r m z u r e d u c i r e n.

Man kann diess ausgezeichnete Fundamentaldreieck auf die einfachste Art mit dem System der Kegelschnitte verknüpfen und zugleich seine Lage erkennen, wie folgt: Die in den Ecken des Vierecks, welches dem Büschel zur Basis dient, an die Kegelschnitte gezogenen Tangenten bilden Strahlenbüschel von gleichem Doppelschnittsverhältniss. Diese Tangentenbüschel erzeugen, paarweis genommen, durch den Durchschnitt ihrer entsprechenden Strahlen Kegelschnitte, von denen man leicht erkennt, dass sie sich auf gerade Linien reduciren; denn es treten unter den dem Viereck umschriebenen Kegelschnitten auch die Paare der Gegenseiten und das Diagonalenpaar des Vierecks auf, nämlich als Grenzkegelschnitte, welche

die verschiedenen Gruppen der Curven, die der Familie angehören, von einander trennen, und da gerade Linien ihre eigenen Tangenten sind, so fallen für jedes Paar der Tangentenbüschel zwei correspondirende Strahlen zusammen und die sechs Kegelschnitte reduciren sich auf die drei geraden Linien, welche den Durchschnittspunkt der Diagonalen und die Durchschnittspunkte der Gegenseitenpaare des Vierecks mit einander verbinden. Sie bilden das von den einzigen Doppelpunkten der Kegelschnitte des Büschels bestimmte Dreieck. Man kann leicht zeigen, dass dieses Dreieck in der That für alle Kegelschnitte des Systems sich selbst conjugirt ist, und dass es das Dreieck der Cardinalpunkte des Herrn Magnus ist. In welchen Beziehungen dasselbe zu manchen allgemeinen Fragen über die Theorie der Kegelschnitte, insbesondere auch zum Orthogonalkreis dreier Kreise steht, wird man in meiner demnächst erscheinenden deutschen Bearbeitung von Mr. Salmon's „*Treatise on Conic Sections*", auf welche ich mir hier zu verweisen erlaube, ausgeführt finden. (Art. 370, 398; Art. 353 f.)

Die Beziehung auf dieses Dreieck als Fundamentaldreieck sichert der Untersuchung zwei grosse Vortheile zugleich, nämlich die mächtigen Hülfsquellen der Algebra der homogenen Functionen und die der neueren Geometrie. Eine solche Untersuchung würde durch die Allgemeinheit ihrer Voraussetzungen zugleich den Weg bahnen für die Untersuchung der Büschel von Curven dritter und höherer Ordnung.

XV.

Beiträge zur Geschichte der Fortschritte in der elektrischen Telegraphie.

Von Dr. ED. ZETZSCHE.

II. Die Typendrucktelegraphen.

Wenn es in gewissen Beziehungen unbequem ist, dass die telegraphischen Zeichen nicht für Jedermann lesbar und verständlich sind, vielmehr nur bei Bekanntschaft mit einem besondern Zeichenalphabet entziffert werden können, so bestünde, da es auf der andern Seite fast unerlässlich ist, dass die Zeichen nicht vergänglich, sondern bleibend seien, in dieser Hinsicht die höchste Aufgabe der Telegraphie darin, die Depesche telegraphisch auf der Empfangsstation in Buchstaben auf Papier zu drucken, damit man sie sofort nach ihrem Einlangen daselbst in ähnlicher Weise von dem Papier ablesen könne, wie den gewöhnlichen Letterndruck in gedruckten Büchern. Sehr frühzeitig hat man auch daran gedacht, diese Aufgabe zu lösen und Apparate zu construiren, welche die Depesche in den gewöhn-

lichen Buchstaben auf Papier drucken. Man nennt solche Apparate Typendrucktelegraphen, im Französischen *telegraphes imprimeurs* oder *telegraphes-presses*, im Englischen *printing telegraphs*. In jedem Typendrucktelegraphen müssen nach einander oder gleichzeitig folgende 4 Verrichtungen vollzogen werden:

1) es muss der zu telegraphirende Buchstabe an die Stelle gebracht werden, wo er auf das Papier aufgedruckt werden soll;
2) wenn er an dieser Stelle angelangt oder eingestellt ist, muss er auf das Papier aufgedruckt werden;
3) es müssen die Typen regelmässig mit Druckfarbe versehen und
4) es muss nach jedem Aufdrucken eines Buchstabens das Papier um ein angemessenes Stück fortgerückt werden, damit für den nächsten zu druckenden Buchstaben ein reiner Platz herbeigeschafft wird.

Die beiden letzten Verrichtungen sind durch sehr einfache mechanische Mittel zu erlangen; während die auf einem kleinen Rade aufgesteckten Typen beständig an eine mit der Druckfarbe versehene Schwärzwalze anstreifen, wird das Papier gewöhnlich beim Rückgange des Druckapparates durch diesen selbst ein Stück fortgeschoben. Es bleiben somit hauptsächlich die beiden ersten Verrichtungen für die Thätigkeit des elektrischen Stromes übrig, und sie gerade werden in den verschiedenen Typendrucktelegraphen auf die verschiedenste Weise vermittelt. Die Typen befinden sich ohne Ausnahme an einer Scheibe, dem Typenrade, und gelangen bei der Umdrehung derselben nach einander an den Ort, wo das Aufdrucken erfolgt; das Einstellen des jedesmal zu telegraphirenden Buchstabens erfolgt aber:

1) Durch zwei gleichgehende Uhrwerke, von denen das eine auf der telegraphirenden Station einen Zeiger auf einem Zifferblatte oder einer Buchstabenscheibe, das andere auf der Empfangsstation das Typenrad gleichmässig fortbewegt. Die Zuverlässigkeit des Telegraphirens ist hier an den dauernd übereinstimmenden Gang der beiden Uhrwerke geknüpft und desshalb nicht zu gross. Bei den Typendrucktelegraphen von Vail und Bain werden die beiden Uhrwerke durch die Unterbrechung eines elektrischen Stromes losgelassen und nachdem sie das Typenrad eingestellt haben, durch einen jetzt circulirenden Strom arretirt und zugleich der Druckapparat in Thätigkeit gesetzt. Bei dem Telegraph von Theiler dagegen lässt ein kurzer Strom die beiden Uhrwerke los und ein zweiter kurzer Strom arretirt sie nach dem Einstellen und vermittelt das Aufdrucken. Diese Classe von Typendrucktelegraphen enthält die ältesten, aber minder vollkommenen.
2) Durch zwei beliebige Uhrwerke auf den beiden Stationen; dabei wird der Gang der Uhrwerke während des Einstellens durch

die Wirkung elektrischer Ströme auf ein Echappement regulirt und nach dem Einstellen das Drucken durch einen Strom von entgegengesetzter Richtung (Du Moncel und Digney) oder durch einen stärkern gleichgerichteten Strom (Freitel) herbeigeführt, oder es ist eine besondere Ausrückungsvorrichtung vorhanden, welche mit Hilfe einer Frictionskuppelung (House) oder unter Mitwirkung eines hydraulischen Apparates (Brett) den Druckapparat erst dann in Wirksamkeit treten lässt, wenn das Typenrad, sei es durch einen dauernden Strom oder durch eine längere Unterbrechung, still steht.

3) Durch abwechselnd hergestellte und unterbrochene elektrische Ströme, welche (ohne Uhrwerk) unmittelbar durch ein Echappement das Typenrad fortrücken; das Drucken erfolgt dann erst bei einer längern Unterbrechung des Stroms, während eine schnelle Folge von Unterbrechungen den Druckapparat ebenso unthätig erhält, wie ein dauernder Strom (Poole, Siemens). Der Uebergang von der ersten Classe zur zweiten und dritten bezeichnet den Fortschritt vom Unvollkommenen zum Vollkommenern.

Das zu bedruckende Papier war ursprünglich als Blatt auf einem Cylinder befestigt und die Depesche wurde in Schraubenlinien auf dasselbe aufgedruckt; später bediente man sich eines schmalen Streifens, auf welchem die ganze Depesche nur eine Zeile bildete; der Telegraph von Freitel (siehe später) endlich druckt die Depesche auf ein Blatt in unter einander liegenden Zeilen ab, so dass die Depesche genau so aussieht, wie ein Blatt aus einem gedruckten Buche.

Die Typendrucktelegraphen arbeiten immer verhältnissmässig langsam, da eine grosse Geschwindigkeit nur auf Kosten der Zuverlässigkeit zu erlangen ist; denn entweder muss man sich dann auf die Uebereinstimmung und Gleichzeitigkeit im Gang zweier weit von einander entfernter, also leicht der Einwirkung verschiedener Einflüsse ausgesetzter Uhrwerke verlassen, oder man bedarf einer grossen Anzahl elektrischer Ströme und muss jeden derselben doch wenigstens so lange andauern lassen, dass die Elektromagnete die nöthige Stärke des Magnetismus erlangen. In diesem letztern Falle bedarf man aber zur Einstellung eines Buchstabens 1 bis 26 und mehr Ströme, während bei der Telegraphie mit dem Morse'schen Telegraph nur 1 bis höchstens 6 Ströme für einen Buchstaben nöthig sind. Zudem ist die Zahl der telegraphischen Zeichen mehr auf die in dem Typenrade enthaltenen beschränkt, während sich bei dem Morse'schen Telegraph leicht und ohne Missverständnisse und Unklarheiten im Gefolge zu haben, beliebig viele, angemessen kurze telegraphische Zeichen von gewählter Bedeutung durch Combination der telegraphischen Grundzeichen, d. i. Punkt und Strich, bilden lassen. Wenn man dabei erwägt, welche Schwierigkeiten

sich der Anwendung der Translation*) bei den Typendrucktelegraphen entgegensetzen, so wird man sich nicht darüber wundern, dass die Typendrucktelegraphen eine nicht zu ausgebreitete Anwendung gefunden haben. In Deutschland, Frankreich, England und Russland sind sie nur vorübergehend und auf kürzern Linien in Gebrauch gewesen; nur in Nordamerika hat sich der House'sche Apparat weit ausgebreitet. Gleichwohl sind die Typendrucktelegraphen besonders für telegraphische Anlagen in grösseren weitläufigen Etablissements und an Eisenbahnen nicht unwichtig, da eben ihre Handhabung durchaus keine umständlichen Vorkenntnisse und kein besonderes Vertrautsein mit dem Apparate erfordert.

Das Verdienst der Erfindung der Typendrucktelegraphen wird wohl den Amerikanern nicht abgesprochen werden können; nach einer brieflichen Mittheilung des Prof. Samuel F. B. Morse, vom 8. Januar 1847, machte der Nordamerikaner Vail bereits im Frühjahr 1837**) diese Erfindung. Zwar behauptet Morse ebendaselbst, er selbst sei gleich zu Anfang auf eine bleibende telegraphische Mittheilung der gewöhnlichen Buchstaben bedacht gewesen und habe gefunden, dass eine solche auf verschiedene Weise möglich sei, doch habe er wegen der grösseren Leistungsfähigkeit und Einfachheit einem andern Systeme den Vorzug gegeben; allein erst im Jahre 1847 trat Morse mit einem Typendrucktelegraphen hervor. Etwa gleichzeitig und wahrscheinlich unabhängig von Vail machte in England Charles Wheatstone, Prof. am *King's College*, dieselbe Erfindung. Nach *Comptes rendus*, Bd. XX, S. 1753 (vom J. 1845) existirte der Apparat von Wheatstone in England schon 1837 und in seiner letzten Form seit 1840, wurde 1841 mehreren Mitgliedern der Academie vorgezeigt und war 1845 auf einigen Stationen der Eisenbahnen von Paris nach Orleans und von Paris nach Versailles in Betrieb. Seit 1837 arbeitete Wheatstone gemeinschaftlich mit W. Fothergill Cooke, welcher 1836 in Heidelberg bei Prof. Muncke die elektrotelegraphischen (Gauss'schen?) Experimente mit dem Elektrometer gesehen hatte und nach seiner Rückkehr nach England noch 1836 einen Nadeltelegraph und einen Zeigertelegraph mit Echappement construirte. Ueberhaupt lag nach der Erfindung der Zeigertelegraphen die Erfindung der Typendrucktelegraphen ziemlich nahe. Auch Fardely in Mannheim verwandelte seinen Zeigertelegraph in einen [durch einen einzigen Leitungsdraht***) betriebenen] Typendrucktelegraph, wel-

*) Der in den *Comptes rendus*, Bd. 26, S. 367 (März 1848) besprochene Schlüssel *(transmetteur)* für einen magnetoelektrischen Zeigertelegraphen von Professor Glaesener in Lüttich ist in Dingler's polytechnischem Journal, Bd. 109, S. 279, fälschlich Uebertrager genannt.

**) Vergl. *Mechanic's Magazine*, Bd. 46, S. 251; nach Shaffner (*telegraph manual*, New-York, 1859, S. 382) aber erst im October 1837.

***) Henry und Edward Highton in London construirten unter andern einen elektrischen Typendrucktelegraph mit 1, 2 oder 3 Leitungsdrähten. Vergl. Dingler's polytechnisches Journal, Bd. 113, S. 18, aus *Repertory of Patent Inventions, March* 1849. — *Shaffner, telegraph manual*, S. 303. — *E. Highton, the electric telegraph, London* 1852, S. 99 u. 100.

cher auf der Taunusbahn in Anwendung kam, 1845 zwischen Kastel und Wiesbaden, 1846 zwischen der Rheinlust und dem neuen Posthause in Ludwigshafen. Zur Vervollkommnung der Typendrucktelegraphen trugen seitdem Amerikaner, Engländer, Franzosen und Deutsche bei; in neuerer Zeit aber gingen Verbesserungen besonders von Amerika aus, wo 1856 Albert J. Partridge am 22. April, Henry N. Baker am 29. April, Moses G. Farmer am 16. Juni Patente auf Verbesserungen an Typendrucktelegraphen, David E. Hughes aber am 20. Mai ein Patent auf einen für Doppeltelegraphie eingerichteten Typendrucktelegraph erlangte.

Da es immer interessant ist, die verschiedenen Wege kennen zu lernen, welche zur Erreichung desselben Zieles eingeschlagen wurden und werden können, so möge hier eine nähere Beschreibung mehrerer Typendrucktelegraphen folgen,

1. Der Typendrucktelegraph von Alfred Vail.

Der Nordamerikaner Alfred Vail, welcher mit Prof. Morse arbeitete, erfand seinen Typendrucktelegraph im Jahre 1837*) und gab dem Apparate zum Zeichengeben folgende aus Fig. 1 und 2, Taf. V, ersichtliche Einrichtung:

Auf dem metallenen Typenrade A selbst stehen 24 vorstehende Metallstifte in einer Spirallinie B um den Mittelpunkt des Rades herum; jeder entspricht einem der 23 Buchstaben oder Typen (A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X), welche an den Speichen des Rades angebracht sind, der 24. aber bildet den Ruhe- oder Ausgangspunkt, auf welchen die Apparate eingestellt werden, wenn nicht telegraphirt wird. Die Entfernung eines jeden Stiftes vom Mittelpunkte des Rades ist genau so gross, als die eines dazu gehörigen Loches in dem vertical stehenden Index C; dieser Index C ist von Elfenbein, mithin gegen den Gestelltheil D isolirt, in das Elfenbein ist aber eine durchlöcherte Metallplatte eingelegt, welche durch einen angelötheten isolirten Draht a mit den Multiplicationsrollen des Elektromagnetes E_1 verbunden ist, während das andere Ende b der Rollen nach dem einen Pol der Batterie führt. Der andere Pol der Batterie ist durch die Luftleitung mit der nächsten Station, den dortigen Apparaten und schliesslich dort mit der Erde verbunden. Das Typenrad A ist gegen das Messinggestell D des Apparates nicht isolirt, steht vielmehr durch dasselbe und den isolirten Draht c (Fig. 2, Taf. V) mit den Rollen des Elektromagnetes E_2 in leitender Verbindung; von diesen führt der Draht d zu den Rollen des Elektromagnetes E_3 und endlich der Draht e zur Erde. Es ist somit der elektrische Kreis geschlossen, sobald nur die Verbindung zwischen dem Index C und dem Typenrade A hergestellt wird,

*) Ausführlicheres darüber enthält: *Vail, the American Electro-Magnetic Telegraph, Philadelphia* 1847, S. 157—171. Vergl. *E. Highton, the electric telegraph*, S. 63.

und es sind dann alle drei Elektromagnete E_1, E_2 und E_3 des Apparates in den Schliessungskreis eingeschaltet. Die leitende Verbindung zwischen dem Index *C* und dem Typenrade *A* wird aber hergestellt, wenn man in ein Loch des Index *C* einen metallenen Stift einsteckt; dann kommt der entsprechende Stift auf dem Typenrade bei der Umdrehung des letztern mit dem in den Index eingesteckten Stifte in Berührung und sowie diess geschieht, ziehen alle drei Elektromagnete ihre, den aus den Rollen herausstehenden magnetischen Polen p_1, p_2 und p_3 gegenüber liegenden Anker an.

Die Apparate von zwei zusammengehörigen Stationen sind nun mit zwei gleichgehenden Uhrwerken versehen, welche in dem Gestell *D* angebracht sind, durch zwei gleiche Gewichte in Bewegung gesetzt und durch zwei gleiche Pendel *F* mit Echappement und einem Echappementrad *G* mit 24 Zähnen in gleichem Gange erhalten werden; das Echappementrad *G* sitzt fest auf der Welle des Typenrades *A* und letzteres muss daher genau der Bewegung des ersteren folgen. So lange nicht telegraphirt wird, ist auf beiden Stationen durch einen besondern Wechsel, der einem Stromwender ähnlich ist, der Kreis des Stromes geschlossen, ohne dass der Index und das Typenrad in den Kreis eingeschaltet ist*); es würde also z. B. durch eine Wechselklemme *q* ganz einfach der Draht *a* direct mit dem Drahte *c* leitend verbunden, wie Fig. 5, Taf. V, veranschaulicht; der Kreis ist also geschlossen, die Batterien darin eingeschaltet, die drei Elektromagneten werden demnach magnetisch und entweder E_2 oder E_3 hält das Pendel *F* durch den daran befindlichen Anker *f* fest. Beim Beginn des Telegraphirens wird blos auf der telegraphirenden Station der Wechsel umgeschaltet, d. h. durch Oeffnen der Wechselklemme *q* die directe Verbindung zwischen *a* und *c* aufgehoben, wie Fig. 6, Taf. V, zeigt; dadurch kommt das Typenrad und der Index in den Schliessungskreis, und somit ist der Strom unterbrochen; beide Uhrwerke treten in gleichen Gang und rücken die Typenräder in gleichem Schritte fort. Wird nun aber auf der telegraphirenden Station ein Stift in ein Loch des Index eingesteckt, so wird die Batterie wieder geschlossen, wenn der entsprechende Stift am Typenrade mit dem Stifte im Index in Berührung tritt; dadurch werden beide Uhrwerke durch die Elektromagnete E_2 oder E_3 arretirt und gleichzeitig der am Typenrade eingestellte Buchstabe durch die Wirkung des Elektromagnetes E_1 auf den Papierstreifen *PP* aufgedruckt. Dieser Elektromagnet E_1 zieht nämlich seinen Anker *J* an und bewegt dabei den mit seinem Zapfen *h* in dem messingenen Träger *L* eingelagerten und um *h* drehbaren Hebel *H*, auf welchem der Anker *J* sitzt, nach unten; dieser Bewegung muss der Rahmen *K* folgen, da er bei *i* mit *H* verbunden ist; der Rahmen *K* (Fig. 3 und 4, Taf. V) ist aber oben offen und des bessern Halts wegen sind seine beiden Seitentheile oben durch ein Querstück *l* verbun-

*) Die abweichende Anordnung, welche *Shaffner, telegraphic manual*, S. 387, beschreibt, ist nicht wohl denkbar.

den, dessen Enden seitlich ein Stück über den Rahmen vorstehen, in zwei Schlitze des Gestells eingreifen und so als Führung für den Rahmen beim Auf- und Niedergange dienen. Durch den Schlitz im Rahmen gehen beim Umdrehen des Typenrades die Typen der Reihe nach hindurch. Beim Niedergange des Hebels *H* mit dem Rahmen *K* legen sich dessen geschlitzte Enden *gg* an die beiden seitlichen Ansätze an dem Typen *m* an und nehmen denselben mit sich nieder, bis er auf den zwischen dem Typen *m* und der Walze *W* hindurchgehenden Papierstreifen *PP* auftrifft und sich auf demselben aufdruckt; denn die Walze *W* ist in das Gestell fest eingelagert, kann also nicht ausweichen. Wenn dann der elektrische Strom durch Herausziehen des Stiftes aus dem Index *C* wieder unterbrochen wird, führt die Feder *t* den Hebel *H*, dessen Schwingung durch die Stellschrauben *kk* regulirt werden kann, in seine Ruhelage zurück; auch der Rahmen *K* geht mit zurück und dabei legt sich der an demselben befindliche Sperrkegel *n* in das Sperrrad *M* an der Walze *W* ein, dreht diese um einen Zahn fort und zieht so den Papierstreifen *PP* zwischen dem Walzenpaare *W* und *V* um ein Stück weiter, so dass nun ein neuer Buchstabe darauf gedruckt werden kann. Der Type selbst aber, welcher in die beiden Ringe *O* und *N* des Typenrades so eingelegt ist, dass er sich in radialer Richtung frei bewegen kann, wird beim Rückgange des Hebels durch eine Spiralfeder *r* in seine Ruhelage zurückgeführt. Mit *R* sind die Holztheile des Apparates bezeichnet.

Das Telegraphiren ist höchst einfach: der Telegraphist schaltet seinen Wechsel um und steckt einen Stift in dasjenige Loch des Index *C* ein, welches dem ersten zu telegraphirenden Buchstaben entspricht; das Typenrad kommt durch das Uhrwerk in Bewegung; nachdem sich einer seiner Stifte an den eingesteckten Stift in *C* angelegt hat, kommt es zum Stillstehen und nun zieht der Telegraphist den Stift aus *C* wieder heraus und steckt ihn in das Loch des folgenden Buchstabens des zu telegraphirenden Wortes ein u. s. f.

Bezüglich des übereinstimmenden Ganges der beiden Uhrwerke ist zu bemerken, dass die Zahlen der Pendelschläge, welche zwischen je zwei auf einander folgenden Arreturen der Pendel erfolgen, nicht um einen halben Schlag differiren dürfen.

2. Der Typendrucktelegraph von Alexander Bain.

Bei diesem sinnreichen, schon 1840 erfundenen Apparate sind auf jeder Station zwei Uhrwerke in Thätigkeit, und der elektrische Strom hat weiter nichts zu thun, als das eine Paar dieser Uhrwerke auf beiden Stationen zugleich in und ausser Gang zu setzen, während das andere Paar von dem ersten Paare losgelassen oder arretirt wird. Das erste Paar besorgt die Einstellung des zu telegraphirenden Buchstabens oder Zeichens und das zweite Paar dessen Uebertragung auf das Papier und das Fortrücken des

letzteren nach jedem einzelnen Aufdrucken eines Zeichens. Das erste Paar wenigstens muss daher auf beiden Stationen vollkommen gleichmässigen Gang besitzen und in ihm stets erhalten werden; dieser Umstand setzt also auch der Anwendung dieses Apparates auf langen Telegraphenlinien mit vielen Stationen merkliche Schwierigkeiten entgegen, da die Apparate sämmtlicher Stationen in einem gleichmässigen Gange erhalten werden müssten.

Durch eine kräftige Feder in dem Federhause *B* (Fig. 7, Taf. VI) wird der Rädersatz *G*, *H*, *J* in Umdrehung versetzt und von *J* aus der Zeiger *X* auf dem Zifferblatte *dih* und das als Regulator dienende Centrifugalpendel *W*; allein die Bewegung aller dieser Theile muss unterbleiben, sobald sich der Arm *Y*, welcher ersichtlich auch mit umgedreht wird, an den Arm *L* anlegt; so lange dies aber nicht der Fall ist, wird auch das Typenrad *C*, weil es auch auf der Welle *c* aufgesteckt ist, mit gedreht, und zwar müssen auf den beiden in Correspondenz stehenden Stationen nicht allein die beiden Typenräder, sondern auch die beiden Zeiger *X* auf den Zifferblättern gleichen Schritt halten. Eine zweite Feder befindet sich in dem Federhause *P* und setzt durch den Rädersatz *M*, *O* die Welle *f* und den Windflügel *Q* in Bewegung, und es wird diese Bewegung eben durch den Windflügel *Q* regulirt. Aus der Welle *f* ragen zwei nicht vertical über einander stehende Ansätze *a* und *b* hervor, welche sich beide an den Hebel *Z* anlegen können, und wenn einer derselben an *Z* anliegt, so ist die ganze von der Feder im Federhause *P* ausgehende Bewegung gehemmt; so lange aber die Kugeln des Regulators *W* ihre tiefste Lage inne haben, liegt *a* an *Z* an; geräth *W* in Umdrehung, so heben sich die Kugeln und die mit ihnen verbundene Hülse *g* nimmt die in ihr ruhende Spitze des Hebels *Z* mit in die Höhe, das andere Ende des Hebels geht nieder, lässt den Ansatz *a* los und die Welle *f* dreht sich, bis *b* an *Z* herankommt; wird *W* arretirt und senken sich desshalb die Kugeln wieder, so geht das hintere Ende von *Z* wieder in die Höhe, lässt den Ansatz *b* los und die Welle *f* ergänzt jetzt ihre vorige Bewegung zu einer ganzen Umdrehung, denn sie muss sich jetzt so lange drehen bis der Ansatz *a* wieder an *Z* sich anlegt. So oft also der von der Feder im Federhause *B* aus getriebene Theil des Apparates einmal in Gang kommt und darauf wieder angehalten wird, macht *f* eine Umdrehung. Die Welle *f* ist aber bei *V* gekröpft und ertheilt bei jeder ihrer Umdrehungen der Lenkstange *T* und durch dieselbe dem mit letzterer fest verbundenen, um *k* drehbaren Hebel *E* eine einmalige hin und her gehende Bewegung; durch ein Querstück *q* ferner ist der Hebel *E* mit der Welle *c* des Typenrades *C* fest verbunden, so dass bei jeder Umdrehung der Welle *f* das Typenrad *C* einmal an die Papierwalze *A* herangedrückt und dann wieder von ihr entfernt wird. Beim Herandrücken wird das eben der Papierwalze *A* gegenüber stehende Zeichen auf das Papier aufgedruckt. Gleichzeitig legt sich der an dem Querstücke *q* angebrachte Sperrhaken *e* in das Rad *D* ein

und dreht dasselbe beim Rückgange des Hebels E um einen Zahn fort; das Rad D aber hat seine Welle mit dem langen Getriebe F gemeinschaftlich, welches in das an der Papierwalze A sitzende Rad eingreift. Bei jedem Rückgange des Hebels E wird also die Papierwalze A um einen Zahn umgedreht und nach einer vollen Umdrehung ist es zugleich auf seiner schraubenförmigen Welle um einen Schraubengang fortgerückt; somit kommt nach jeder Umdrehung der Welle f auch ein neuer Papierraum dem Typenrade C gegenüber zu stehen, und die Zeichen werden in einer Schraubenlinie auf das Papier der Papierwalze A aufgedruckt.

Die eigentlich telegraphische Einrichtung des Apparates besteht nun in Folgendem: Ein in dem Gestell des Apparates unbeweglich befestigter, aus mehreren über einander liegenden Lamellen bestehender permanenter Magnet KK_1*) ist mit Drahtwindungen RR_1 umgeben, welche um zwei Zapfen sich frei bewegen können, aber auf jeder Seite, vor und hinter dem Magnet KK_1, mit einer Spiralfeder versehen sind, durch welche der elektrische Strom in die Windungen ein- und austreten kann. So lange der Strom hindurch geht, nehmen die Windungen die gezeichnete, horizontale Stellung ein; wird der Strom unterbrochen, so führen die Spiralfedern S die Windungen in ihre natürliche Lage zurück und das Ende R hebt sich in Richtung des Pfeils. Mit den Windungen fest verbunden ist der Arm L, folgt demnach ihrer Drehung und lässt den Arm Y frei, so oft der Strom unterbrochen wird. So lange die Windungen vom Strom durchlaufen werden, kann mithin die Feder im Federhause B keine Bewegung veranlassen. Das Zifferblatt idh ist gegen die übrigen Theile des Apparates, auch gegen die Axe des Zeigers X isolirt und mit 12 Löchern (dieselben sind in Fig. 7, Taf. VI, durch schwarze Punkte angedeutet) versehen, welche bis auf die metallische Unterlage hinabreichen; ein ähnliches Loch ist U, und an einem darin steckenden, die metallische Unterlage berührenden Metallstifte liegt für gewöhnlich der Zeiger X an. Setzen wir nun voraus, dass die eine Spiralfeder S durch die Erdplatte N mit der Erde leitend verbunden sei, dass die hintere Spiralfeder aber mit dem Zeiger Z (vermittelst dessen isolirter Achse) verbunden sei, während von der metallischen Unterlage des Apparates aus eine Leitung etwa über 1 oder 2 nach der andern Station führe, woselbst ganz gleiche Verbindungen hergestellt sein mögen, und dass irgendwo galvanische Batterien eingeschaltet seien, so wird ein Strom die Windungen RR_1 durchkreisen, so lange die Zeiger auf beiden Stationen an den in U steckenden Stiften anliegen; so lange sind auch alle Uhrwerke gehemmt. Wird aber der Stift auf einer Station herausgezogen, so ist der Strom unterbrochen, auf beiden Stationen hebt sich das Ende R der Windungen, lässt der Arm L den Arm Y los, die Zeiger X**) und die Typenräder C gerathen

*) Auch J und J_1 sind permanente Magnete.

**) Auch beim Bain'schen Apparat ist ähnlich wie bei dem von Vail ein Wechsel oder eine ihn ersetzende Vorrichtung nöthig; vergl. S. 400 und Fig. 5 u. 6, Taf. V.

in gleichmässige Bewegung, der Hebel Z lässt den Ansatz a los und b legt sich an Z. Wird dann der Stift in eins der Löcher auf dem Zifferblatte eingesteckt, so legt sich endlich der Zeiger X an ihn an, schliesst den Strom wieder, die Windungen stellen sich sogleich wieder horizontal, die Typenräder und Zeiger bleiben stehen, der Hebel Z lässt den Ansatz b los, worauf die Welle f ihre Umdrehung vollendet, ein Zeichen auf die Papierwalze aufgedruckt und dann die letztere um einen Zahn fortgerückt wird. Zwischen dem Papier auf der Papierwalze A liegen zwei Lagen eines von zwei Walzen festgehaltenen mit Druckschwärze getränkten und gefärbten Bandes, so dass die Buchstaben schwarz aufgedruckt werden. Will man eine doppelte Ausfertigung der Depesche haben, so legt man noch einen Streifen weisses Papier zwischen die Schwärzbänder hinein und auf diesem entsteht dann gleichfalls ein Abdruck.

Der Vorgang beim Telegraphiren ist also höchst einfach: Der Telegraphist zieht den Stift aus U und steckt ihn in das Loch unter dem Zeichen, welches er zuerst telegraphiren will; ist der Zeiger seines Apparates dort angekommen, so ist auch das Zeichen auf der Empfangsstation gedruckt, der Telegraphist zieht den Stift wieder heraus und steckt ihn in das Loch unter dem nächsten zu telegraphirenden Zeichen und so fort bis zu Ende der Depesche. In der Zeichnung sind blos zwölf telegraphische Zeichen vorausgesetzt, die Zahlen von 0 bis 9 und zwei leere Räume; dem entsprechend sind natürlich auch die Zifferblätter und die Typenräder mit denselben zwölf Zeichen versehen. Ebenso könnten aber auch die sämmtlichen Buchstaben und einige andere Zeichen auf den Zifferblättern und den Typenrädern angebracht sein*) und dann würde die Depesche gleich in den gewöhnlichen Buchstaben auf das Papier gedruckt.

Unvortheilhaft wegen des grösseren Aufwandes für die Batterien ist der Apparat desshalb, weil beständig ein Strom durch die Leitung gehen muss, so lange nicht telegraphirt wird, da ja die Zeichen eben durch Unterbrechen des Stroms hervorgerufen werden. Ein Vorzug dagegen ist es zu nennen, dass auf der Empfangsstation die ankommenden Zeichen auch durch den Zeiger auf dem Zifferblatte sichtbar gemacht werden.

Nach denselben Principien ist ein anderer Typendrucktelegraph construirt, welcher von den Herausgebern des *Scientific American* erfunden, im *Mechanic's Magazine*. Bd. 46, S. 265, und von da aus in Dingler's polytechnischem Journale (1847), Bd. 105, S. 165, beschrieben und abgebildet ist. Auch er erfordert einen grösseren Aufwand für die Batterien, da bei ihm die Linienbatterie erst geschlossen wird, wenn der Kreis einer Hilfs- oder Localbatterie unterbrochen wird, da mithin stets die eine oder die andere Batterie in Thätigkeit ist. Dieser Typendrucktelegraph hat mit

*) So eingerichtet beschreibt Du Moncel, *Exposé des applications de l'électricité, Paris* 1856, *II*, *p.* 136, den Apparat von Bain.

den beiden bereits beschriebenen Typendrucktelegraphen von Vail und Bain auch das gemein, dass wenn einmal eine kleine Ungleichheit oder Unregelmässigkeit im Gange der Uhrwerke beim Telegraphiren eines Buchstabens sich einschleicht, nicht allein dieser eine Buchstabe falsch telegraphirt wird, sondern auch alle noch nachfolgenden Buchstaben bis zu dem Zeitpunkte hin, wo die Uebereinstimmung zwischen dem Zeiger der telegraphirenden und dem Typenrade der Empfangsstation wieder hergestellt wird. Ein solches Weitertragen eines Fehlers auf das Nachfolgende ist natürlich um so störender, je leichter einmal ein Fehler vorkommen kann; um aber die Richtigkeit jedes Buchstabens nicht von der Richtigkeit der vorhergehenden abhängig zu machen, darf man dem Apparate nur eine solche Einrichtung geben, dass nach dem Telegraphiren eines Buchstabens der Apparat sich von selbst auf einen bestimmten Ausgangspunkt einstellt, wie es z. B. bei dem gleich zu beschreibenden Telegraph von Theiler der Fall ist. Es kann indessen diese vermehrte Zuverlässigkeit wiederum nur auf Kosten der Geschwindigkeit des Telegraphirens erreicht werden; denn dann ist zum Telegraphiren eines jeden Buchstabens eine volle Umdrehung des Typenrades nothwendig, während sonst möglicher Weise bei einer Umdrehung gelegentlich zwei, drei und mehr Buchstaben telegraphirt werden können, wenn die auf einander folgenden Buchstaben des zu telegraphirenden Wortes in derselben Reihenfolge stehen, wie der Zeiger auf dem Zifferblatte über sie hinwegschreitet und wie sie am Typenrade eingestellt werden.

3. Der Typendrucktelegraph von Theiler.

An die übrigens wesentlich von ihm verschiedenen Typendrucktelegraphen von Bain und von Vail schliesst sich der Typendrucktelegraph von Theiler insofern eng an, als seine Anwendung ebenfalls auf den beiden correspondirenden Stationen gleichgehende Uhrwerke voraussetzt, durch welche dem Apparate zum Zeichengeben auf der telegraphirenden und dem Druckapparate auf der Empfangsstation eine übereinstimmende Bewegung ertheilt wird.

Der Apparat zum Zeichengeben ist in Fig. 8, Taf. V, abgebildet. Er besteht aus einer Claviatur mit im Kreise angeordneten Tasten; wird eine derselben niedergedrückt, so wird sie durch einen besonderen Mechanismus so lange niedergedrückt erhalten, bis der ihr entsprechende Buchstabe abgedruckt ist; dann erst hebt sie sich wieder. Dabei wird der Kreis der elektrischen Batterie zweimal auf kurze Zeit geschlossen und gleich wieder unterbrochen; die erste Schliessung beim Niederdrücken der Taste lässt die beiden gleichgehenden Uhrwerke los, die zweite erfolgt, wenn durch die Uhrwerke der zu telegraphirende Buchstabe eingesetzt ist, und besorgt das Aufdrucken desselben auf den Papierstreifen. Der auf den hintern Enden der Tasten liegende, um die Achse ZZ drehbare Bügel dd

ist mit einem Ansatze *e* versehen, an welchen sich für gewöhnlich der Ansatz *c* des um die verticale Achse *o* drehbaren metallenen Gatters bff_1 hemmend anlegt; sobald aber eine Taste niedergedrückt wird, hebt sich der Bügel *dd* und der Ansatz *e* lässt den Ansatz *c* los, worauf das Gatter bff_1 durch das Uhrwerk in eine mit der Bewegung des Typenrades auf der Empfangsstation gleichen Schritt haltende Umdrehung um seine Achse *o* versetzt wird. Beim Niederdrücken der Taste hebt sich zugleich von den Stiften *kk* derjenige, welcher zu der Taste gehört, und bleibt gehoben, so lange die Taste niedergedrückt ist; beim Niederdrücken der Taste wirkt ferner ein Ansatz an derselben mit einer schiefen Ebene drückend auf die eine Seite eines Zahnes des Rades *l*, welches dadurch ein wenig nach rechts bewegt, aber gleich darauf durch die Feder *m* in seine frühere Lage zurückgeführt wird, sobald die Taste ganz niedergedrückt ist, und bei diesem Rückgange kommt ein Stift an dem Rade *l* unter das hintere Ende der Taste und erhält fortan die Taste niedergedrückt. Wenn nun nach dem Niederdrücken einer Taste das Gatter bff_1 sich um seine Achse *o* zu drehen anfängt, schleift es mit f_1 auf dem feststehenden Ansatze *g* auf, wird dadurch bei f_1 um die horizontale Achse *aa* gehoben und legt sich an das metallene Verbindungsstück *h* an, wodurch der Stromkreis geschlossen wird. Hinter *g* senkt sich das Gatter wieder und der Strom wird demnach unterbrochen, das Gatter aber setzt seinen Weg fort und kommt endlich, wenn f_1 über die niedergedrückte Taste gelangt, mit dem gehobenen Stifte *k* in Berührung, f_1 wird von dem Strome gehoben und dadurch der Strom abermals geschlossen; hat endlich das Gatter seine Umdrehung fast vollendet, so stösst die Sperrklinke *n* im Vorbeigehen gegen einen Ansatz am Rade *l*, rückt es momentan ein wenig zur Seite und jetzt erst kann die niedergedrückte Taste in die Höhe gehen, der Bügel *dd* senkt sich und das Gatter wird angehalten.

Beim ersten Schliessen des Stromes wird auf der Empfangsstation der Hebel des Elektromagnetes *P* (Fig. 10, Taf. V) des Relais *R* angezogen und so eine Localbatterie geschlossen, deren Strom durch die Rollen des Elektromagnetes *M* (Fig. 9, Taf. V) hindurchgeht; indem dadurch der auf dem um *e* drehbaren Hebel *EE* befindliche Anker *F* angezogen wird, wird der mit Flanell überzogene Druckstempel *J* am andern Ende des Hebels *EE* gegen das kleine und leichte, aus Aluminiummetall hergestellte Typenrad *T* angedrückt, allein es kann kein Buchstabe abgedruckt werden, weil zur Zeit der breite leere Ausschnitt *q* des Typenrades (welcher dem von den Tasten freigelassenen Raume des Zeichengebers entspricht) dem Stempel *J* gegenüber steht; wohl aber wird der ebenfalls auf der Welle *e* sitzende Sperrhaken *D* gedreht und lässt den Sperrarm *C* los, so dass nun das Echappement BB_1B des Uhrwerks durch das 17zähnige Echappementrad *A*, welches mit dem Arme *C* und dem Typenrade *T* eine gemeinschaftliche Achse besitzt, das Typenrad in Umdrehung versetzen kann. Diese Um-

drehung dauert nun ungestört fort, bis der Strom zum zweiten Male geschlossen wird; bei dem jetzt erfolgenden Anziehen des Ankers *F* nämlich greift die gleichfalls auf der Achse *c* sitzende Sperrklinke *K* zwischen zwei der 29 Stifte auf dem Rade *A* ein und hemmt es, während gleichzeitig der Stempel *J* den eben ihm gegenüber stehenden Buchstaben abdruckt. Zur Sicherung der Bewegungen dient der Winkelhebel *H*, welcher sich federnd mit dem einen Ende auf die kleine ausgeschnittene Scheibe *G* auf der Achse des Typenrades auflegt; nach dem ersten Schliessen des Stromes gleitet nämlich das Ende des Hebels *H* vorübergehend in den Ausschnitt der Scheibe *G* und dabei drückt sein anderes Ende den Hebel des Relais *P* nieder, so dass der Localstrom durch den Elektromagnet *M* sicher unterbrochen, und durch die an ihm befindliche Feder *f* der Hebel *EE* und mit ihm auch die Sperrhaken *D* und *K* in ihre Ruhelage zurückgeführt werden; denn sonst würde der Relaishebel durch den nicht augenblicklich wieder verschwindenden Magnetismus angezogen bleiben können und in diesem Falle würde sich *K* zwischen die Stifte auf *A* einlegen und das Typenrad *T* hemmen*). Die 29 Stifte auf *A* stehen desshalb auch nicht im Vollkreise, sondern es ist ein Stück Bogen freigelassen, ähnlich wie im Typenrade bei *q*. Wenn nach dem Aufdrucken eines Buchstabens der Stempel *J* und die Sperrkaken *D* und *K* in ihre Ruhelage zurückgekehrt sind, setzt das Typenrad *T* in gleichem Schritte mit dem Gatter bff_1 des Zeichengebers seinen Weg fort, bis sich der Sperrarm *C* wieder an den Sperrhaken *D* anlegt, d. h. bis das Typenrad *T*, wie das Gatter bff_1, auf den Ausgangspunkt zurückgekehrt ist. Nachdem also ein Buchstabe telegraphirt worden ist, stellen sich die Apparate von selbst wieder auf den Ausgangspunkt ein, wesshalb ein etwa untergelaufener Fehler sich nicht weiter fortpflanzen und auch nicht die nachfolgenden Buchstaben unrichtig machen kann.

Der Papierstreifen wird durch das Walzenpaar *L*, *N* durch den Apparat hindurchgeführt, indem von dem Uhrwerke die Bewegung mit auf *K* übertragen wird. *U* ist die Schwärzwalze, welche die Typen mit der Druckschwärze versieht.

4. Der Typendrucktelegraph von Royal E. House.

Wesentlich abweichend von allen übrigen Telegraphenapparaten ist der Typendrucktelegraph des Amerikaners House durch die eigenthümliche Construction des Elektromagnetes und durch dessen originelle Benutzung zur Bewegung eines Vertheilungsschiebers, welcher den Zutritt der Luft aus einem Windkessel in einen Cylinder regulirt; der von der verdichteten Luft in dem Cylinder hin und her bewegte Kolben setzt aber das Typenrad in Bewegung.

*) Auch das Sperrrad *r* und die Sperrkegel *s* und *t* sollen zur Sicherung des Ganges beitragen.

House erlangte bereits den 18. April 1846 ein Patent auf seinen Telegraph, aber erst 1847 wurde derselbe durch Henry O'Reilly vervollkommnet und auf der Linie zwischen Cincinatti und Louisville angewendet und die erste Depesche von Cincinatti auf eine Entfernung von 150 (engl.) Meilen nach Jeffersonville, gegenüber Louisville, gesandt. 1849 ward der Apparat auf einer Linie von Philadelphia nach New-York angewendet und erlangte dann eine schnelle Verbreitung in Nordamerika. So war er 1852 schon auf der 600 Meilen langen Linie von Boston nach New-York, auf den Linien von Buffalo nach New-York, von New-York nach Philadelphia, Boston, Washington u. a. in Betrieb*). Das letzte Patent House's datirt vom 28. December 1852.

Zum Zeichengeben dient eine Claviatur, deren 28 Tasten in zwei Reihen stehen, ganz wie bei einem Clavier, durch Federn in der horizontalen Lage erhalten werden und mit den 26 Buchstaben (*J* mit eingerechnet), einem Schlusspunkt und einem Gedankenstriche bezeichnet sind. Auf der Unterseite hat jede Taste einen kleinen Ansatz, welcher beim Niederdrücken der Taste sich so weit senkt, dass ein Stift auf einer quer unter den Tasten liegenden Walze sich an ihn anlegen kann und dadurch die Walze selbst in ihrer Umdrehung aufgehalten wird. Diese Walze, welche mit der Walze in einem Leierkasten oder einer Drehorgel Aehnlichkeit hat, sitzt auf ihrer Achse nicht fest, sondern ist nur durch eine Frictionskuppelung mit ihr verbunden, damit die Achse sich ungestört fortdrehen kann, auch wenn die Walze aufgehalten wird. Die Walze ruht mit den Zapfen ihrer Achse in einem isolirten Eisenrahmen und bildet so gut wie dieser einen Theil des Schliessungskreises für den elektrischen Strom. Auf der einen Seite sitzt auf der Achse der Walze eine Riemenscheibe, durch welche die Walze mit der Hand durch eine Kurbel mit Schwungrad in Umdrehung versetzt wird. Die eine Speiche des Schwungrades bildet einen Krummzapfen, welcher den Kolben einer Luftpumpe in Bewegung setzt und durch diesen Luft in einen 14 Zoll langen Windkessel von 6 Zoll Durchmesser einpumpt; dieser Windkessel muss mit einem Sicherheitsventile versehen sein, durch welches die zum Betrieb nicht nöthige, also überflüssige Luft entweichen kann. An der Walze fest sitzt auf der einen Seite das messingene Schliessungsrad (*circuit wheel*), auf dessen Umfange 14 sectorförmige Ausschnitte von $\frac{1}{4}$ Zoll Tiefe angebracht sind, welche sowohl unter sich, als auch mit den dazwischen stehen gebliebenen, zahnförmig hervorragenden Sectoren von gleicher Grösse sind. Auf dieses Schliessungsrad legt sich eine metallene Feder auf und tritt bei seiner Umdrehung abwechselnd in die leeren Ausschnitte ein oder legt sich auf einen stehen gebliebenen Sector auf**); wenn nun die Feder nach der einen Seite hin und

*) Vgl. u. A. Zeitschrift d. deutsch-österreich. Telegraphenvereins, I. Jahrg. S. 155.

**) Ein solches Schliessungsrad ist in Fig. 17, Taf. VI, abgebildet; die Feder *f* liegt gerade auf einem massiven Sector des Schliessungsrades *S*.

das Schliessungsrad durch die Walze und den Rahmen nach der andern Seite hin mit dem Schliessungskreis der Batterie in Verbindung gesetzt werden, so ist der Schliessungskreis geschlossen oder unterbrochen, je nachdem die Feder auf einem Sector oder in einem Ausschnitte liegt. So lange keine Taste niedergedrückt ist, wird also bei der mit der Hand durch die Kurbel hervorgebrachten Umdrehung der Walze und des Schliessungsrades abwechselnd ein Strom in die Linie gesendet und wieder unterbrochen; sowie aber eine Taste niedergedrückt und die Walze dann aufgehalten wird, sobald sich der entsprechende der 28 Stifte, welche ähnlich wie die Tasten der Claviatur in zwei Spiralreihen zu je 14 auf der Walze vertheilt sind, an den Ansatz der niedergedrückten Taste anlegt, hört die Abwechselung auf und es circulirt entweder kein Strom oder ein ununterbrochener, je nachdem die Feder in einem Ausschnitte oder auf einem massiven Sector liegt. Wird die Taste wieder losgelassen, so folgt die Walze wieder der Bewegung ihrer Achse, kommt wieder in Umdrehung, die Abwechselung beginnt von Neuem und es wird bei jeder Umdrehung 14 Mal der Strom unterbrochen und 14 Mal wieder hergestellt.

Der Strom geht nun von dem einen Batteriepol durch die Luftleitung nach der Empfangsstation, dort durch die Rollen des Elektromagnetes, durch den Eisenrahmen, die Walze und das Schliessungsrad, durch die Batterie, in der Erde zurück zur Ausgangsstation, nimmt daselbst einen ähnlichen Weg durch die Apparate zum andern Batteriepol. Die abwechselnde Herstellung und Unterbrechung des Stromes erzeugt aber auf der Empfangsstation eine hin und her gehende Bewegung: innerhalb der in einer Messingbüchse *E* (Fig. 11, Taf. VI) befindlichen elektrischen Multiplicationsrollen *A* des Elektromagnetes der Empfangsstation steckt eine 8 bis 10 Zoll lange Messingröhre *c*, welche mit der Schraube *D* auf der Grundplatte des Apparates befestigt ist. In dieser Röhre sind 6 bis 8 röhrenförmige Reifen *k* von weichem Eisen in gleichen Entfernungen von einander festgelöthet. Weiter oben über den Multiplicationsrollen ist ein elliptischer Ring *F*, in welchem ein elastischer Draht *G* diametral ausgespannt ist, dessen Spannung durch zwei Stellschrauben *a* und *b* mit der jeweiligen Stromstärke in Einklang gesetzt und regulirt werden kann. Von dem Drahte *G* hängt ein Messingstab *C* in die erwähnte messingene Röhre herab, zwischen den Eisenreifen *k* in derselben hindurch, und auf diesem Messingstabe *C* sind 6 oder 8 schmale Röhren *l* von weichem Eisen in gleichen Abständen von einander aufgereiht; ihre unteren Enden sind glockenförmig ausgebaucht, während die Reifen *k* an ihrem oberen Rande in gleicher Weise nach Innen erweitert sind. Wenn nun ein Strom durch die Rollen geht, so werden sowohl die Reifen *k* als die Röhrenstücke *l* magnetisch, und zwar liegen bei beiden die gleichnamigen Pole nach derselben Richtung, z. B. alle Nordpole nach oben, alle Südpole nach unten; es wird daher bei der

gewählten Stellung der Reifen k gegen die Röhrenstücke l jedes Röhrenstück l von dem darüber befindlichen Reifen abgestossen, von dem darunter befindlichen angezogen, die Stange C mithin kräftig nach unten bewegt. Wenn aber der Strom aufhört, führt der federnde Draht G die Stange C in ihre frühere Lage zurück. Die Stange C bewegt sich dabei nur um $\frac{1}{64}$ Zoll auf und nieder.

Anstatt aber die so erzielte hin und her gehende Bewegung der Stange C, wie es wohl zunächst läge, gleich auf ein Echappement zu übertragen, bedient sich House erst der Vermittelung des Kolbens in einem Cylinder; die Kolbenstange setzt das Echappement in Bewegung, der Kolben selbst aber wird durch Luftdruck abwechselnd hin und her geschoben und die Stange C besorgt eben die Steuerung, regulirt den Ein- und Austritt der comprimirten Luft in den Cylinder. Es ist nämlich an ihr ein cylindrischer Schiebekasten B befestigt, welcher in seinem Umfange drei Rinnen 1, 2 und 3 hat und in der Luftkammer H auf und nieder gleitet; die Luftkammer ist aber im Innern mit zwei Rinnen 4 und 5 versehen, welche durch die Kanäle J und M nach dem Cylinder führen, in welchem der Kolben hin und her gehen soll. Die comprimirte Luft tritt aus dem anfangs erwähnten Windkessel durch die Oeffnung L in die Rinne 2 des Schiebekastens ein und gelangt von da, je nach der Stellung des Schiebekastens, durch 4 oder 5, J oder M, über oder unter den Kolben im Cylinder, und nachdem sie auf diesen gewirkt hat, beim nächsten Umsteuern durch den elektrischen Strom entweicht sie durch die Rinne 1 oder 3 im Schiebekasten in die Atmosphäre.

Der Kolben im Cylinder bewegt sich also in gleichem Takte mit dem Stabe C und überträgt seine horizontal hin und her gehende Bewegung auf den Hebel h des Echappements V (Fig. 12 und 13, Taf. VI), dessen Lappen sich abwechselnd sperrend in das Echappementrad N einlegen, welches auf derselben vertical stehenden Welle J (Fig. 12 und 14, Taf. VI) mit dem 2 Zoll im Durchmesser haltenden stählernen Typenrade $ABCD$ sitzt; diese Welle J aber ist durch Friction mit einer hohlen Rolle H (Fig. 14, Taf. VI) verbunden, indem eine gewöhnliche Uhrfeder sich mit dem einen Ende immer mit gleicher Kraft an die innere Seite der Rolle anlegt, während die Feder mit ihrem andern Ende an der Welle befestigt ist. So nimmt die Rolle, welche in beständiger Umdrehung erhalten wird, das Typenrad mit, so oft sich nicht ein Lappen des Echappements sperrend in das Echappementrad einlegt. Das Echappementrad hat 14 Zähne und rückt bei jeder Schwingung des Echappements um einen Zahn fort. Das Typenrad enthält dieselben 28 Zeichen, wie die Claviatur, und rückt demnach sowohl beim Hingange als beim Hergange des Echappements, des Kolbens oder der Stange C um ein Zeichen fort, also jedesmal um ein Zeichen, wenn die Feder auf dem Schliessungsrade des Zeichengebers von einem massiven Sector in einen Ausschnitt eintritt oder umgekehrt.

Durch die Schrauben *m* und *n* (Fig. 12, Taf. VI) lässt sich jeder beliebige Buchstabe des Typenrads einstellen und durch sie wird das Typenrad beim Beginn jeder Depesche auf den Gedankenstrich eingestellt; eben so, wenn einmal während des Telegraphirens das Typenrad ausser Einklang mit dem Zeichengeber der telegraphirenden Station gerathen ist. Oberhalb des Typenrades sitzt an seiner Welle *J* noch ein Buchstabenrad *F*, welches durch ein kleines Fensterchen in der Haube des Apparates denselben Buchstaben sichtbar werden lässt, welcher auf dem Typenrade eben abgedruckt wird. So kann die Depesche auch gleichzeitig abgelesen werden.

Auf seiner obern Fläche hat das Typenrad 28 vorstehende Triebstöcke; neben ihm steht eine kleine Stahlscheibe *X* (Fig. 12 und 15, Taf. VI), zwei Zoll im Durchmesser, welche ebenfalls nur durch Frictionskuppelung auf ihrer verticalen, durch den Schnurlauf in steter, mit der des Typenrades gleichsinniger Umdrehung erhaltenen Welle befestigt ist*); an der dem Typenrade zugewandten Seite der Scheibe ist ein kleiner stählener Arm *d*, ½ Zoll lang, angebracht, welcher sich an die Triebstöcke des Typenrades anlegt und von ihnen mitgenommen wird, wenn das Typenrad sich umdreht, sich dagegen zwischen zwei Triebstöcke einlegt, wenn das Typenrad still steht; im letzteren Falle folgt die Scheibe ein Stückchen ihrer Welle und erhält eine kleine entgegengesetzte Bewegung, wenn das Typenrad sich wieder in Bewegung setzt. Auf der dem Arm *d* diametral entgegengesetzten Seite der Scheibe *X* sind zwei Aufhaltstifte *i* und *e* angebracht; wenn das Typenrad still steht, so legt sich an den ersten, *i*, ein Aufhaltarm *U*, welcher gleichfalls nur mit Frictionskuppelung auf eine verticale Welle *T* aufgesteckt ist; diese Welle *T* aber wird durch den Schnurlauf stets in entgegengesetztem Sinne wie das Typenrad umgedreht. Fängt das Typenrad an, sich umzudrehen, so wird die Scheibe *X* durch den kleinen stählernen Arm ein Stück mit fort genommen; dadurch wird *U* von dem ersten Aufhaltstifte *i* der Scheibe losgelassen und legt sich an den gleich daneben befindlichen zweiten, *e*, an, bis das Typenrad wieder still steht; geschieht diess, so macht die Scheibe *X* eine kleine Bewegung durch den Antrieb ihrer Welle und jetzt lässt wieder der zweite Aufhaltstift *e* den Aufhaltarm *U* los und dieser macht nahezu eine volle Umdrehung, bis er sich wieder an den ersten Aufhaltstift *i* anlegt**). So oft also das Typenrad still steht, macht der Aufhaltarm *U* eine Umdrehung und diese wird nun zum Aufdrucken des Buchstabens auf das Papier benutzt. Auf der

---

*) Einfacher wäre es jedenfalls, wenn die Welle der Scheibe fest stünde und mit der Scheibe durch eine Uhrfeder in derselben Weise, wie Fig. 14, Taf. VI, verbunden wäre, und zwar so, dass ein Ende der Feder fest mit der unbeweglichen Welle *J*, das andere Ende aber fest mit der innern Höhlung *H* der beweglichen Scheibe verbunden wäre.

**) Eine ähnliche Vorrichtung wurde schon beim Typendrucktelegraph von Bain beschrieben.

Nabe des Aufhaltarms U sitzt nämlich noch eine excentrische Scheibe R fest; von dieser geht die Zugstange S aus und zieht bei jeder Umdrehung der Scheibe einen auf einem federnden Stahlstäbchen angebrachten, sich drehenden, gekerbten Schaft p an den eben eingestellten Buchstaben des Typenrades heran. QQ ist das endlose Schwärzband*), welches von einer kleinen Farbenwalze beständig mit der zum Drucken verwendeten Farbe gespeist wird; den von einer Rolle kommenden Papierstreifen L aber zieht der geriffelte Schaft p bei seiner Umdrehung zwischen sich und einer Stahlspange hindurch, welche das Papier an den Schaft andrückt und es glatt erhält; die Spange ist durchbrochen und durch die Oeffnung in ihr reicht der Type beim Aufdrucken hindurch. Nach jedem Aufdrucken eines Buchstabens aber wird der Schaft p bei seinem Rückgange durch eine Sperrvorrichtung um $\frac{1}{4}$ Umdrehung um seine Achse gedreht, so dass eine neue unbedruckte Papierfläche vor die durchbrochene Oeffnung der Spange zu stehen kommt.

Vor dem Beginn des Telegraphirens wird ein Signal durch die einfache Bewegung des Elektromagnetes gegeben; die Empfangsstation beantwortet dasselbe und meldet unter Einstellen des Typenrades auf den Gedankenstrich zurück, sie sei zum Empfangen bereit; jetzt sind beide Maschinerien in Gang und die Correspondenz beginnt, indem der Telegraphist die Depesche auf seinem Claviere abspielt. Das Typenrad muss dabei in 1 Secunde mindestens 25 Schritte fortrücken, damit der Druckapparat nicht schon während des Einstellens des Typenrades in Gang kommt. Der Apparat soll sehr gut und sicher arbeiten und 300 Buchstaben in 1 Minute drucken. — Anscheinend kann selbst von der Empfangsstation aus die Correspondenz unterbrochen und so eine etwa nöthige Correctur leicht erlangt werden, wenn einmal ein oder mehrere Zeichen undeutlich ausgeprägt wären.

5. Der Typendrucktelegraph von Jacob Brett.

Der Engländer Jacob Brett arbeitete mehrere Jahre in Gesellschaft mit dem Amerikaner Royal E. House an einem Typendrucktelegraph; Letzterer nahm ein Patent in den Vereinigten Staaten, Ersterer in Grossbritannien auf denselben Apparat (vergl. *Mechanic's Magazine*, Bd. 51, S. 623). Nach dem Ablauf dieser ersten Patente verbesserten beide ihren Telegraph; der House'sche kam auf mehreren Linien der Vereinigten Staaten in Gebrauch, der Brett'sche dagegen nur vorübergehend auf europäischen Linien.

Der Zeichengeber ist eine Claviatur mit 28 (auch wohl 30 oder 40) Tasten, unter welchen, ähnlich wie bei dem House'schen Telegraph, eine Walze mit 28 Metallstiften angebracht ist, welche in einer Schraubenlinie auf der Walze vertheilt sind, und von denen sich beim Niederdrücken einer

*) Es ist auch versucht worden, die Buchstaben (ohne Druckfarbe) blos mechanisch in das Papier einzudrucken; vergl. Polytechnisch. Centralblatt, 1847, S. 713.

Taste immer einer an einen Vorsprung auf der Unterseite der Taste anlegt und so die Walze arretirt; die Walze wird aber mittels eines Räderwerkes mit Windflügel durch ein Gewicht in Umdrehung versetzt; auf der Walze sitzt ferner ein ebensolches Schliessungsrad mit 14 (15 oder 20) zahnförmig vorstehenden Sectoren, wie bei dem Apparat von House; eine Feder schleift auf dem Metall der Walze und eine andere daneben auf dem metallischen Schliessungsrade; die erstere steht mit einem Batteriepol, die andere durch den Druckapparat hindurch mit der Luftleitung, mit den Apparaten auf der Empfangsstation und durch die Erde mit dem andern Batteriepol in leitender Verbindung; somit wird bei Umdrehung der Walze durch die beiden Federn der Strom abwechselnd geschlossen und wieder unterbrochen. Später ersetzte Brett die Claviatur durch ein mit den telegraphischen Zeichen versehenes Zifferblatt (Fig. 16 und 17, Taf. VI), auf welchem um die Drehachse *A* ein mit dem Zeiger *K* fest verbundener Hebelarm *GHJ*, bei *J* auf einer kleinen Rolle rollend, nach beiden Seiten hin herumgedreht werden kann; bei einer Drehung aus seiner jetzigen Stellung nach links bewegt er sich allein und kann so beim Beginn des Telegraphirens auf ein bestimmtes Zeichen eingestellt werden; bei einer Drehung nach rechts aber nimmt er durch die Sperrung *t* und *D* das Schliessungsrad *S* mit, welches sich ebenfalls nur nach dieser Richtung herumdrehen kann, da eine Sperrvorrichtung *e* und *B* ein Umdrehen in der entgegengesetzten Richtung verhindert; die Anordnung des Schliessungsrades *S* und der beiden aufschleifenden, mit den Klemmen *M* und *N* leitend verbundenen Federn *f* und *g* zeigt Fig. 17, Taf. VI, deutlich.

Der Anker *B* des Elektromagnetes *E* (Fig. 18, Taf. VI) des Druckapparates ist durch die Stange *T* mit dem als Feder wirkenden Arme *r* verbunden und bewegt diesen nieder, so oft die Eisenkerne *A* und A_1 in den Multiplicationsrollen durch den Strom magnetisch werden; bei Unterbrechung des Stromes zieht die Feder *r* den Anker *B* wieder ab. Dieses Spiel des Armes *r* überträgt sich zugleich auf den Winkelhebel LL_1, da derselbe fest auf derselben Achse mit *r* sitzt; die beiden Arme *L* und L_1 dieses Winkelhebels bilden aber ein Echappement für das etwa 3 Zoll im Durchmesser haltende und 1 Zoll dicke Typenrad *R* mit 28 Zähnen, auf dessen Umfang die 28 Typen (26 Buchstaben, der Schlusspunkt und ein leerer Raum) angebracht sind. Auf dem Typenrade stehen ferner seitlich 14 Stifte hervor; an einen derselben legt sich abwechselnd *L* oder L_1 an und hemmt so das Typenrad, welches ein Uhrwerk mit Gewicht in beständige Umdrehung zu versetzen strebt; bei jedem Spiele des Ankers *B* rückt also das Typenrad um einen Stift oder zwei Zeichen weiter, mithin bei jeder Unterbrechung und bei jedem Schliessen des Stroms um ein Zeichen, und es folgt demnach das Typenrad in gleichem Schritte dem Schliessungsrade im Zeichengeber. Durch das Uhrwerk getrieben, macht das Typenrad, wenn es nicht arretirt wird, in der Minute 100 Umdrehungen.

Das Papier, auf welches die Buchstaben aufgedruckt werden sollen, ist entweder ein Blatt und gleich auf den Cylinder *b* aufgelegt, und dann erhält der Cylinder durch eine Schraube eine seitliche Verschiebung, so dass die Buchstaben in einer Schraubenlinie auf das Papier aufgedruckt werden; oder es kommt ein Papierstreifen von der unter dem Cylinder *b* liegenden Papierrolle *O*. Der Cylinder *b* ist mit seinen Zapfen *a* in ein um *P* drehbares Gestell eingelagert, welches mittels zweier zu beiden Seiten des Typenrades liegenden Zugstangen *cc* mit zwei excentrischen Scheiben *p* verbunden ist. Die Welle der excentrischen Scheiben wird ebenfalls durch ein Uhrwerk mit Gewicht in beständige Umdrehung und durch diese der Cylinder *b* in eine hin und her gehende Bewegung versetzt, sofern die excentrischen Scheiben nicht gehemmt werden. Die Hemmung der Scheiben wird durch den (mit dem Winkelhebel LL_1 in keinerlei Beziehung oder Verbindung stehenden) Hebel ll_1 bewirkt; derselbe dreht sich um eine im Gestell befestigte Achse an seinem dicken Ende *l* und legt sich mit seinem gebogenen andern Ende l_1 an das Typenrad *R* auf dessen Rückseite an; dazu hat das Typenrad auf der Rückseite 28 vorstehende Stifte, von denen l_1 beim Umdrehen des Typenrades in schneller Folge gehoben wird. Dem Heben steht kein Hinderniss entgegen, denn es folgt dem Hebel ll_1 leicht der durch die Stange *tt* damit verbundene kleine Kolben *k* (Fig. 19, Taf. VI) in dem hydraulischen Regulator oder Governor *S*; das Wasser aus dem äusseren Gefässe desselben dringt dabei durch die Löcher *v* in den innern Raum *i* und hebt das Ventil *s*. Das so über das Ventil gelangte Wasser setzt aber dem Niedergange des Kolbens und also auch des Hebels ll_1 einen Widerstand entgegen; da nämlich das Ventil *s* sich gleich zu Anfang des Niedergehens schliesst und dem Wasser nur ein ganz enger Ausweg zwischen dem Kolben *k* und der Röhrenwand *d* gelassen ist, so kann der Kolben und der Hebel ll_1 nur sehr langsam niedergehen. Daher kommt es denn auch, dass während der Umdrehung des Typenrades *R* der Hebel ll_1 sich eigentlich gar nicht senkt, sondern beständig gehoben und in der Schwebe erhalten wird, und erst dann, wenn das Typenrad angehalten wird, durch die Wirkung der Schwerkraft langsam niedergeht. An dem Hebel ll_1 befindet sich nun ein kleiner horizontaler Ansatz und zwei andere dergleichen sitzen auf der einen excentrischen Scheibe *p*; wenn der Hebel gesenkt ist, also das Typenrad still steht, liegt der Ansatz des Hebels an dem ersten Ansatze der Scheibe an und die Scheibe ist gehemmt; wird das Typenrad in Umdrehung versetzt, so wird der Hebel ll_1 gehoben, sein Ansatz lässt den ersten Ansatz der Scheibe los, diese dreht sich ein Stück, bis ihr zweiter, nahe an dem ersten befindlicher Ansatz dem Ansatze am Hebel begegnet, wodurch die Scheibe wieder arretirt wird und arretirt bleibt, so lange der Hebel gehoben ist; kommt endlich das Typenrad zum Stillstehen, so senkt sich der Hebel, sein Ansatz lässt den zweiten der Scheibe frei und diese macht jetzt nahezu eine volle Umdrehung, bis ihr erster Ansatz

sich wieder an den des Hebels anlegt. Bei der Umdrehung der excentrischen Scheibe aber wird der Papiercylinder *b* durch die Zugstangen *c* an das Typenrad *R* herangezogen, der eingestellte Buchstabe auf das Papier aufgedruckt*) und dann der Papiercylinder *b* wieder zurückgeschoben, wobei sich die Sperrfeder *e* in das Sperrrad *X* am Papiercylinder einlegt und letzteren um einen Zahn fortrückt, so dass eine neue Stelle des Papiers für den Abdruck des nächsten Buchstabens in Bereitschaft gesetzt wird. Der Sperrkegel e_1 verhindert eine rückgängige Bewegung des Papiercylinders. Zum Aufdrucken soll sich pulverisirter Graphit sehr empfehlen; derselbe wird in eine Rinne in der kleinen Rolle über dem Typenrade eingetragen und mit Leinwand überzogen; so geht immer eine entsprechende Menge zwischen den Fäden der Leinwand hindurch und schwärzt die Typen.

An dem Apparate ist auch eine Glocke *M* angebracht, gegen welche der von dem Hebel ll_1 oder der excentrischen Scheibe *p* aus in Bewegung gesetzte Hammer *N* anschlägt und hörbare Zeichen giebt, was namentlich bei Einleitung der Correspondenz von Werth ist.

Durch Hinzufügung sogenannter Aufhalträder (*stop wheels*) hat Brett seinem Apparate einen sicherern Gang verschafft; durch diese Vorrichtung wird (der Zeiger und) das Typenrad nach jedem Aufdrucken eines Buchstabens auf den Ausgangspunkt oder Nullpunkt zurückgeführt. In diesem Falle ist natürlich darauf zu sehen, dass diejenigen Buchstaben des Alphabets, welche am häufigsten vorkommen, dem Ausgangspunkte am nächsten stehen, und demgemäss ist z. B. das Zifferblatt in Fig. 16, Taf. VI, eingerichtet.

In einer neuern Form des Apparates hat Brett die bewegenden Gewichte durch eine Feder ersetzt. Ferner wird die Bewegung des Typenrades nicht durch abwechselndes Schliessen und Unterbrechen des elektrischen Stromes in Umdrehung versetzt, sondern durch positive und negative Ströme, welche in schneller Folge mit einander abwechseln, einen zwischen zwei Elektromagneten stehenden und ihnen als Anker dienenden permanenten Magnet hin und her bewegen und durch ihn vermittelst eines Echappements das Echappementrad und das mit ihm auf gleicher Achse steckende, aber nur durch Friction von ihr mitgenommene Typenrad umdrehen; dabei wickelt sich die Schnur eines Gewichtes auf eine kleine Rolle neben dem Typenrade auf und strebt dieses in die Ausgangsstellung zurückzudrehen; das Typenrad kann dem Antriebe dieses Gewichts aber erst dann folgen, wenn nach dem Aufdrucken des eingestellten Buchstabens beim Rückgange des Druckapparates ein Sperrkegel in einem Sperrrädchen ausgerückt wird.

---

*) Ursprünglich bestand der Druckapparat in einem Hammer oder Fallklotz, welcher in einer verticalen Nuth auf und nieder ging. Vergl. Polytechnisches Centralblatt, 1849, S. 1107, nach Polytechn. Notizblatt, 1849, No. 9.

6. Moses Poole's Patent.

Der Patentagent Moses Poole in London erhielt den 14. December 1846 ein Patent auf einen Typendrucktelegraph, bei welchem durch einen fallenden Hebelhammer der Buchstabe auf das Papier aufgedruckt wird, sowie derselbe eingestellt ist. Der elektrische Strom geht gleichzeitig durch drei Elektromagnete; das Spiel des Ankers des ersten Elektromagnetes rückt das Typenrad schrittweise um einen Typen weiter, so oft ein Strom durch die Linie gesandt wird; der zweite Elektromagnet rückt einen Federhaken am Schwanze des Hammers aus, so dass der nahezu vertical stehende Hammer nun von Seiten des Federhakens nicht mehr am Niederfallen gehindert ist, der dritte Elektromagnet hält aber den Hammer noch fest, so lange der Strom circulirt, und lässt den Hammer erst fallen, wenn der Strom aufhört. Während des Einstellens eines Typen folgen sich aber die Ströme so schnell (16 in 1 Secunde, durch ein Speichenrad gegeben und unterbrochen), dass der Hammer beim Eintritte des nächstfolgenden Stromes dem dritten Elektromagnet noch so nahe ist, dass er nicht niederfallen kann, vielmehr fällt der Hammer erst dann auf den Typen herab, wenn der Strom nach dem Einstellen eine etwas längere Zeit hindurch unterbrochen wird. Gleich nach dem Niederfallen wird der Hammer durch ein bei seinem Falle losgelassenes Uhrwerk wieder gehoben. (Vergl. Dingler, polytechnisches Journal, Bd. 112, S. 197; aus *Repertory of Patent Inventions*, *Jan. and Febr.* 1849; *Mechanic's Magazine*, Bd. 47, S. 42.)

7. Der Typendrucktelegraph von Siemens und Halske.

Siemens und Halske in Berlin construirten (1852) einen Typendrucktelegraph, welcher in Russland und auf einigen baierischen Eisenbahnen Anwendung gefunden hat und sich in seiner Einrichtung genau an den elektromagnetischen Zeigertelegraph von Siemens und Halske*) anschliesst. Bei diesem ist dafür gesorgt, dass der Strom in kurzen gleichmässigen Pausen sich selbst unterbricht und wieder herstellt (Princip der Selbstunterbrechung). Sowie nämlich der Anker des Elektromagnetes ein Stück seines Wegs in Folge der elektromagnetischen Anziehung zurückgelegt hat, unterbricht er den Schliessungskreis des elektrischen Stromes und wird nun von einer Feder in seine Ruhelage zurückgeführt, wobei er durch einen Federhaken das Zeigerrad um einen Zahn fortrückt; hat der Anker seine Ruhelage erreicht, so ist der Stromkreis wieder geschlossen und das Spiel beginnt von Neuem. Da es aber nicht in steter Gleichförmigkeit fortdauern darf, sondern aufhören soll, wenn der Zeiger über dem zu telegraphirenden Buchstaben steht, so ist eine Claviatur mit 30 im Kreise stehenden Tasten vorhanden; die mit dem zu telegraphirenden

*) Ausführlich beschrieben in: Schellen, der elektromagnetische Telegraph, 2. Aufl., Braunschweig 1854, S. 115; Galle, Katechismus der Telegraphie, 2. Aufl. Leipzig 1859. S. 97.

Buchstaben bezeichnete Taste wird niedergedrückt, und wenn nun der Zeiger auf der Buchstabenscheibe über eben diesem Buchstaben steht, stösst ein Arm an seiner Welle an einen Stift der niedergedrückten Taste und hält so den Zeiger, das Zeigerrad und durch den Federhaken auch den Anker des Elektromagnetes mitten auf seinem Wege auf und der Strom bleibt unterbrochen.

Ersetzt man nun den Zeiger durch ein Typenrad, stellt demselben an irgend einer Stelle eine Schwärzwalze gegenüber, führt zwischen ihr und dem Typenrade den zu bedruckenden Papierstreifen hindurch und lässt durch die Wirkung eines besonderen, zu diesem Zwecke angebrachten Elektromagnetes mittels eines Hammers den jedesmal der Schwärzwalze gegenüberstehenden Typen an die Walze andrücken, wenn das Typenrad in Folge einer länger dauernden Unterbrechung des Stromes still steht, so hat man den Zeigerapparat in einen Typendrucktelegraph umgewandelt. Der Elektromagnet für die Bewegung des Hammers ist in den Kreis einer Localbatterie eingeschaltet, welche durch die Wirkung des Linienstromes so oft und genau eben so lange und gleichzeitig geschlossen wird, als der Linienstrom unterbrochen wird und umgekehrt; da aber der Anker des Hammerelektromagnetes ziemlich schwer ist, so kann er bei der schnellen Abwechselung von Schliessung und Unterbrechung der Batterie während des Einstellens nicht angezogen werden, weil es immerhin eine längere Zeit erfordert, bevor sein Elektromagnet so stark magnetisch wird, dass er den schweren Anker anziehen kann. Wenn aber durch das Niederdrücken einer Taste das Typenrad festgehalten wird, bleibt der Localstrom längere Zeit geschlossen, der schwere Anker wird angezogen, der Hammer in Bewegung gesetzt, dabei aber auch wieder der Localstrom selbst unterbrochen und nach dem Aufdrucken der Anker und der Hammer durch eine Feder in seine Ruhelage zurückgeführt. (Vergl. Dingler, polytechnisches Journal, Bd. 127, S. 257, aus *Practical Mechanic's Journal, Mai* 1852, S. 25. Polytechnisches Centralblatt 1853, S. 1166.)

8. Der Typendrucktelegraph von Du Moncel.

Du Moncel in Paris hat bei seinem Typendrucktelegraph (1853) das Typenrad *A* (Fig. 20, Taf. VI) mit so vielen seitlich vorstehenden Stiften versehen, als Typen darauf vorhanden sind; diese Stifte legen sich an das eine Ende des Hebels *a* an, dessen anderes Ende den aus weichem Eisen bestehenden Anker a_1 des Elektromagnetes *E* trägt. Ein Uhrwerk strebt nun zwar fortwährend, das Typenrad umzudrehen, kann es aber nur dann wirklich fortrücken, wenn der Anker angezogen ist, weil sich sonst ein Stift hemmend an den Hebel *a* anlegt. Dabei überträgt die Schwärzwalze *G* beständig Druckschwärze auf die Typen; der Flanellüberzug der Schwärzwalze ist nämlich mit einer fetten, nicht eintrocknenden Tinte getränkt, und auf die Zapfen der Schwärzwalze wirken Federn, welche dieselbe stets

an das Typenrad andrücken. Ein zweites Uhrwerk wirkt ununterbrochen auf Umdrehung der Scheibe *B*; diese ist indessen ebenfalls durch einen seitlich vorstehenden Stift gehemmt, welcher sich an das untere Ende des Hebels *b* anlegt; die Scheibe kann sich desshalb nur umdrehen, wenn der am andern Ende des Hebels *b* befindliche permanente Magnet b_1, welcher als Anker für den Elektromagnet E_1 dient, von dem Elektromagnete angezogen wird; denn dann lässt der Hebel den Stift los und die Scheibe *B* macht eine volle Umdrehung, wobei zugleich die auf *B* sitzende excentrische Scheibe *K* der Lenkstange *C* eine einmalige hin und her gehende Bewegung ertheilt und den an dem Ende von *C* sitzenden Stempel *J* einmal an das Typenrad *A* herandrückt und wieder zurückzieht. Durch die letztere Bewegung wird der eben eingestellte Type auf den Papierstreifen *P* aufgedruckt, welcher von der Rolle *L* kommt, über die Walze *M*, durch die auf *J* angebrachte Führung *Q* und zwischen dem Walzenpaare *N*, *O* hindurchgeht. Die Führung *Q* verhütet, dass der noch unbedruckte Theil des Streifens durch Anstreifen an einen andern Typen beschmuzt werde. Beim Rückgange der Lenkstange *C* legt sich der daran befindliche Sperrhaken *p* in ein Sperrrad *s* ein, welches in ein zweites eingreift und dasselbe jedesmal um einen Zahn fortrückt; da aber das zweite Rad auf derselben Welle wie *N* aufgesteckt ist, so wird auch *N* ein Stück umgedreht und das Walzenpaar *N*, *O* zieht, weil *O* durch auf seine Zapfen wirkende Federn an *N* angedrückt wird, nach dem jedesmaligen Abdrucken eines Zeichens auf den Streifen den Streifen um ein Stück fort, so dass ein neues Zeichen aufgedruckt werden kann.

Die beiden Elektromagnete *E* und E_1 sind in die Leitung eingeschaltet; während aber der Anker von *E* beim Durchgange eines positiven und auch eines negativen Stromes angezogen wird, weil er aus weichem Eisen besteht, wird der Anker von E_1 nur beim Durchgange eines Stromes von einer bestimmten Richtung angezogen, z. B. beim Durchgange eines negativen. Das Telegraphiren bedingt demnach eine Vorrichtung zum Zeichengeben, durch welche der Telegraphist nach Bedarf einen positiven oder negativen Strom in die Leitung senden kann; auch kann der Zeichengeber gleich so eingerichtet sein, dass er selbst einen positiven oder negativen Strom in die Linie schickt, wie es gerade erforderlich ist*). So lange nun blos das Typenrad gedreht werden soll, giebt der Telegraphist wiederholt einen kurzen positiven Strom, dadurch rückt das Typenrad jedesmal um einen Typen weiter, indem der Hebel *a* jedesmal einen Stift frei lässt, wogegen der Anker b_1 am Hebel *b* nicht angezogen wird, also die Scheibe *B* gehemmt bleibt. Das letzte Mal jedoch, d. h. wenn eben der zu telegraphirende Buchstabe sich einzustellen im Begriff ist, lässt man das Typenrad durch einen negativen Strom fortrücken; die Folge davon ist, dass

*) Eines solchen Apparates Beschreibung folgt beim Typendrucktelegraph von Digney.

auch der Elektromagnet E_1 seinen Anker anzieht, die Scheibe *B* eine Umdrehung macht und der zu telegraphirende Buchstabe auf den Papierstreifen aufgedruckt wird.

Eine Einrichtung, welche Sorge trägt, dass der Anker von *E* nicht zu lange angezogen bleibt, damit nicht mehr als ein Stift auf einmal an *a* vorbeigehen kann, muss die Zuverlässigkeit des Apparates erhöhen. Ist derselbe Buchstabe zwei oder mehr Mal hintereinander zu drucken, so muss zwischen jedem Mal das Typenrad eine volle Umdrehung machen, was nicht gerade ein Vorzug des Apparates genannt werden kann.

9. Der Typendrucktelegraph von Freitel

paradirte auf der Pariser Industrieausstellung im Jahre 1855. Er unterscheidet sich von allen anderen schon dadurch, dass er die Depesche nicht in einer einzigen Zeile auf einen schmalen Papierstreifen aufdruckt, sondern auf einem breiten Blatte in übereinander liegenden Zeilen genau in derselben Weise, wie die Zeilen auf jeder Seite eines gedruckten Buches über einander liegen. Zur Bewegung des Apparates, welcher das Typenrad auf den zu telegraphirenden Buchstaben einstellt, und des anderen, welcher dann das Aufdrucken des Buchstabens besorgt, ist nur ein einziger Elektromagnet *E* (Fig. 21, Taf. VI) vorhanden; dieser hat aber zwei (in der Fig. 21 nicht sichtbare) neben einander liegende Anker, und es sind die Federn, welche die Anker nach jeder Anziehung in die Ruhelage zurückführen, nicht gleich stark gespannt, so dass der eine Anker von Strömen, durch welche der andere bereits angezogen wird, noch nicht angezogen werden kann. Die Batterie ist in zwei Hälften getheilt und nach Bedarf kann der Strom einer oder beider Hälften in die Leitung gesendet werden. Der Strom der einen Hälfte lässt den Elektromagnet zwar den Anker mit schwach gespannter Feder anziehen, nicht aber den Anker mit stark gespannter Feder; wenn dagegen ein Strom von der ganzen Batterie durch die Leitung und den Elektromagnet hindurchgeht, so werden beide Anker angezogen.

Die Fig. 21 zeigt den Apparat im Aufrisse; das Typenrad *BD* erhält von einer Uhrfeder in dem Federhause *P* mittels eines Räderwerkes einen beständigen Antrieb zur Umdrehung, kann demselben aber nur dann folgen, wenn sich der um *A* in horizontaler Richtung drehbare Hebel *QQ* nicht sperrend in das Sperrrad *H* einlegt. Der Hebel *QQ* trägt nun an seinem Ende links den Anker mit schwach gespannter Feder; so oft daher ein Strom durch den Elektromagnet *E* geht, wird *H* losgelassen und das Typenrad rückt einen Schritt weiter. Das Blatt Papier, auf welches die Depesche gedruckt werden soll, ist neben dem Typenrade *BD* auf einen Rahmen *JFOK* vertical aufgespannt; der Rahmen aber befindet sich auf einem kleinen Wagen, welcher auf einer Eisenbahn hin und her gehen kann; in die Zahnstange *XY* an dem Wagen legt sich ein Sperrhaken *s* der Sperr-

vorrichtung *M* etwa in der durch Fig. 22, Taf. VI, angedeuteten Weise ein und schiebt den Wagen mit dem Papierrahmen um einen Zahn von rechts nach links fort, so oft der obere Theil *g* des um *f* drehbaren Hebels *gh* durch die mit dem um *d* drehbaren Winkelhebel *cde* verbundene Schubstange *L* von links nach rechts geschoben wird, d. h. so oft der mit der stark gespannten Feder versehene Anker *c* des Elektromagnetes *E* angezogen wird, und ausserdem wird hierbei gleichzeitig noch ein Winkelhebelsystem in Bewegung versetzt, wodurch der Hebelarm *NN'* einen zweiten um *S* drehbaren Hebel dreht, an dessen anderem Ende sich ein kleiner Hammer befindet und das Papier auf den dem Hammer bei *C* eben gegenüberstehenden, vorher eingestellten Buchstaben andrückt, wodurch der Buchstabe sich auf das Papier aufdruckt.

Wenn eine Zeile vollgedruckt ist, befindet sich der Wagen am Ende seiner Bahn und es hebt jetzt ein Ansatz am Wagen den Drücker *R* aus; dadurch wird der Sperrhaken *s* aus der Zahnstange *XY* herausgehoben und der Wagen mit dem Papierrahmen durch das jetzt niedergehende Gegengewicht *W* von links nach rechts in seine anfängliche Stellung zurückgeführt. Kurz bevor der Wagen in die äusserste Stellung rechts gelangt, kommen die beiden Laufwalzen *a* und a_1 am Wagen auf die beiden schiefen Ebenen *U* und U_1 und laufen auf ihnen hinauf, wobei die Sperrkegel *b* und b_1 sich in die beiden Zahnstangen *JK* und *FO* an dem Papierrahmen einlegen und diesen um einen Zahn in die Höhe schieben, so dass nun eine neue Zeile Buchstaben unter der ersten auf das Papier gedruckt werden kann. Der Rückgang des Wagens wird zugleich dazu benutzt, durch das Anstossen an ein Stäbchen eine neue Quantität Druckfarbe auf die Schwärzwalzen *ZZZ* zu bringen.

Der Zeichengeber ist dem Zeichengeber an Zeigertelegraphen ähnlich, nur dass der Griff nicht starr, sondern biegsam ist; wenn ein daran befindlicher Stift durch einfachen Druck in ein Loch eintritt, welches unter jedem Buchstaben vorhanden ist, so wird die ganze Batterie geschlossen und ihr Strom setzt den Druckapparat in Gang; wenn dagegen der Griff, ohne niedergedrückt zu werden, einfach herumgedreht wird, so wird dabei die halbe Batterie wiederholt geschlossen und unterbrochen und ihr Strom dreht in gleichem Schritte mit dem Griffe das Typenrad um.

Der Telegraphist hat also beim Telegraphiren nur den Griff des Zeichengebers zu erfassen und ihn in der vorgeschriebenen Richtung umzudrehen, bis er über dem zu telegraphirenden Buchstaben steht; dabei folgt das Typenrad in gleichem Schritte, und wenn der Telegraphist nun den Griff niederdrückt, so wird auch der Anker mit der stark gespannten Feder noch angezogen und der Buchstabe auf das Papierblatt aufgedruckt.

So hübsch auch die Idee ist, welche dem Typendrucktelegraph von Freitel zu Grunde liegt, so steht doch zu befürchten, dass der Apparat durch die bei ihm unvermeidlich wiederkehrenden Stösse allmählich an

Zuverlässigkeit abnimmt, und ausserdem, dass der Rückgang des Wagens, der doch nicht zu schnell erfolgen darf, möglicher Weise noch nicht vollendet ist, während der nächste Buchstabe schon gedruckt werden soll. Dann würde aber ein Irrthum oder wenigstens eine Undeutlichkeit entstehen, da dieser Buchstabe noch auf die bereits volle Zeile aufgedruckt würde. Wenn man einmal die Depesche auf ein breites Blatt und nicht auf einen schmalen Papierstreifen aufdrucken will, so ist es offenbar vorzuziehen, die von Bain gewählte Methode der Fortbewegung des Papiers (vergl. oben unter 2.) anzuwenden, weil man bei derselben an die Stelle der absatzweise geradlinig hin und her gehenden Wagenbewegung eine schrittweise, stets in gleichem Sinne erfolgende Umdrehung einer Walze setzen kann.

10. Der Typendrucktelegraph von Digney.

Die Herren Digney in Paris haben (1858) den auf den französischen Eisenbahnen gebräuchlichen Zeigertelegraph*) von Bréguet in einen sehr vollkommenen Typendrucktelegraph**) umgestaltet, an welchem der Zeichengeber oder Schlüssel von dem Receptor oder dem Apparate zum Aufnehmen der Zeichen gänzlich getrennt ist; ihre Einrichtung und die Bestimmung der einzelnen Theile lässt sich auch an einer gesonderten Betrachtung beider Apparate am besten erkennen.

A. Der Schlüssel ist Fig. 23, Taf. VII, im Aufrisse, Fig. 24 im Grundrisse dargestellt, in letzterem aber ein Theil des Zifferblattes *K* weggelassen worden. Das messingene Zifferblatt *K* ruht auf drei Säulen, von denen zwei isolirt sind, während die dritte Säule *Q* durch einen von ihr nach *L* gehenden Kupferstreifen das Zifferblatt mit der in *L* einmündenden Luftleitung in leitende Verbindung setzt. Auf dem Zifferblatte stehen in zwei concentrischen Kreisen die Zahlen von 1 bis 25 und die fünfundzwanzig Buchstaben des Alphabetes; ausserdem ist aber zwischen den Buchstaben *A* und *Z* und zwischen den Zahlen 1 und 25 noch ein 26. Feld vorhanden, welches ein Kreuz enthält. Ueber diesem horizontalen Zifferblatte nun befindet sich ein um eine verticale Drehachse beweglicher metallener Zeiger *F* mit einem kleinen Fensterchen, durch welches die Buchstaben und Zahlen des Zifferblattes gesehen werden können. Die Achse dieses Zeigers *F* ist durch Elfenbeinscheiben gegen das Zifferblatt *K* isolirt, steht aber mit dem Zinkpole *Z* der Linienbatterie in leitender Verbindung; der Zeiger selbst aber ist nicht starr, sondern biegsam und kann ein wenig niedergedrückt werden, so oft der an ihm unterhalb befindliche Metallstift *i* gerade über einem der Ausschnitte steht, welche am Rande des Zifferblattes in der

*) Vergl. *Bulletin de la société d'encouragement*, *Paris* 1855, S. 214.

**) Ausführlich beschrieben im *Bulletin de la société d'encouragement*, *Paris* 1859, S. 3—8 und 12—19.

Mitte jedes Buchstabenfeldes angebracht sind; wird der Zeiger niedergedrückt, so legen sich zwei metallische Federn *r* auf das Zifferblatt auf und stellen eine leitende Verbindung zwischen dem Zinkpole *Z* durch die Achse des Zeigers und dem Zifferblatte her. Mit der Achse des Zeigers *F* ist eine Scheibe *M* fest verbunden, in welche auf der Unterseite eine geschlängelte (in Fig. 24, Taf. VII, punktirte) Vertiefung eingearbeitet ist, mit doppelt so viel (d. h. 52) Bäuchen, als Felder auf dem Zifferblatte vorhanden sind; 26 von diesen Bäuchen sind concav gegen die Achse, 26 convex gegen die Achse oder concav gegen den Umfang der Scheibe. Durch zwei Stifte *a* und *b* an zwei Hebeln *p* und *Nn*, welche in die geschlängelte Rinne hineingreifen, wird die drehende Bewegung des Zeigers *F*, welcher die Scheibe *M* gleichmässig folgt, auf die beiden Hebel übertragen und diese machen jedesmal 26 Schwingungen um ihre Drehachse, während der Zeiger *F* eine volle Umdrehung macht. Der Hebel *p* dreht sich um die Achse 3 und seine federnde Zunge liegt entweder an der Stellschraube *q* an oder nicht, je nachdem der Stift *a* in einem gegen die Drehachse convexen oder concaven Bauche der Rinne steht. Der zweite Hebel besteht aus zwei Theilen *N* und *n*, welche bei *O* durch ein Elfenbeincharnier derartig verbunden sind, dass ein elektrischer Strom niemals von *N* auf *n* oder von ihnen auf die Scheibe *M* übergehen kann und umgekehrt; der längere Theil *N* dieses Hebels dreht sich um die Achse 1 und liegt mit seiner stählernen Zunge bald an der Stellschraube *m*, bald an der Stellschraube *l* an, während der kürzere Theil *n* sich um die Drehachse 2 dreht und mit seiner Stahlzunge sich an die Stellschraube *s* anlegt oder von ihr absteht. Die beiden Hebel *Nn* und *p* sind übrigens ganz von Metall. Die punktirten Linien in Fig. 24 bedeuten in die nichtleitende Fussplatte des Schlüssels eingelegte Metallstreifen, durch welche die einzelnen Theile in leitende Verbindung gesetzt sind. Jeder Schlüssel kann zum Sprechen nach zwei Seiten hin dienen, und es münden die von zwei verschiedenen Stationen kommenden Luftleitungen in *L* und *L* ein, während die Erdleitung von der Klemme *T* abgeht; die Klemmen *R* und *R* führen zu dem Receptor, die Klemmen *S* und *S* zu dem Wecker, und es ist die eine Luftleitung über *R* mit dem Receptor, die andere über *S* mit dem Wecker verbunden; werden endlich die beiden um *L* und *L* drehbaren Hebel auf den mit der Aufschrift „Durchsprechen" bezeichneten Metallstreifen gestellt, so können die beiden Stationen, von denen die Luftleitungen in *L* und *L* einmünden, mit einander correspondiren, ohne dass die dazwischen liegende Station, durch deren Schlüssel sie hindurchsprechen, die Zeichen sieht; letztere ist also ausgeschlossen. Aus Fig. 24, Taf. VII, ist zugleich ersichtlich, dass der Zinkpol *Z* der Linienbatterie und somit auch die Drehachse des Zeigers *F* mit der Drehachse 2 des Hebels *n*, dass hingegen der Kupferpol *C* mit der Drehachse 1 des Hebels *N*, dass ferner die Stellschraube *m* über *E* mit der in *L* einmündenden Luftleitung, die Stellschrauben *l* und *s* aber mit der

Erdleitung *T*, dass endlich die Drehachse 3 des Hebels *p* mit *E* und die Stellschraube *q* mit den Klemmen *R* in leitender Verbindung steht.

In der Ruhelage des Schlüssels nun steckt der Metallstift *i* in einem mit Elfenbein ausgekleideten Loche des Zifferblattes rechts neben dem Kreuze, im ersten Viertel des Zwischenraumes zwischen dem Kreuze und dem Buchstaben *A*; der Hebel *p* liegt an der Stellschraube *q*, die Hebel *N* und *n* stehen in einer geraden Linie, so dass sie an keiner der Stellschrauben *m*, *l* und *s* anliegen. Es kann in dieser Stellung zwar ein von einer der Nachbarstationen kommender Strom, wenn der Hebel *L* auf *E* (oder *R*) steht, über 3, *p* und *q* (oder unmittelbar) nach *R* und von da zu dem Receptor, oder wenn der Hebel *L* auf *S* gestellt ist, unmittelbar zum Wecker gelangen und dort telegraphische Zeichen erscheinen lassen; dagegen kann in dieser Stellung kein Strom von der Linienbatterie in die Luftleitung gesendet werden. Der Apparat ist mithin wohl zum Empfangen, aber nicht zum Geben bereit. Genau ebenso verhält es sich auch, wenn bei der Umdrehung des Zeigers *F* der Stift *i* eben über einen Buchstaben hinweggegangen ist und sich in dem ersten Viertel des Zwischenraumes zwischen irgend zwei Buchstaben befindet. Wenn dagegen der Stift *i* bei der Umdrehung des Zeigers *F* über einen der Striche zu stehen kommt, welche die Felder je zweier Buchstaben von einander trennen, so geht der Hebel *p* von der Stellschraube *q* hinweg, aber die Hebel *N* und *n* liegen jetzt an den Stellschrauben *m* und *s* und es geht somit ein (positiver) Strom vom Kupferpol *C* der Linienbatterie über 1, *N*, *m*, *E*, den noch auf *E* gestellten Hebelarm *EL* und *L* in die Luftleitung, nach der nächsten Station und kommt von da durch die Erde über *T*, *s* und 2 zum Zinkpole *Z* zurück. Wenn endlich der Zeiger *F* mitten über dem Felde eines Buchstabens, also gleichzeitig auch der Stift *i* über einem der Randeinschnitte des Zifferblattes *K* steht, so liegt der Hebel *N* an *l*, wogegen die Hebel *n* und *p* von den Stellschrauben *s* und *q* entfernt sind; so lange dabei der Zeiger *F* nicht niedergedrückt ist, ist zwar der Kupferpol *C* mit der Erde verbunden, der Zinkpol *Z* dagegen ist isolirt und es kann wieder kein Strom in die Luftleitung geschickt werden; sowie aber der Zeiger *F* niedergedrückt wird, legen sich die Federn *r* auf das Zifferblatt *K* auf, es ist durch die Federn *r* und den in einen Ausschnitt eingetretenen Stift *i* die metallische Verbindung zwischen der Achse des Zeigers und dem Zifferblatte hergestellt und es geht ein (negativer) Strom vom Zinkpole *Z* über *F*, *r*, *K*, *Q* und *L* in die Luftleitung, zur nächsten Station und kehrt durch die Erde über *T*, *l*, *N* und 1 zu dem Kupferpole *C* zurück.

Bei dem Fortschreiten des Zeigers *F* über dem Zifferblatte *K* sendet also der Schlüssel jedesmal einen positiven Strom in die Linie, wenn der Zeiger von einem Buchstaben zum andern weiter geht, und dieser Strom wird sogleich wieder unterbrochen, wenn der Zeiger seinen Weg noch weiter fortsetzt; diese Aufeinanderfolge positiver Ströme wird zum

Einstellen des Typenrades auf der Empfangsstation benutzt. Wird dagegen der Zeiger F, während er mitten über einem Buchstaben steht, niedergedrückt, so wird ein negativer Strom in die Linie gesendet, so lange F niedergedrückt bleibt, und dieser negative Strom veranlasst auf der Empfangsstation das Aufdrucken des eingestellten Buchstabens auf das Papier.

B. Der Receptor ist für gewöhnlich zum Schutz gegen Staub etc. in ein hölzernes Kästchen eingeschlossen; er ist in Fig. 25, Taf. VII, in der Vorderansicht (aus dem hölzernen Kästchen herausgenommen), in Fig. 26 in der Rückansicht abgebildet, und Fig. 27 zeigt einen Verticalschnitt nach der Linie WZ in Fig. 25. Der Strom, welcher von der telegraphirenden Station kommt, geht durch die Multiplicationsrollen A eines Elektromagnetes; da aber die Eisenkerne in den beiden Rollen nicht zu einem Hufeisen verbunden sind, so erhalten sie bei der Magnetisation vier Pole und der Strom wird nun so durch die Rolle geführt, dass die nach derselben Seite vorstehenden Enden der Kerne durch den Strom entgegengesetzte magnetische Polarität bekommen; zu beiden Seiten des Elektromagnetes stehen als Anker zwei hufeisenförmige Stahlmagnete E und E_{11} welche so magnetisirt und so mit ihren Drehachsen j und h in den Rahmen Y eingelagert sind, dass die beiden Schenkel von E die gleichnamige, die Schenkel von E_1 aber die entgegengesetzte magnetische Polarität von der, welche der positive Linienstrom in dem jedem Ankerschenkel gegenüberstehenden Kernende hervorruft. Für gewöhnlich liegen die beiden magnetischen Anker E und E_1 in Folge ihrer magnetischen Anziehung gegen die eisernen Kerne der Rollen an den Kernen an. Geht ein positiver Strom durch die Rollen, so entstehen in den Kernen den Schenkeln von E_1 gegenüber entgegengesetzte Magnetpole und E_1 wird desshalb von den Kernen nur um so stärker angezogen und festgehalten; die den Schenkeln von E gegenüber liegenden Enden der Kerne werden gleichnamig magnetisch, desshalb wird der Anker E abgestossen, der an ihm befindliche Ansatz e dreht durch die Gabel d eine Welle um, auf welcher ein geschlitzter Flügel c (Fig. 28, Taf. VII) sitzt; dabei kommt das 26zähnige Echappementrad b in den Schlitz des Flügels zu stehen und nun kann das Uhrwerk, dessen Feder in dem Federhause C befindlich ist, das Echappementrad um einen halben Zahn fortrücken, nämlich bis es an einen vorstehenden Stift an dem Hebel f anstösst, dessen linker Arm durch ein Stäbchen mit dem Flügelansatz c' an der Welle des Flügels c verbunden ist und bei der Umdrehung der Welle gesenkt wird; bei der darauf folgenden Unterbrechung des Stromes führt die Feder g, unterstützt von der Anziehung des magnetischen Ankers E gegen die entmagnetisirten Kerne, den Ansatz e in seine frühere Lage zurück und das Echappementrad b rückt abermals um einen halben Zahn fort. Bei jedem Spiele des Ankers E rückt also das Echappementrad b um einen ganzen Zahn weiter und mit ihm gleichzeitig und in gleichem Schritte der Zeiger a auf dem Zifferblatte K (Fig. 27) und

das Typenrad k, welche auf derselben Achse mit b sitzen, um einen Buchstaben; alle drei folgen mithin genau dem Fortrücken des Zeigers F über dem Zifferblatte K (Fig. 23 und 24) des Zeichengebers. Das Echappementrad kann man aber auch durch einen Druck auf den Knopf P fortrücken lassen; denn wenn man den Knopf P niederdrückt, so wird durch die Stange p der Arm f und der Flügelansatz c' an der Welle des Flügels c abwärts bewegt, wodurch das Echappementrad in den Schlitz des Flügels c gestellt wird, und das Echappementrad kann jetzt um einen halben Zahn fortrücken, bis es an den vorstehenden Stift an dem andern Arme des Hebels f anstösst; wird der Knopf P und die Stange p durch die daran befindlichen Spiralfedern wieder gehoben, so schreitet das Echappementrad abermals um einen halben Zahn weiter; man hat demnach die Füglichkeit, das Typenrad k und den damit verbundenen Zeiger a zu jeder Zeit auf einen bestimmten Buchstaben oder auf das Kreuz einzustellen.

Geht dagegen ein negativer Strom durch die Multiplicationsrollen des Elektromagnetes A, so wird der Anker E festgehalten und der durch das Gegengewicht X äquilibrirte Anker E_1 abgestossen und der letztere legt sich jetzt an die Stellschrauben v an; da nun der Anker E_1 selbst mit dem einen Pole, die Contactschrauben v aber mit dem andern Pole einer Localbatterie in Verbindung steht, so ist der Kreis dieser Localbatterie jetzt geschlossen, der in den Localkreis eingeschlossene Elektromagnet A_1 zieht seinen Anker B an, das andere Ende B_1 des Ankerhebels geht in die Höhe und drückt durch das Hämmerchen m den Papierstreifen T fest an den ihm gerade gegenüberstehenden eingestellten Buchstaben des Typenrades k. Der Papierstreifen T kommt von der Rolle S über die Führungswalzen s und q an dem Typenrade k vorbei und wird durch die Walzen t und t' (Fig. 26, Taf. VII), deren Druck durch das bewegliche Gewicht U regulirt wird, durch ein Paar von dem Hebelarm B_1 bei dessen Hin- und Rückgange in Bewegung gesetzte Sperrräder und Sperrkegel nach jedem Aufdrucken eines Buchstabens um die Breite eines Buchstabens fortgerückt. Das Typenrad enthält auf seinem Umfange die 25 Buchstaben des Alphabetes und ein leeres Feld; die Typen werden durch die sich dagegen anstemmende Schwärzwalze l mit Druckfarbe versehen.

Während also der Telegraphist auf der telegraphirenden Station den Zeiger F des Schlüssels, natürlich stets in derselben Richtung des Drehens, über das Zifferblatt hinführt, bis er über dem zu telegraphirenden Buchstaben steht, macht auf der Empfangsstation der Zeiger a und das Typenrad k die Bewegung gleichzeitig und in gleichem Schritte mit; der Zeiger a bleibt über dem zu telegraphirenden Buchstaben stehen, das Typenrad k ist darauf eingestellt, und wenn der Telegraphist den Zeiger F niederdrückt, so wird der eingestellte Buchstabe auf den Papierstreifen aufgedruckt. Soll der eingestellte Buchstabe mehrere Male hintereinander gedruckt werden, wie z. B. in dem Worte „Schnellläufer" die drei „l", so braucht der Tele-

graphist blos den Zeiger *F* dreimal nach einander nieder zu drücken, ohne ihn dazwischen weiter zu drehen. Die Zwischenräume zwischen zwei Wörtern erzeugt man durch Einstellen auf das Kreuz und Niederdrücken des Zeigers *F*. Will man eine doppelte Ausfertigung der Depesche, so braucht man nur zwei Typenräder neben einander auf derselben Achse anzubringen, ihnen zwei Hämmer gegenüber zu stellen, welche die beiden eingestellten gleichlautenden Buchstaben auf einen breiteren Papierstreifen aufdrucken, worauf der Streifen mitten durchgeschnitten wird und auf jeder Hälfte die Originaldepesche enthält.

Bei den Versuchen mit diesem Typendrucktelegraph konnte man bei Einschaltung in eine ziemlich lange Leitung 45 Buchstaben in der Minute drucken.

Bei einem vergleichenden Rückblick auf die beschriebenen verschiedenen Typendrucktelegraphen findet man die Vorzüge sehr vertheilt und zerstreut. Die erste Classe derselben steht wegen der schwer auf Dauer zu erhaltenden Gleichförmigkeit im Gange mehrerer Uhrwerke an Zuverlässigkeit und bei jedesmaliger Einstellung auf den Nullpunkt (Theiler) auch an Leistungsfähigkeit den beiden andern Classen nach, obwohl bei ihnen gerade der eigentlich telegraphische Apparat einfacher ist. Auch die Typendrucktelegraphen der zweiten Classe, bei welchen der Gang der Uhrwerke durch Stromwirkungen regulirt wird, sind offenbar noch nicht einfach genug; theils ist ein zusammengesetzter und desshalb leicht einmal den Dienst ganz versagender oder wenigstens nicht pünktlich genug vollziehender Zwischenmechanismus bei ihnen vorhanden; theils steht zu befürchten, dass einmal das Uhrwerk zwei Schritte auf einmal mache anstatt eines einzigen (namentlich bei dem von Du Moncel), ein ander Mal aber zu träg sei, besonders wenn die Ströme sehr kurz sind. Da aber überhaupt das Uhrwerk gänzlich entbehrt werden kann und bei seiner Weglassung die Zuverlässigkeit nur gewinnen wird, so gebührt wohl der dritten Classe der Vorzug; wären die Linienströme zu schwach, durch unmittelbare Hin- und Herbewegung des Echappements das schwerere Typenrad in Umdrehung zu versetzen, so darf man nur unter Vermittelung eines Relais die Bewegung des Echappements einem Localstrom übertragen; man wird dabei entweder ein Schliessungsrad oder einen ähnlichen Schlüssel, wie der beim Typendrucktelegraph von Digney beschriebene, verwenden, oder noch besser die Geschwindigkeit und Sicherheit des Fortrückens und Einstellens von dem Strome selbst reguliren und überwachen lassen unter Anwendung des Princips der Selbstunterbrechung (Siemens und Halske); das Aufdrucken endlich dürfte am einfachsten, sichersten und zuverlässigsten durch einen entgegengesetzten Strom oder durch einen stärkeren gleichgerichteten Strom herbeigeführt werden.

Kleinere Mittheilungen.

XXXVII. Integration einiger partiellen Differentialgleichungen. Von Prof. Dr. phil. ADOLPH STEEN in Kopenhagen.

1. Die partielle Differentialgleichung erster Ordnung zwischen drei Veränderlichen x, y, z:

$$1)\qquad z = px + qy + F(p, q),$$

wo $p = \frac{dz}{dx}$, $q = \frac{dz}{dy}$, ist hinsichtlich der Form mit der wohlbekannten Gleichung zweier Veränderlichen, $y = px + f(p)$, welche Clairaut auf die particulären Auflösungen geführt hat (*mém. de l'acad. des sc.* 1734), so verwandt, dass es sehr nahe liegt, die Integration nach vorhergehender Differentiation auszuführen. Da indessen meines Wissens eine solche Integrationsmethode nirgends angegeben ist, soll hiermit die Aufmerksamkeit darauf hingelenkt werden. Die vollständige primitive Gleichung sowohl als die particuläre Auflösung findet sich übrigens in Lacroix, *traité du calc. diff. et int. t. II. Paris* 1814, *p.* 668, und durch das von Chorpih in einer nicht gedruckten Abhandlung 1784 angegebene Verfahren wird ferner das von Lagrangue sogenannte allgemeine Integral gefunden (*mém. de Berlin* 1774, *p.* 247). Die nachfolgende Methode wird alle diese Gleichungen in ihrem natürlichen Zusammenhange darstellen und zugleich zeigen, dass das sogenannte allgemeine Integral eigentlich nur eine particuläre Auflösung ist, die ihren natürlichen Platz zwischen dem vollständigen Integral und der oben genannten particulären Auflösung findet.

2. Wird 1) differentiirt sowohl nach x als nach y, so erhält man

$$2)\qquad \begin{cases} 0 = rx + sy + \frac{dF}{dp} r + \frac{dF}{dq} s, \\ 0 = sx + ty + \frac{dF}{dp} s + \frac{dF}{dq} t, \end{cases}$$

wo die gewöhnlichen Zeichen r, s, t für $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ eingeführt sind.

Erstens werden nun die Gleichungen

3) $$\begin{cases} r=0, \quad s=0, \quad t=0 \\ \text{und somit} \\ p=a, \quad q=b \end{cases}$$

den Gleichungen 2) ein Genüge leisten. Hieraus entsteht das vollständige Integral

4) $$z=ax+by+F(a,b).$$

Dann, wenn 2) umgeschrieben wird in

5) $$\begin{cases} \left(x+\frac{dF}{dp}\right)r=-s\left(y+\frac{dF}{dq}\right), \\ \left(x+\frac{dF}{dp}\right)s=-t\left(y+\frac{dF}{dq}\right), \end{cases}$$

und daraus $x+\frac{dF}{dp}$, $y+\frac{dF}{dq}$ eliminirt, so entsteht

6) $$rt-s^2=0,$$

die wohlbekannte, den developpabeln Flächen eigenthümliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, die sich aus folgender Gleichung erster Ordnung

7) $$\varphi(p,q)=0 \quad \text{oder} \quad q=f(p)$$

findet, wo φ und f willkührliche Functionen darstellen. Die Gleichung 7) ist aber schon lange durch folgendes System integrirt worden:

8) $$\begin{cases} z=px+f(p)y+\int\psi(p)dp, \\ 0=x+f'(p)y+\psi(p), \end{cases}$$

wo p zu eliminiren ist. Dieses System wird demnach nur dann der gegebenen Gleichung Genüge leisten, wenn die erste 8) mit 1) übereinstimmt, folglich wenn

$$\int\psi(p)dp=F[p,f(p)].$$

Dadurch gehen die Gleichungen 8) in die folgenden über:

9) $$\begin{cases} z=px+f(p)y+F[p,f(p)], \\ 0=x+f'(p)y+\frac{dF}{dp}. \end{cases}$$

Denkt man sich nun die Elimination von p wirklich ausgeführt, indem das aus der letzteren Gleichung 9) gefundene p in die erstere eingesetzt wird, so muss die so gebildete Form der ersteren 9) das allgemeine Integral von 1) mit einer willkührlichen Function f darstellen. Zugleich gehört diese Gleichung der developpabeln Fläche an, die durch die bewegliche Ebene 4) erzeugt wird, b darin als abhängig von a betrachtet, $b=f(a)$ und namentlich so, dass man zufolge 3), 6) und 7)

10) $$\frac{da}{dx}\frac{db}{dy}-\frac{da}{dy}\frac{db}{dx}=0$$

hat. Sie ist demnach als eine particuläre Auflösung anzusehen.

Endlich leistet man 5) und somit 2) auch durch

11) $$x+\frac{dF}{dp}=0, \quad y+\frac{dF}{dq}=0.$$

Genüge. Die Elimination von p und q zwischen 1) und 11) giebt eine primitive Gleichung zwischen x, y, z ganz ohne willkührliche Constante oder Function, aber doch keinen besonderen Fall der Gleichungen 4) oder 9); das wird eine durchaus particuläre Auflösung sein. Die dieser Gleichung entsprechende Fläche wird zugleich von der Ebene 4) erzeugt, wenn a und b sich von einander unabhängig ändern, indem man erhält

$$x+\frac{dF}{da}=0, \quad y+\frac{dF}{db}=0,$$

welche mit 4) durch Elimination von a und b dasselbe giebt, als 1) und 11) durch Elimination von p und q. Die Gleichung 4) bestimmt daher die Tangentialebene beider letztgenannten Flächen.

3. Beispiel. Die Fläche zu bestimmen, deren Tangentialebene eine gegebene Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten hat.

Die Aufgabe in Gleichung gesetzt giebt

$$z=px+qy+n\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Davon ist das vollständige Integral [siehe 4)]

$$z=ax+by+n\sqrt{1+a^2+b^2},$$

einem Systeme ebener Flächen entsprechend, indem a und b willkührliche Constanten sind. Dagegen giebt die erstere 9) folgende particuläre Auflösung (allgemeines Integral):

$$z=ax+f(a)y+n\sqrt{1+a^2+f(a)^2},$$

wo a eine beliebige Function von x und y sein kann und $f(a)$ durch die letztere 9) bestimmt ist, nämlich

$$x+f'(a)y+\frac{na}{\sqrt{1+a^2+f(a)^2}}=0.$$

Diese Auflösung kann auch dargestellt werden durch

$$z=ax+by+n\sqrt{1+a^2+b^2},$$

wenn nur a und b Functionen von x und y sind, die der Gleichung 10) Genüge leisten. Dieses ist z. B. der Fall, wenn $a=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $b=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, welches folgende Kegelfläche giebt:

$$\left(z-n\sqrt{2}\right)^2=x^2+y^2.$$

Endlich wird die durchaus particuläre Auflösung aus 11) entstehen, indem aus

$$x+\frac{np}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=0, \quad y+\frac{nq}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=0$$

folgt

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=-\frac{n}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=\pm\sqrt{n^2-x^2-y^2},$$

und somit

$$p = \pm \frac{x}{\sqrt{n^2 - x^2 - y^2}}, \quad q = \pm \frac{y}{\sqrt{n^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \pm \frac{n}{\sqrt{n^2 - x^2 - y^2}}.$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in die gegebene Gleichung ergiebt sich die Gleichung der Kugel:

$$z = \mp \sqrt{n^2 - x^2 - y^2},$$

welche mit den oben genannten Kegeln umschrieben ist und die durch das vollständige Integral bestimmte Tangentialebene hat.

4. Die partielle Differentialgleichung

$$12)\quad F[x - \varphi_1(p, q), y - \varphi_2(p, q), z - \varphi_3(p, q)] = 0$$

ist der von Woisord (*Gergonne Ann. de math. t. XV*) behandelten Differentialgleichung zweier Veränderlichen

$$F[x - \varphi_1(p), y - \varphi_2(p)] = 0$$

sehr ähnlich. Während daher diese Gleichung sich integriren lässt, sobald nur

$$p\,\varphi_1'(p) = \varphi_2'(p),$$

so kann man die Integration von 12) zu Ende führen, wenn

$$13)\quad p\frac{d\varphi_1}{dp} + q\frac{d\varphi_2}{dp} = \frac{d\varphi_3}{dp}, \quad p\frac{d\varphi_1}{dq} + q\frac{d\varphi_2}{dq} = \frac{d\varphi_3}{dq},$$

und ferner, damit $\frac{d^2\varphi_3}{dq\,dp} = \frac{d^2\varphi_3}{dp\,dq}$ sei, wenn

$$14)\quad \frac{d\varphi_2}{dp} = \frac{d\varphi_1}{dq}.$$

Ebenso wie die Methode Clairaut's sich auf die Gleichung 1) anwenden lässt, so gilt dasselbe von der Methode Woisord's rücksichtlich der Gleichung 13), doch ist dabei zu bemerken, dass Woisord keine particuläre Auflösung seiner Gleichung gefunden hat, obschon eine solche sich ganz leicht darbietet und die Gleichung 12) auch zwei verschiedene Arten particulärer Auflösungen hat.

Durch Differentiation von 12) nach x findet sich

$$\frac{dF}{d(x - \varphi_1)}\left(1 - \frac{d\varphi_1}{dp}r - \frac{d\varphi_1}{dq}s\right) + \frac{dF}{d(y - \varphi_2)}\left(-\frac{d\varphi_2}{dp}r - \frac{d\varphi_2}{dq}s\right)$$
$$+ \frac{dF}{d(z - \varphi_3)}\left(p - \frac{d\varphi_3}{dp}r - \frac{d\varphi_3}{dq}s\right) = 0,$$

oder zufolge 13)

$$15)\quad \left(\frac{dF}{d(x - \varphi_1)} + p\frac{dF}{d(z - \varphi_3)}\right)\left(1 - r\frac{d\varphi_1}{dp} - s\frac{d\varphi_1}{dq}\right)$$
$$+ \left(\frac{dF}{d(y - \varphi_2)} + q\frac{dF}{d(z - \varphi_3)}\right)\left(-r\frac{d\varphi_2}{dp} - s\frac{d\varphi_2}{dq}\right) = 0,$$

und auf ähnliche Weise durch Differentiation nach y

$$15\text{a)}\quad \left(\frac{dF}{d(x-\varphi_1)}+p\frac{dF}{d(z-\varphi_3)}\right)\left(-s\frac{d\varphi_1}{dp}-t\frac{d\varphi_1}{dq}\right)$$
$$+\left(\frac{dF}{d(y-\varphi_2)}+q\frac{dF}{d(z-\varphi_3)}\right)\left(1-s\frac{d\varphi_2}{dp}-t\frac{d\varphi_2}{dq}\right)=0.$$

Diese Gleichungen 15) können nun erstens gelöst werden durch

$$16)\quad \begin{cases} r\dfrac{d\varphi_1}{dp}+s\dfrac{d\varphi_1}{dq}=1, & r\dfrac{d\varphi_2}{dp}+s\dfrac{d\varphi_2}{dq}=0, \\ s\dfrac{d\varphi_1}{dp}+t\dfrac{d\varphi_1}{dq}=0, & s\dfrac{d\varphi_2}{dp}+t\dfrac{d\varphi_2}{dq}=1, \end{cases}$$

oder, indem in den beiden ersteren $r=\frac{dp}{dx}$, $s=\frac{dq}{dx}$, und in den beiden letzteren $s=\frac{dq}{dx}$, $t=\frac{dq}{dy}$ gesetzt wird,

$$17)\quad \frac{d\varphi_1}{dx}=1,\quad \frac{d\varphi_1}{dy}=0,\quad \frac{d\varphi_2}{dx}=0,\quad \frac{d\varphi_2}{dy}=1.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man

$$18)\quad \begin{cases} \varphi_1(p,q)=x-c_1, \\ \varphi_2(p,q)=y-c_2, \end{cases}$$

welche wiederum mittels 12)

$$18\text{a)}\quad \varphi_3(p,q)=z-c_3$$

geben, indem die drei Constanten durch folgende Gleichung verbunden sind:

$$19)\quad F(c_1,c_2,c_3)=0.$$

Die Elimination von p und q aus 18) giebt eine primitive Gleichung zwischen x, y, z und drei Constanten, die wegen 19) nur für zwei zu rechnen sind. Dieses Resultat ist das vollständige Integral von 12), welches natürlicher Weise auch gefunden wird, wenn man aus den beiden ersteren 18) Ausdrücke für p und q durch $x-c_1$ und $y-c_2$ findet und diese in 12) substituirt. Das vollständige Integral nimmt dann folgende Form an:

$$F[x-\psi_1(x-c_1,y-c_2),\ y-\psi_2(x-c_1,y-c_2),\ z-\psi_3(x-c_1,y-c_2)]=0.$$

Ferner leistet das Integral der durch Elimination der Differentialcoefficienten von F in 15) entstandenen partiellen Differentialgleichung

$$20)\quad \frac{d\varphi_1}{dp}r+\left(\frac{d\varphi_1}{dp}+\frac{d\varphi_2}{dq}\right)s+\frac{d\varphi_2}{dq}t+(s^2-rt)\left(\frac{d\varphi_1}{dp}\frac{d\varphi_2}{dq}-\frac{d\varphi_1}{dq}\frac{d\varphi_2}{dp}\right)=1$$

auch den Gleichungen 15) Genüge. Die Integration dieser Gleichung 20) ist aber meines Wissens noch nicht gefunden; man muss sich folglich auf die Bemerkung beschränken, dass sich durch ihre Integration eine primitive Gleichung mit willkührlichen Functionen findet, die als **eine particuläre Auflösung** von 12) anzusehen ist, ebenso wie die erstere 9) eine solche Auflösung von 1) war. Denkt man sich die Integration von 20) so ausgeführt, dass zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung (mit x, y, z, p, q und willkührliche Functionen) entstehen, so wird die Elimination von p und q aus diesen und 12) die particuläre Auflösung mit einer

geringeren Anzahl willkührlicher Functionen darstellen, als eine nochmalige Integration geben würde.

Endlich ist 15) aufgelöst durch

$$21)\quad \begin{cases} \dfrac{dF}{d(x-\varphi_1)} + p\dfrac{dF}{d(z-\varphi_3)} = 0, \\ \dfrac{dF}{d(y-\varphi_2)} + q\dfrac{dF}{d(z-\varphi_3)} = 0, \end{cases}$$

aus welchen in Verbindung mit 12) sich wiederum durch Elimination von p und q die durchaus particuläre Auflösung ohne willkührliche Constanten oder Functionen ergiebt.

5. Die Theorie der parallelen Flächen giebt ein gutes Beispiel *). Es sei $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ die Gleichung einer gegebenen Fläche; eine Kugel mit ihrem Mittelpunkte in der Fläche und mit unveränderlichem Halbmesser hat die Gleichung

$$A)\quad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = a^2.$$

Die mit der gegebenen parallele Fläche wird gefunden durch Elimination von α und β zwischen A) und ihren partiellen Differentialgleichungen

$$B)\quad \begin{cases} x-\alpha + (z-\gamma)\dfrac{d\gamma}{d\alpha} = 0, \\ y-\beta + (z-\gamma)\dfrac{d\gamma}{d\beta} = 0. \end{cases}$$

Wird aber A) nach x und y differentiirt, erhält man

$$C)\quad \begin{cases} x-\alpha + (z-\gamma)p = 0, \\ y-\beta + (z-\gamma)q = 0, \end{cases}$$

und somit

$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = p, \quad \frac{d\gamma}{d\beta} = q,$$

welche zeigen, dass parallele Flächen auch parallele Tangentialebenen und gemeinschaftliche Normalen haben müssen. Gebraucht man nun C) für B), so erhält man

$$D)\quad \frac{z-\gamma}{-1} = \frac{y-\beta}{q} = \frac{x-\alpha}{p} = \pm\frac{a}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

folglich

$$E)\quad \begin{cases} z-\gamma = \mp\dfrac{a}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad y-\beta = \pm\dfrac{aq}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \\ x-\alpha = \pm\dfrac{ap}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \end{cases}$$

Die hieraus gefundenen Ausdrücke für α, β, γ, in die gegebene Gleichung der Fläche gesetzt, geben die partielle Differentialgleichung der parallelen Fläche:

---

*) Vergl. 3. Heft dieses Jahrgangs der gegenwärtigen Zeitschrift, wo Herr Dr. Cantor die Theorie der parallelen Curven in Verbindung mit Woisord's Gleichung dargestellt hat.

$$\text{F)}\quad F\left(x \mp \frac{ap}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\ y \mp \frac{aq}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\ z \pm \frac{a}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0.$$

Diese Gleichung hat die durch 12) angegebene Form und die Bedingungen 13) und 14) gelten. Das vollständige Integral wird nach 18) und 19) so bestimmt:

$$\pm \frac{ap}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = x - c_1, \quad \pm \frac{aq}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = y - c_2,$$

$$\mp \frac{a}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = z - c_3,$$

oder

$$\text{G)}\quad \frac{x-c_1}{p} = \frac{y-c_2}{q} = \frac{z-c_3}{-1} = \pm \frac{a}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

folglich

$$\text{H)}\quad (x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 + (z-c_3)^2 = a^2,$$

wo doch

$$F(c_1, c_2, c_3) = 0.$$

Dieses stimmt völlig mit A), der Gleichung der erzeugenden Fläche, überein.

Der Gleichung 9) entspricht

$$\frac{a[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]}{\pm(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(s^2-rt)a^2}{(1+p^2+q^2)^2} = 1,$$

oder

$$(s^2-rt)a^2 \pm [(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]a\sqrt{1+p^2+q^2} - (1+p^2+q^2) = 0.$$

Diese Gleichung lehrt, dass F) allen den Flächen angehört, bei welchen einer der Krümmungshalbmesser constant ist; ihre Gleichungen sind alle particuläre Auflösungen von F).

Die durchaus particulären Auflösungen lassen sich nicht darstellen, so lange die durch $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ bestimmte Fläche oder die Function F unbekannt ist.

XXXVIII. Berichtigung. Im 3. Hefte des 5. Jahrgangs dieser Zeitschrift findet sich S. 215 u. f. eine Beurtheilung der bis jetzt üblichen Auflösungen der Aufgaben über Verlegung der Zahlungstermine, mittlere Zahlungstermine und Gesellschaftsrechnungen von Herrn Dr. Schlechter. Darin wird S. 218 mein Werk über politische Arithmetik (Anleitung zu finanziellen, politischen und juridischen Rechnungen) angeführt und bemerkt: dass dessen Verfasser selbst keine Aufgabe über mittlere Zahlungstermine, welche zwar in einem solchen Werke nicht fehlen sollten, löst, sich aber, gestützt auf die Ansicht vieler Gelehrten, dahin ausspricht, dass jeweils bei unverzinslichen Capitalien, die erst später zu entrichten sind,

der Werth der Nutzniessung angegeben werden müsse, denn sonst könnte die Mathematik solche Aufgaben nicht lösen.

Auf die hierin enthaltenen Unrichtigkeiten sehe ich mich veranlasst, Folgendes zu entgegnen.

Die Behauptung, dass in meinem Werke keine Aufgabe über mittlere Zahlungstermine gelöst ist, widerspricht dem Thatbestand, denn auf S. 22, §. 15 desselben ist diese Aufgabe durch die Rechnung mit einfachen Zinsen (auf die gewöhnliche Methode) und in §. 40, S. 97, durch die mit Zinses-Zinsen gelöst. Beide Fälle sind auch im Inhaltsverzeichniss aufgeführt, und S. 98, §. 40, ist sogar bemerkt, dass die Rechnung mit einfachen Zinsen auf ein unrichtiges Resultat, die mit Zinses-Zinsen aber auf das richtige Resultat führe. Die fragliche Aufgabe fehlt daher in meinem Werke nicht und die Behauptung des Herrn Dr. Schlechter wird sich wohl schwer aufrecht erhalten oder rechtfertigen lassen.

Der noch weiter beigefügte Satz findet sich unter der hier gegebenen Fassung nirgends in meinem Werke. Im 4. Capitel, wo die richtige Berechnung des Interusuriums, bekanntlich eine langjährige Streitfrage, besprochen wird, habe ich ganz gelegentlich die sich von selbst verstehende Bemerkung gemacht, dass auch der Werth der Nutzniessung des Schuldners in Berechnung gezogen werden müsse, was bisher nicht geschah, ihr aber keine weitere als eine sekundäre Bedeutung, oder gar ein besonderes Gewicht, beigelegt. Ebenso unrichtig ist die Behauptung, dass ich mich auf die „Ansicht vieler Gelehrten" stütze, sowie der darauf noch folgende Beisatz, denn ich habe mich einzig und allein auf die Resultate des Calculs, und zwar im Gegensatze mit der Ansicht vieler Gelehrten (vgl. §. 49, S. 119 u. ff. meines Werks), als die einzige, in der Mathematik geltende Basis gestützt.

Ich habe nämlich §§. 28—30, S. 56 u. ff., §§. 44—49, S. 103 u. ff., sowie in der Vorrede S. VI m. Werks das Verhältniss zwischen der Rechnung mit einfachen und der mit Zinseszinsen ausführlich erörtert und als Ergebniss hiervon den allgemeinen Satz (S. 69) gefunden und bewiesen:

„Werden die Kapitalzahlungen $k_1, k_2, k_3 \ldots k_n$ in beliebigen Zeitabschnitten gemacht und soll ihr Werth auf die Gegenwart oder auf jeden beliebigen Zeitpunkt (also auch auf mittlere Zahlungstermine) zurückgeführt werden, so muss dies unter folgenden Bedingungen geschehen:

1. Der Rechnung müssen Zinseszinsen, nicht aber einfache Zinsen zu Grunde gelegt werden.
2. Die Rabattirung muss in den Zeitabschnitten gemacht werden, worin die Zahlungen geschehen.
3. Zinsfuss und Verzinsung hängen von der Uebereinkunft ab, dürfen aber, einmal festgestellt, nicht mehr willkührlich von dem Rechner abgeändert werden."

Diese Bestimmungen stützen sich nicht auf die Ansichten der Gelehrten, welche über politische Arithmetik geschrieben haben, sondern stellen sich ihnen gegenüber; namentlich No. 1 der Ansicht Hoffmann's, von Clausberg's, Michelsen's, Brune's, Schwein's u. A. m., welche die Rechnung mit einfachen oder Zinseszinsen der freien Wahl oder andern Motiven überlassen wollen (vgl. S. 126 u. f. m. Werks), und No. 3 der Ansicht von Tetens und Meyer, welche häufig mit dem conformen Zinsfuss rechnen, statt mit dem relativen, was gleichfalls zu unrichtigen Resultaten führt.

Man sollte erwarten, dass Jemand ein Werk, worüber er schreibt, gelesen und mindestens richtig aufgefasst hat. Bei dem vorliegenden Thatbestand kann man sich aber der Vermuthung nicht erwehren, dass Herr Dr. Schlechter die einschlagenden Stellen und Paragraphen meines Werks, worüber er ein so unrichtiges und unbegründetes Urtheil fällt, gar nicht kennt, wenigstens, wenn er sie kennt, nicht richtig aufgefasst hat. Er hätte sonst zu einem ganz andern Resultate gelangen müssen, als wozu er gelangte. Nach dem von mir gegebenen Nachweis ist nämlich die von Herrn Dr. Schlechter in 20 Nummern gegebene und so hoch belobte Auflösung gerade so falsch und unrichtig, als die von ihm bekämpfte, denn sie beruht auf der Rechnung mit einfachen Zinsen, die in der von ihm gebrauchten Anwendung immer auf ein unrichtiges Resultat führt und führen muss, obgleich er sie als gleichsam bahnbrechend, angeblich einzig richtige und auf innern Gründen beruhende erklärt. Von der Richtigkeit des Gesagten kann sich Jeder überzeugen, der ein Zahlenbeispiel nach der von Dr. Schlechter angegebenen Methode berechnet, die Forderung des Schuldners und Gläubigers fest und einander gegenüber stellt und Schritt für Schritt durch Rechnung prüft.

Freiburg i. B., im Juli 1860. Dr. L. Oettinger.

XXXIX. Ueber den Satz vom Parallelogramm der Kräfte. In dem speciellen Falle, wo die Richtungen zweier auf einen Punkt wirkenden Kräfte einen rechten Winkel einschliessen, ist es bekanntlich sehr leicht, die Grösse der Resultante $R=\sqrt{P^2+Q^2}$ zu finden, dagegen verursacht die Bestimmung ihrer Lage einige Mühe*) und führt immer auf eine

*) In der Vorrede zu Dr. Wernicke's Lehrbuch der Mechanik, Braunschweig 1858, wird ein von Dr. Stader in Berlin herrührender Beweis mitgetheilt, der darauf hinausläuft, das Parallelogramm der Kräfte „durch sich selbst zu beweisen", also nachzuweisen, dass die Annahme des Satzes keinen Widerspruch involvirt. Abgesehen von dem Einwurfe, dass auf diesem Wege höchstens die Möglichkeit, keineswegs aber die Nothwendigkeit eines Theoremes gezeigt werden kann, ist der Stader'sche (ohnehin etwas unklar gefasste) Beweis auch in so fern völlig ungenügend, als er wörtlich derselbe bleiben würde, wenn man ein beliebiges anderes Viereck mit gleich grosser Diagonale statt des Parallelogrammes oder speciell Rechtecks nehmen wollte,

Functionalgleichung; auch scheint sich letztere nicht gut vermeiden zu lassen, da in der That der Winkel zwischen P und R eine unbekannte Function des Verhältnisses $\frac{Q}{P}$ ist. Unter diesen Umständen bleibt, wenn man keine fremden Angriffspunkte zu Hülfe nehmen will, nichts weiter übrig, als jene Functionalgleichung möglichst einfach zu gestalten und sie durch elementare Mittel aufzulösen. Das Folgende enthält einen Versuch dieser Art, welcher auf einem neuen Grundgedanken beruht. (Fig. 29, Taf. VII.)

Man denke sich im Raume drei auf einen Punkt wirkende gegen einander senkrechte Kräfte, welche durch die Geraden $OA = X$, $OB = Y$, $OC = Z$ dargestellt werden mögen, und es sei OD die Resultante von X und Y, ferner OE die Resultante von Y und Z, endlich OF die Resultante aller drei Kräfte X, Y, Z. Die letzte Resultante kann man auf zwei verschiedene Weisen bilden; leitet man sie aus OD und OC her, so muss sie in der Ebene DOC liegen, betrachtet man sie dagegen als entstanden aus OA und OE, so gehört sie der Ebene AOE an; sie fällt daher in den Durchschnitt der genannten Ebenen. Zwischen den Winkeln AOD, BOE, AOF besteht nun die Relation

$$\tan AOF = \frac{FG}{OG} = \frac{GH:OG}{GH:FG} = \frac{\tan AOD}{\cos BOE}$$

oder

$$\tan AOF = \tan AOD \,.\, \sqrt{1 + \tan^2 BOE},$$

und diese führt unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die Grösse von OE bekannt und $= \sqrt{Y^2 + Z^2}$ ist, zu folgendem Satze:

Wenn der Winkel, welchen die Resultante zweier rechtwinklig auf einen Punkt wirkenden Kräfte P und Q mit der ersten Kraft P einschliesst, immer durch (P, Q) bezeichnet wird, so gilt die Gleichung

$$1) \qquad \tan (X, \sqrt{Y^2 + Z^2}) = \tan (X, Y) \,.\, \sqrt{1 + \tan^2 (Y, Z)}.\text{*)}$$

In dem speciellen Falle, wo die beiden Componenten gleich sind, kennt man die Richtung der Resultante; für $X = Y = Z$ ist nämlich $\angle (X, Y) = \angle (Y, Z) = 45^0$, mithin nach No. 1)

$$\tan (X, X\sqrt{2}) = \sqrt{1 + \tan^2 45^0} = \sqrt{2}.$$

---

wodurch man die in Theil II, S. 88, der Zeitschrift benutzte Figur erhalten würde. Ueberhaupt ist der Stader'sche Beweis identisch mit der dort erwähnten ersten Hälfte des Lambert'schen Beweises; die Richtung der Resultante hat der Verfasser ganz willkührlich angenommen.

*) Dies ist in der That eine Functionalgleichung. Setzt man nämlich

$$\tan (X, Y) = f\left(\frac{Y}{X}\right) = f(y), \quad \tan (Y, Z) = f\left(\frac{Z}{Y}\right) = f(z),$$

und dem entsprechend

$$\tan (X, \sqrt{Y^2 + Z^2}) = f\left(\frac{\sqrt{Y^2 + Z^2}}{X}\right) = f\left(\frac{Y}{X}\sqrt{1 + \frac{Z^2}{Y^2}}\right) = f(y\sqrt{1 + z^2}),$$

so nimmt die obige Gleichung folgende Gestalt an:

$$f(y\sqrt{1+z^2}) = f(y)\sqrt{1 + [f(z)]^2}.$$

Nehmen wir ferner in No. 1) $Y = X$ und der Reihe nach $Z = X\sqrt{2}$, $X\sqrt{3}$, $X\sqrt{4}$ etc., so erhalten wir bei fortwährender Substitution von jeder Gleichung in die folgende

$$tan\,(X, X\sqrt{3}) = \sqrt{1 + tan^2(X, X\sqrt{2})} = \sqrt{3},$$
$$tan\,(X, X\sqrt{4}) = \sqrt{1 + tan^2(X, X\sqrt{3})} = \sqrt{4}$$

u. s. w.

Ueberhaupt ist, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet,

$$tan\,(X, Xn) = n = \frac{Xn}{X}$$

oder in anderen Buchstaben

$$2) \qquad tan\,(U, V) = \frac{V}{U},$$

vorausgesetzt, dass V ein Vielfaches von U beträgt.

In der Gleichung 1) substituiren wir ferner $X = P$, $Y = Q$, $Z = Q$, $Q\sqrt{2}$, $Q\sqrt{3}$, $Q\sqrt{4}$ etc. und erhalten

$$tan\,(P, Q\sqrt{2}) = tan\,(P, Q)\,.\,\sqrt{2},$$
$$tan\,(P, Q\sqrt{3}) = tan\,(P, Q)\,.\,\sqrt{1 + tan^2(Q, Q\sqrt{2})} = tan\,(P, Q)\,.\,\sqrt{3},$$
$$tan\,(P, Q\sqrt{4}) = tan\,(P, Q)\,.\,\sqrt{1 + tan^2(Q, Q\sqrt{3})} = tan\,(P, Q)\,.\,\sqrt{4}$$

u. s. w.,

überhaupt, wenn m eine ganze positive Zahl bezeichnet,

$$tan\,(P, Qm) = tan\,(P, Q)\,.\,m$$

und umgekehrt

$$3) \qquad tan\,(P, Q) = \frac{tan\,(P, mQ)}{m}.$$

Bei zwei Kräften, die sich wie die ganzen Zahlen m und n verhalten, ist mQ ein Vielfaches von P, nämlich $mQ = nP$, mithin nach No. 2) $tan\,(P, mQ) = \frac{mQ}{P} = n$, folglich nach No. 3)

$$4) \qquad tan\,(P, Q) = \frac{n}{m} = \frac{Q}{P}.$$

Hiermit ist die Lage der Resultante für alle rechtwinklig zu einander wirkenden Kräfte bestimmt, deren Intensitäten in rationalem Verhältnisse stehen; bei irrationalen Verhältnissen benutzt man die bekannte Methode der Einschliessung in rationale, einander immer näher rückende Grenzen. Ebenso wenig braucht hier erörtert zu werden, wie nachher der allgemeine Fall zu behandeln ist, wo P und Q einen beliebigen Winkel einschliessen. (Aus den Sitzungsberichten der K. S. Gesellschaft der Wissensch. 1. Juli 1860.)

Schlömilch.

XL. Bemerkung zu einer Stelle der Mécanique céleste. Von August Murmann, Assistent an der Sternwarte zu Wien. In der Ableitung der Attractionsgesetze, nach welchen die Wirkung einer Kugelschale auf einen ausserhalb derselben gelegenen Punkt gleich ist derjenigen der im Mittelpunkt der Kugelschale vereinigt gedachten Masse derselben, gelangt Laplace zu folgender Gleichung (*méc. cél.* II, 12):

$$\text{D)}\quad 2\pi\,.\,u\,du\,.\left[\frac{d\left(\frac{1}{r}\left[\psi(r+u)-\psi(r-u)\right]\right)}{dr}\right]=4\pi\,.\,u^2du\,.\,\varphi(r);$$

hierin bedeuten u den Halbmesser der Kugelschale, du deren Dicke, r den Abstand des angezogenen Punktes vom Mittelpunkt der Kugelschale, φ das zu ermittelnde Attractionsgesetz, ψ eine Function, die aus φ auf folgende Weise erhalten wird:

$$\psi(f)=\int f\,.\int\varphi(f)\,df\,.\,df.$$

Der Theil links vom Gleichheitszeichen der Gleichung D) stellt die Summe der Attraction aller Theilchen der Kugelschale dar, der Theil rechts die Masse der Kugelschale, multiplicirt in die zu suchende Function von r. Dieselbe Gleichung integrirt giebt:

$$\text{e)}\quad \psi(r+u)-\psi(r-u)=2ru\int\varphi(r)\,dr+rU,$$

unter U einen Ausdruck verstanden, der nur aus u und Constanten zusammengesetzt ist. Hieraus leitet Laplace durch Gleichsetzung der identischen zweiten Differentialquotienten nach r und u des Theiles rechts vom Gleichheitszeichen folgende Gleichung ab:

$$\text{f)}\quad \frac{2\varphi(r)}{r}+\frac{d\varphi(r)}{dr}=3A,$$

deren Integral

$$\text{g)}\quad \varphi(r)=Ar+\frac{B}{r^2}$$

sofort das gesuchte Attractionsgesetz darstellt.

Es ist aber hierzu zu bemerken, dass durch diese Ableitung das nur in ψ enthaltene Attractionsgesetz der Theilchen der Kugelschale als solcher eliminirt worden ist, dass somit in Gleichung f) die Function $\varphi(r)$ nur das Attractionsgesetz der im Mittelpunkt vereinigten Masse repräsentirt und man zu derselben Gleichung f) gelangt wäre, wenn man ψ eine beliebige andere von φ verschiedene Function zu Grunde gelegt hätte, desgleichen wenn man die unter den Functionszeichen ψ in Gleichung D) befindlichen Grenzgrössen $r+u$ und $r-u$ durch $u+r$ und $u-r$ ersetzt, d. h. den äusseren Punkt mit einem inneren vertauscht hätte. Demgemäss besagt das Integral g) nur Folgendes:

Wenn es möglich sein soll, die Attraction einer Kugelschale auf einen ausser- oder innerhalb derselben gelegenen Punkt durch diejenige der im Mittelpunkt vereinigt gedachten Masse der Kugelschale zu ersetzen, so

muss sich letztere Attraction der Function der Entfernung nach zurückziehen auf $Ar + \frac{B}{r^2}$.

Diese Bedeutung der Gleichung g) dürfte veranlassen, die Ableitung der in Rede stehenden Attractionsgesetze sowohl bezüglich eines äusseren als inneren Punktes in folgender Weise zu Ende zu führen:

Ob nämlich die Attraction der im Mittelpunkt vereinigt gedachten Masse der Kugelschale auf einen äusseren Punkt nach dem Gesetze $Ar + \frac{B}{r^2}$ äquivalent sei der Attraction der Kugelschale als solcher nach demselben, oder irgend einem anderen, oder mehreren anderen Gesetzen, und ob und unter welcher näheren Bestimmung der Constanten A und B, ergiebt sich offenbar aus der ursprünglichen Gleichung e), in welche für $\varphi(r)$ rechts vom Gleichheitszeichen der Ausdruck $Ar + \frac{B}{r^2}$ zu substituiren ist. Hierdurch geht diese Gleichung unter gleichzeitiger Berücksichtigung der aus derselben ebenfalls für U resultirenden Form über in

h) $$\psi(r+u) - \psi(r-u) = u(Ar^2 + Cr - 2B) + r(Au^2 + Eu - 2D),$$

worin C, D, E wie A und B Integrationsconstante sind. Um hieraus die Function ψ zu ermitteln, differentiiren wir viermal nach einer der Grössen r und u; diess liefert

$$\psi''''(r+u) - \psi''''(r-u) = 0,$$

somit für jeden Werth von f

$$\psi''''(f) = Const.,$$

sofort

i) $$\psi(f) = cf^4 + c'f^3 + c''f^2 + c'''f + c''''$$

mit $c, c' \ldots$ als Constante der Integration.

Hieraus ergiebt sich

k) $$\varphi(f) = 8cf + 3c' - \frac{c''''}{f^2}$$

für das Gesetz, nach welchem die Attraction der Theilchen der Kugelschale vor sich zu gehen hat. Der unter i) für $\psi(f)$ gewonnene Ausdruck hat aber noch die Gleichung h) zu erfüllen, oder besser: die Integrale $\psi(f)$ und $\varphi(r)$, Gleichung g), haben zusammen die Gleichung e) zu einer identischen zu machen, was zu den folgenden Relationen führt:

$$A = 8c,$$
$$B = -c'''',$$
$$C + E = 4c'',$$
$$D = 0,$$
$$0 = c';$$

hiermit aber geht die Gleichung k) über in

$$\varphi(f) = Af + \frac{B}{f^2};$$

d. h.: Die Attraction einer Kugelschale auf einen ausserhalb derselben befindlichen Punkt ist nur dann äquivalent derjenigen der im Mittelpunkt vereinigt gedachten Masse der Kugelschale, wenn beiderlei Wirkungen nach einem und demselben Gesetz, und zwar sowohl nach der directen ersten Potenz als nach dem verkehrten Quadrat der Entfernung, vor sich gehen.

Bezüglich eines Punktes innerhalb einer Kugelschale wird man das auch hierfür resultirende allgemeine Integral i) mit der Gleichung h) verbinden, nachdem man in dieser die unter den Functionszeichen ψ befindlichen Grössen $r+u$ und $r-u$ durch $u+r$ und $u-r$ ersetzt hat; diess ergiebt:

$$A = 8c,$$
$$B = 0,$$
$$C + E = 4c'',$$
$$D = -c''',$$
$$0 = c',$$

so dass sich das Binom der Gleichung g) auf sein erstes Glied reducirt, während die Gleichung k) sich verwandelt in

$$\varphi(f) = Af + \frac{D}{f^2},$$

d. h.: Die Attraction einer Kugelfläche auf einen innerhalb derselben befindlichen Punkt ist nur dann äquivalent derjenigen der im Mittelpunkt vereinigt gedachten Masse der Kugelschale, wenn entweder beiderlei Wirkungen nach einem und demselben Gesetz, und zwar nach der directen ersten Potenz der Entfernung, vor sich gehen, — oder aber, wenn die erstere Wirkung nach dem verkehrten Quadrat der Entfernung vor sich geht, die letztere aber Null ist.

Literaturzeitung

der

itschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



Fünfter Jahrgang.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1860.

Inhalt.

Arithmetik und Analysis.

Theoretische und praktische Geometrie.

Geschichte der Mathematik.

Mechanik.

Physik.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie mit besonderer Rücksicht auf das Verhalten des Wasserdampfes von Dr. GUSTAV ZEUNER, Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. Freiberg, Engelhardt, 1860. 200 Seiten 8°.

Der bedeutende Umfang, zu welchem die Literatur der mechanischen Wärmetheorie im Laufe einer kurzen Reihe von Jahren angewachsen ist, lässt die in der Vorrede ausgesprochene Absicht des Verfassers, alle von verschiedenen Schriftstellern bis zum heutigen Tage gegebenen Rechnungs- und Versuchsresultate vollständig und im Zusammenhang darzulegen, als eine sehr zeitgemässe und dankenswerthe erscheinen, wenngleich das Buch selbst nicht in vollem Maasse Das leistet, was die Vorrede verspricht. Was die experimentellen Grundlagen der mechanischen Wärmetheorie betrifft, so sind fast immer nur die Versuchsresultate historisch mitgetheilt, ohne dass es dem Leser durch eine, wenn auch nur kurze Andeutung der Methoden, durch welche dieselben gewonnen wurden, möglich gemacht wäre, ein Urtheil über deren Zuverlässigkeit zu gewinnen. Und eine solche Kritik von Seiten des Lesers hat der Verfasser nicht immer überflüssig gemacht. Während z. B. den Versuchen von Hirn an Dampfmaschinen ein grösseres Gewicht beigelegt wird, als ihnen vielleicht im Vergleich mit manchen andern Versuchen zukommen möchte, wird nur beiläufig (p. 39) erwähnt, dass Joule durch verschiedene Methoden das Wärmeäquivalent bestimmt habe, ohne über diese Methoden die geringste Andeutung zu geben. Die Namen eines Rumford und Davy hätten wohl auch wenigstens eine historische Erwähnung verdient. Der von Perron für das mechanische Wärmeäquivalent gegebene Zahlenwerth (424 Kgrm.) ist aus denselben numerischen Datis und Formeln abgeleitet, wie die Zahl des Herrn Zeuner, die Uebereinstimmung daher nicht eben wunderbar. Die Zahlen (pag. 38), welche Masson und Dulong für das Verhältniss der specifischen Wärme der atmosphärischen Luft gegeben haben, sind gar keine Versuchsresultate, sondern ebenso wie die vom Verfasser selbst gegebene Zahl aus der Formel für die Schallgeschwindigkeit durch Rechnung abgeleitet.

Wir lassen eine kurze Inhaltsangabe der theoretischen Entwickelungen des Verfassers folgen. Derselbe beginnt mit der Erklärung, dass man in der mechanischen Wärmetheorie die Wärme nicht als Stoff, sondern als Bewegungsform betrachte. Da nun der Begriff einer Bewegungsform an sich nichts Messbares enthält, so wäre es erwünscht, ehe überhaupt von Aequivalenz der Wärme und Arbeit die Rede ist, zu erfahren, wodurch die in einem Körper enthaltene Wärmemenge gemessen werden soll, ob etwa durch die lebendige Kraft der Molecularbewegung oder wodurch sonst. Im §. 2 erfahren wir nämlich historisch, dass die lebendige Kraft der Wärmebewegung nicht die ganze im Körper enthaltene Wärmemenge darstellt, sondern dass ein Theil der dem Körper zugeführten Wärme oder mechanischen Arbeit noch zu Anderem verbraucht wird. Da man nun *a priori* nicht wissen kann, wie gross dieser Theil ist, welcher zu innerer Arbeit verwendet wird, so ist auch nicht abzusehen, auf welche Weise die Richtigkeit des Princips der Aequivalenz der Arbeit und Wärme geprüft werden soll. Die im folgenden Paragraphen gegebenen Beispiele beseitigen die Schwierigkeit nicht, denn dass z. B. die bei der Expansion eines Gases für das Gefühl verschwundene Wärmemenge überhaupt nicht mehr vorhanden oder verbraucht sei, folgt ebenso wenig mit Nothwendigkeit aus der Vorstellung der Wärme als Bewegungsform, wie aus der ältern Vorstellungsweise; es kann also nicht zum Beweise des Princips der Aequivalenz der Arbeit und Wärme dienen, sondern es ist im Gegentheil erst eine Folgerung aus diesem Princip. Der Beweis, dass wirklich Wärme verschwindet, während Arbeit geleistet wird, und dass das verschwundene Wärmequantum der geleisteten Arbeit proportional ist, kann nur aus der Betrachtung eines vollständigen Kreisprocesses hergeleitet werden, wo der vermittelnde Körper sich am Ende wieder in demselben Zustand befindet wie am Anfang. Jedenfalls hätte die Darstellung des Grundprincips der mechanischen Wärmetheorie an Schärfe nicht unerheblich gewonnen, wenn dasselbe, wie es von Helmholtz geschehen ist, auf das mechanische Princip der lebendigen Kräfte gegründet worden wäre, woraus sich insbesondere von vorn herein eine präcisere Begriffsbestimmung der „innern Wärme" des Körpers ergeben hätte. Es ist dieselbe nämlich identisch mit der „mechanischen Energie" von Thomson oder der „Wirkungsfunction" von Kirchhoff.

Es folgt die Ableitung der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie, welche von der üblichen Form dadurch etwas abweichen, dass Druck und Volumen als unabhängige Veränderliche genommen, die Temperatur als Function beider betrachtet wird. Die Unabhängigkeit der Carnot'schen Temperaturfunction von der Natur des vermittelnden Körpers wird ähnlich wie bei Clapeyron, Clausius und Reech aus der Betrachtung eines umkehrbaren Kreisprocesses hergeleitet, indem aus der entgegengesetzten Annahme folgen würde, dass ohne Aufwand von Wärme oder Arbeit Wärme von einem Körper niederer Temperatur zu einem Körper

höherer Temperatur übergeführt werden könnte. Inwiefern dies „ungereimt“ wäre, ist nicht einzusehen, da nichts darin liegt, was der Grundvorstellung oder dem ersten Grundsatz der mechanischen Wärmetheorie widerspricht. Es ist vielmehr die Unmöglichkeit einer solchen Ueberführung eine völlig neue und für sich bestehende Hypothese, was vom Verfasser nicht genug hervorgehoben wird. — Ungern vermisst man an dieser Stelle den Satz über die innere Wärme (Wirkungsfunction) eines Körpers, welchen W. Thomson aus der Verbindung beider Principien der mechanischen Wärmetheorie abgeleitet hat und der von Kirchhoff in verallgemeinerter Form entwickelt und in so eleganter Weise zur Herleitung der Gesetze der Dampfbildung, sowie der Absorption von Gasen und der Lösung von Salzen im Wasser benutzt worden ist.

In dem Kapitel über die permanenten Gase werden diejenigen Gase ausführlich behandelt, welche das Mariotte'sche und Gay-Lussac'sche Gesetz genau befolgen, unter der Voraussetzung, dass beide specifische Wärmen, bei constantem Druck und bei constantem Volumen, von Dichtigkeit und Temperatur unabhängig sind. Es wird aus der Differenz der specifischen Wärme das Wärmeäquivalent = 424 Kgrm. bestimmt und nachgewiesen, dass die Carnot'sche Temperaturfunction der absoluten Temperatur proportional ist. Ferner ergiebt sich, dass die innere Wärme der Masseneinheit des Gases seiner absoluten Temperatur proportional, übrigens aber von Druck und Dichte unabhängig ist (Mayer'sche Annahme). In einigen Anmerkungen werden die Modificationen besprochen, welche die Formeln erleiden würden, wenn man die specifischen Wärmen nicht als constant, aber als Functionen der Temperatur allein betrachtete. Die so gewonnenen allgemeinen Resultate werden auf die speciellen Probleme der Erwärmung eines Gases bei constantem Druck und bei constantem Volumen, der Volumenänderung bei constanter Temperatur, der Compression und Dilatation in einer für Wärme undurchdringlichen Hülle, des Verhaltens bei plötzlicher Aenderung des Druckes, endlich auf den Kreisprocess der calorischen Luftmaschine angewendet. Der Einfluss der Abweichungen vom Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetz, sowie die Versuche, welche von Joule und Thomson über die Abkühlung der Gase beim Ausströmen durch enge Oeffnungen oder poröse Körper zur Prüfung der Richtigkeit der Mayer'schen Annahme angestellt worden sind, und die von diesen Physikern aus ihren Versuchen gezogenen Folgerungen sind leider nicht berücksichtigt worden.

Besonders ausführlich wird im dritten Kapitel über die Dämpfe im gesättigten und überhitzten Zustand, das Verhalten des gesättigten Wasserdampfes untersucht, dessen Eigenschaften am besten bekannt und von der grössten praktischen Wichtigkeit sind. Die Versuchsresultate von Regnault über die Spannkraft und die Gesammtwärme des gesättigten Wasserdampfes werden der Untersuchung zu Grunde gelegt. Die theils aus den

Versuchen von Regnault unmittelbar bekannten, theils durch Anwendung der Principien der mechanischen Wärmetheorie auf diese Versuchsresultate sich ergebenden Zahlenwerthe der verschiedenen in Betracht kommenden Functionen sind für Temperaturen von 5 zu 5 Graden innerhalb des Intervalles von 0 bis 200° und für Spannkräfte von Viertel- zu Viertel-Atmosphäre für das Intervall von $\frac{1}{4}$ bis 10 Atmosphären auf zweckmässige, die Uebersicht und den praktischen Gebrauch erleichternde Weise in Tabellen zusammengestellt. Wie schon Clausius gezeigt, lassen sich mit Hilfe des Carnot'schen Princips die Volumina der Gewichtseinheit gesättigten Dampfes aus den bekannten Werthen des Differentialquotienten $\frac{dp}{dt}$ und der Verdampfungswärme r berechnen. Die Vergleichung der numerischen Resultate ergiebt, dass die Dämpfe im gesättigten Zustand nicht dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze folgen, sondern dass die Relation zwischen Druck (p), Volumen (v) und absoluter Temperatur (T) mit hinreichender Genauigkeit durch eine für die Rechnung bequeme empirische Gleichung von der Form

$$A p v = B \log \frac{T}{n}$$

dargestellt wird, wo A das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit ($\frac{1}{424}$), B und n aus den Versuchen zu bestimmende Constante sind. Nach Zusammenstellung der allgemeinen Formeln für gesättigte Dämpfe werden nach einander sieben passend ausgewählte specielle Probleme behandelt, welche alle wichtigern Fragen, die in der Theorie der Dampfmaschinen von Interesse sein können, vollständig erschöpfen. Soweit diese Fragen schon früher von Clausius behandelt worden sind, stimmen die Resultate des Verfassers mit denen von Clausius überein. Dem Verfasser gebührt das unzweifelhafte Verdienst, durch weitere Ausführung der von Clausius aufgestellten Principien die Grundlagen zu einer neuen vollständigen Theorie der Dampfmaschinen gegeben zu haben, welche die veraltete Theorie des Grafen Pambour zu ersetzen bestimmt ist. Es steht zu hoffen, dass der Verfasser sich des fernern Ausbaues dieser Theorie annehmen wird. Die Discussion des vorhandenen Materials über überhitzte Dämpfe führt zu dem Ergebniss, dass sich aus Mangel an experimentellen Grundlagen über deren Verhalten noch keine hinreichend sichern Schlüsse ziehen lassen.

Das vierte und letzte Kapitel enthält die Anwendung der Grundsätze der mechanischen Wärmetheorie auf feste und flüssige Körper. Es verdient bemerkt zu werden, dass die Formeln des Verfassers auf feste Körper nur insoweit anwendbar sind, als man berechtigt ist, ihren Zustand als durch zwei unabhängige Veränderliche p und v vollständig bestimmt zu betrachten, also z. B. unter Voraussetzung eines von allen Seiten gleichförmigen Druckes. In diesem Sinne sind dieselben auch vom Verfasser stillschweigend verstanden worden. Es werden zuerst die von W. Thomson

heoretisch abgeleiteten und durch Versuche von Joule bestätigten Resultate über die Erwärmung von Flüssigkeiten durch Compression behandelt. Es werden sodann die Bestimmungen von Aimé und von Colladon und Sturm über die Compressibilität des Wassers und Quecksilbers benutzt, um aus den entwickelten Formeln der Werth des Verhältnisses der specifischen Wärmen bei constantem Druck und bei constantem Volumen abzuleiten. Es ergiebt sich für Quecksilber $\frac{c}{c_1} = 1{,}1353$ und da nach Regnault $c = 0{,}03332$ ist, $c_1 = 0{,}02935$, für Wasser $\frac{c}{c_1} = 1{,}0012$ mithin $c_1 = 0{,}9988$.

Den Schluss bildet die Untersuchung über die Abhängigkeit des Schmelzpunktes vom Druck. Die Entwickelungen von W. Thomson über die Temperaturveränderungen, welche mit Formänderungen elastischer Körper verbunden sind (*Quarterly Journ. of Math. I*, 57) und die zu ihrer Bestätigung von Joule angestellten Versuche (*Phil. Mag.* [4 *ser.*] *XIV*. 226, *XV*. 538, *XVI*. 54) sind noch nicht benutzt.

Die Darstellung ist, abgesehen von den anfangs erwähnten principiellen Schwierigkeiten, klar und anschaulich und das Ganze erscheint wohl geeignet, den Leser auf leichtere Weise als das früher möglich war, mit den bisher gewonnenen Resultaten der mechanischen Wärmetheorie bekannt zu machen. Die äussere Ausstattung lässt nichts zu wünschen übrig.

JOCHMANN.

Das Pythagoräische Dreieck und die ungerade Zahl. Ein Beitrag zur Einleitung in das Studium des rechtwinkligen Dreiecks. Von KARL THOMAS. Berlin, Herbig.

Der Verfasser, der sich selbst für einen Nicht-Mathematiker erklärt, will mit seiner Schrift den Beweis liefern, dass derjenige, der überhaupt richtig zu denken verstehe, auch über mathematische Dinge richtig denken werde (S. 8), er glaubt ferner eine brauchbare Einleitung in das Studium des rechtwinkligen Dreiecks geliefert zu haben (S. 10) und vindicirt endlich seiner Arbeit eine, wenn auch nur kleine, wissenschaftliche Bedeutung, welche in dem Satze gesucht werden soll: „dass für das Problem vom rechtwinkligen rationalen Dreieck die absoluten Primzahlen mit ihren noch immer unbekannten Gesetzen fast in den Hintergrund gedrängt werden, dass an die Stelle derselben zwei durchaus bestimmte Zahlenreihen treten, für die geraden Zahlen die Zahlenreihe, die aus der Gleichung $d = 2\mu^2$ hervorgeht, für die ungeraden Zahlen die Zahlenreihe, deren allgemeines Glied $d = (2\mu - 1)^2$ ist, beides für $\mu = 1$ bis $\mu = \infty$. Die Bedeutung dieser Zahlenreihen für das rationale rechtwinklige Dreieck liegt in der Bedeutung des Buchstabens d, der nach der einen Seite hin den Unterschied zwischen der Hypotenuse und einer der beiden Katheten bezeich-

net, nach der andern Seite hin die Anzahl der unmittelbar aufeinander folgenden ungeraden Zahlen bedeutet, die sich zum Quadrate einer ganzen Zahl aufsummiren. Die Methode, allgemein für die kleinste dieser d ungeraden Zahlen die Stellenzahl zu finden, ist zugleich die Methode für die Darstellung des Systems der rationalen rechtwinkligen Dreiecke. Diese Methode bedarf der absoluten Primzahlen nicht und die Darstellung des genannten Systems und dessen Zurückführung auf die entferntesten Formelelemente kann unabhängig von der absoluten Primzahl erfolgen."

Hierauf ist zu antworten: *ad* 1, der erwähnte Beweis war vollkommen überflüssig, da schon Plato wusste und den Sokrates an einem Beispiele zeigen lässt, dass zur Mathematik keine absonderliche Logik, sondern nur gesunder Menschenverstand erforderlich ist. *Ad* 2, Die Lehre vom rationalen rechtwinkligen Dreieck gehört nicht zur Theorie des Dreiecks, sondern in die unbestimmte Analytik; von einer Einleitung in das Studium des rechtwinkligen Dreiecks kann hier gar keine Rede sein. *Ad* 3, Die allgemeine rationale Auflösung der unbestimmten Gleichung $a^2+b^2=c^2$, nämlich

$$a=2pq,\ b=p^2-q^2,\ c=p^2+q^2,$$

ist so alt, dass man sie dem Pythagoras, Archytas oder Plato zugeschrieben hat, und eben so alt ist ohne Zweifel die Consequenz

$$c-b=2q^2,\ c-a=(p-q)^2,$$

worüber der Verf. so viele Worte macht. Auch die Gleichung $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ kommt schon im Alterthume vor, z. B. bei Nicomachus. Es war daher sehr überflüssig, dass der Verf. seine Studien drucken liess.

Schlömilch.

Theorie der Körperbewegungen in specieller Erörterung der Pendelbewegungen. Von G. A. Baurmeister. Leipzig, Eduard Heinrich Mayer.

Die Ursachen der zunehmenden Fallgeschwindigkeit bei Körperbewegungen. Von Demselben. Ebendaselbst.

Zur Charakteristik des Verfassers werden folgende Citate ausreichen. In der zweiten Schrift heisst es S. 28: „Der Verfasser macht keine Ansprüche auf mathematische Kenntnisse, er weiss aber, dass es eine physikalische Mathematik noch nicht giebt, dass alle desfallsigen Rechnungen der Physik nutzlos sind, theils weil sie auf falschen Prämissen beruhen, theils weil man das Naturleben übersah und nur die Form im Auge hatte." Auf S. 7 der ersten Schrift findet sich die ebenso apodiktische Behauptung: „Eine Theorie der Pendelbewegung, welche der Kritik Stand halten könnte und nur einigermassen ausreichend wäre, hat ihren Schöpfer noch nicht gefunden." Solch bodenloser Ignoranz gegenüber bedarf es begreiflicherweise keiner Erörterung.

Schlömilch.

Bibliographie

vom 1. November bis 1. December 1859.

Periodische Schriften.

Berichte über die Verhandlungen der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathem.-phys. Cl. 1859. I. u. II. Leipzig, Hirzel. à 1/3 Thlr.

Reine Mathematik.

Féaux, B., Buchstabenrechnung und Algebra nebst Uebungsaufgaben. Paderborn, Schöningh. 17½ Ngr.

Baltzer, R., Die Elemente der Mathematik. 1. Bd. Gemeine Arithmetik, allgemeine Arithmetik und Algebra. Leipzig, Hirzel. 1 Thlr. 6 Ngr.

Mocnik, F., Lehrbuch der Arithmetik für Untergymnasien. 1. Abth. 10. Aufl. Wien, Gerold's Sohn. 16 Ngr.

Winckler, A., Allgemeine Transformation der bestimmten Doppelintegrale. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 3 Ngr.

Schlömilch, O., Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Maasses. 1. Thl. Planimetrie und ebene Trigonometrie. 3. Aufl. Eisenach, Bärcke. 1¼ Thlr.

Salomon, J., Lehrbuch der reinen Elementargeometrie. 4. Aufl. Wien, Gerold's Sohn. 2⅓ Tlr.

Mocnik, F., Geometrische Anschauungslehre. 1. Abth. 4. Aufl. Ebendas. 12 Ngr.

Fialkowsky, N., Theilung des Winkels und des Kreises oder Bi-, Tri- und Polysection jedes beliebigen Winkels in 72 neuen Methoden. Ebendas. 2 Thlr.

Angewandte Mathematik.

Schmidt, R., Theoretisch-praktische Anleitung zum geometrischen Zeichnen, zur Schattenconstruction und zur Perspective. 3. Ausg. Leipzig, Förstner'sche Buchhandlung. 1 Thlr.

Matthiessen, L., Neue Untersuchungen über frei rotirende Flüssigkeiten im Zustande des Gleichgewichts. Kiel, Akadem. Buchhandlung in Comm. 1 Thlr.

LARGIADÈR, A. P., Einleitung in die technische Mechanik für Gewerbe- und Industrieschulen. Frauenfeld, Huber. 1⅓ Thlr.

ZEUNER, G., Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie. Mit besonderer Rücksicht auf das Verhalten des Wasserdampfes. Freiberg, Engelhardt. 1¼ Thlr.

REDTENBACHER, F., Resultate für den Maschinenbau. 4. Auflage. Mannheim, Bassermann. 5 Thlr.

HANSEN, P. A., Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. 3. Abhandlung. Leipzig, Hirzel. 2 Thlr. 12 Ngr.

LITTROW, K. v., Privatleistungen auf astronomischen Gebiete. Ein Vortrag. Wien, Gerold's Sohn in Comm. 7 Ngr.

LÖWY, M., Bahnbestimmungen des ersten Kometen 1857. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 4 Ngr.

BRÜNNOW, F., *Tables of Victoria with regard of the perturbations of Jupiter and Saturn. New-York, Westermann & Comp.* 1⅔ Thlr.

Physik.

EMSMANN, A. H., Physikalische Vorschule; ein vorbereitender Cursus der Experimentalphysik. Leipzig, O. Wigand. ⅔ Thlr.

PISKO, F. J., Lehrbuch der Physik für Oberrealschulen. Brünn, Winiker. 2 Thlr. 8 Ngr.

ETTINGSHAUSEN, A. v., Anfangsgründe der Physik. 4. Auflage. Wien, Gerold's Sohn. 3⅓ Thlr.

SCHABUS, J., Leichtfassliche Anfangsgründe der Naturlehre. 7. Aufl. Ebendas. 18 Ngr.

KNOCHENHAUER, K. W., Ueber die Theilung des elektrischen Stromes. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 4 Ngr.

PRESTEL, M. A. F., Beobachtungen über die mit der Höhe zunehmende Temperatur in der unmittelbar auf der Erdoberfläche ruhenden Region der Atmosphäre. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 8 Ngr.

RESLHUBER, A., Berichte über die am 21. und 29. April 1859 zu Kremsmünster beobachteten Nordlichter. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 2 Ngr.

WÜLLERSTORF-URBAIR, B. v., Zur Vertheilung der Winde auf der Oberfläche der Erde; nebst Schreiben von M. F. MAURY an Hrn. v. WÜLLERSDORF. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. ⅙ Thlr.

PÉCLET, E., *Traité de la chaleur considerée dans ses applications. 3. édit. Tome I et II. Paris, Masson.* 8 Thlr.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Studien über die Körper im sphäroidalen Zustande. Neuer Zweig der Physik. Von M. G. H. Boutigny. Nach der dritten Auflage des französischen Originals übersetzt von R. Arendt. Leipzig, F. A. Brockhaus. 8. S. 301.

Die Erscheinung, um welche es sich in dem vorliegenden Buche handelt, ist in Deutschland unter dem Namen des Leidenfrost'schen Versuchs bekannt. Der Versuch in seiner einfachsten Gestalt besteht darin, dass man einen Löffel stark erhitzt und dann Wasser hineintröpfelt; der Tropfen behält seine Kugelgestalt bei und um so vollständiger, je höher die Temperatur des Löffels ist, er verdampft sehr langsam und erst wenn der Löffel nicht mehr erhitzt und abgekühlt wird, verwandelt sich der Tropfen mit Explosion in Dampf. Was diese Erscheinung interessant macht und sie als paradox erscheinen lässt, ist der Widerspruch, in welchem sie sich mit der gemeinen Erfahrung befindet, dass wenn man Wasser in einem Löffel über Feuer hält, dieses um so schneller verdampft, je heisser es wird, bis es zuletzt bei einer bestimmten Temperatur ins Sieden kommt. Leidenfrost war der Erste, der die Erscheinung genauer untersucht und seine Experimente und Speculationen 1756 in einer Schrift *de aquae communis qualitatibus* veröffentlicht hat. Seit dieser Zeit sind die Versuche oft wiederholt und abgeändert worden. Schon vor Boutigny (der seit 1836 sich mit der Erforschung des merkwürdigen Phänomens ununterbrochen beschäftigt hat) wurde beobachtet, dass beinahe alle Flüssigkeiten und selbst feste Körper auf heissen Metallflächen die Gestalt eines Tropfens annehmen, der nur langsam verdampft und dessen Temperatur ebenfalls constant ist. Eine vollständige Erklärung der Erscheinung und der sie begleitenden Umstände haben wir bis heute noch nicht und der Grund davon liegt wohl darin, dass die Massbestimmungen, auf welche hierbei theoretische Untersuchungen zu fussen haben, sich hauptsächlich auf die Temperatur beziehen. Die Aufgabe, um deren Lösung es sich hierbei zunächst handelt, dürfte wohl so zu fassen sein: „welchen Einfluss hat die Temperatur auf die Adhäsion überhaupt und wie verhält sich insbesondere ein Tropfen gegen strahlende und

gegen geleitete Wärme?" Unter diesem Gesichtspunkte betrachtet nun freilich Boutigny die hierher gehörenden Erscheinungen nicht. Seinen eigenthümlichen Ansichten zufolge gehen die Körper auf heissen Oberflächen in einen neuen Aggregatzustand über, der von dem festen, tropfbar flüssigen und gasförmigen Zustande verschieden ist; diesen neuen Zustand nennt er den sphäroidalen Zustand und basirt die Erklärung desselben auf folgende charakteristische Fundamentaleigenschaften:

1) Die abgerundete Form, welche die Materie auf einer bis zu einer gewissen Temperatur erhitzten Fläche annimmt;

2) Die permanente Entfernung, welche zwischen dem sphäroidalisirten und dem sphäroidalisirenden Körper besteht;

3) Die Eigenschaft, die strahlende Wärme zu reflectiren;

4) Die Aufhebung der chemischen Wirkung;

5) Die Beständigkeit der Temperatur der Körper im sphäroidalen Zustande.

Hiernach lautet die Definition folgendermassen: „Ein auf eine heisse Fläche geworfener Körper ist im sphäroidalen Zustande, wenn er eine abgerundete Gestalt annimmt und auf dieser Fläche ausserhalb der chemischen und physikalischen Wirkungssphäre verharrt; dann reflectirt er die strahlende Wärme und seine Molecüle sind, in Bezug auf die Wärme, in einem Zustande von stabilem Gleichgewicht, das heisst, sie zeigen eine unveränderliche oder nur zwischen sehr engen Grenzen schwankende Temperatur, während die der erhitzten Oberfläche unbestimmt erhöht werden kann."

„Diese Definition, welche den Fehler hat, ein wenig lang zu sein und an einigen Stellen gegen bekannte Regeln zu verstossen, könnte kurz folgendermassen gefasst werden":

„Ein Körper befindet sich im sphäroidalen Zustande, wenn seine Temperatur auf einer Oberfläche, die er nicht berührt und deren Temperatur beliebig erhöht werden kann, unabänderlich bleibt; oder: Alle Körper, deren Temperatur auf einer Oberfläche, mit der sie nicht in Berührung stehen, und deren Temperatur beliebig gesteigert werden kann, unveränderlich bleibt, befinden sich in sphäroidalem Zustande."

„Wenn man — fährt Boutigny weiter fort — mit dieser Erklärung die von Liebig für flüssige Körper gegebene vergleicht, so erkennt man ohne Weiteres die Grundverschiedenheiten dieser beiden Arten von Körpern. Liebig sagt: „„Die flüssigen Körper nehmen die Form der Gefässe an, in welchen sie enthalten sind, ihre Molecule sind sehr beweglich. Wenn sie in Ruhe sind, so nehmen sie eine horizontale Oberfläche an.""

Wir lassen auf diese Definitionen, nach deren Durchlesung man wohl

zweifeln darf, ob Boutigny überhaupt weiss, was man unter einem Aggregatzustand zu verstehen hat, ein Résumé des ganzen Werkes folgen, wobei wir uns an das vom Verfasser selbst gegebene halten wollen. Der erste Theil, welcher die Ueberschrift „Physik“ trägt, sucht folgende Fragen zu beantworten:

1) Welches ist die niedrigste Temperatur, bei welcher das Wasser in den sphäroidalen Zustand übergehen kann?

2) Welches ist das Gesetz der Verdampfung des Wassers im sphäroidalen Zustande?

3) Welches ist die Temperatur der Körper im sphäroidalen Zustande und ihres Dampfes?

4) Durchdringt die strahlende Wärme die Körper im sphäroidalen Zustande oder wird sie von denselben reflectirt?

5) Können alle Körper in den sphäroidalen Zustand übergehen?

6) Findet zwischen den Körpern im sphäroidalen Zustande und den Oberflächen, auf welchen sie entstehen, Berührung statt oder nicht?

7) Spielt der sphäroidale Zustand des Wassers irgend eine Rolle bei den Explosionen der Dampfkessel?

8) Welches ist die physische Constitution der Körper im sphäroidalen Zustande?

Die Resultate, zu denen Boutigny gelangt, sind folgende: Die niedrigste Temperatur, bei der das Wasser den sphäroidalen Zustand annehmen kann, ist $+ 142^0$ C; — die Temperatur des Gefässes, in welchem man irgendeinen Körper sphäroidalisiren kann, muss um so höher sein, je höher der Siedepunkt derselben liegt; — das Wasser im sphäroidalen Zustande verdampft um so schneller, je höher die Temperatur des Gefässes ist, und seine Verdampfungsgeschwindigkeit ist speciell bei $+ 200^0$ 50mal geringer als beim Sieden; — die Temperatur der Körper im sphäroidalen Zustande liegt, wie hoch auch die des einschliessenden Gefässes sein möge, stets tiefer als die, bei der sie sieden; sie ist der letztern proportional und für Wasser $= + 96{,}5^0$ (?). Infolge dieses Gesetzes gelang Boutigny die Lösung des Problems: innerhalb eines zur Weissglut erhitzten Raumes Wasser zum Gefrieren zu bringen; — die Temperatur des Dampfes der Körper im sphäroidalen Zustande ist gleich der des einschliessenden Gefässes, mit andern Worten: das Gleichgewicht der Wärme stellt sich stets zwischen dem Dampf der sphäroidalisirten und dem Raume, welcher sie einschliesst, her, nie aber zwischen diesem Raume und den sphäroidalisirten Körpern; — die Körper im sphäroidalen Zustande besitzen ein fast absolutes Reflexionsvermögen für die Wärme; — alle Körper können in den sphäroidalen Zustand übergehen (?); — zwischen den Körpern im sphäroidalen Zustande und den Oberflächen, auf welchen sie entstehen, findet keine Berührung statt; — der sphäroidale Zustand des Wassers ist die Hauptursache

der sogenannten donnernden Explosionen der Dampfkessel; — die Metalle sind bis jetzt nur im festen, sphäroidalen und gasförmigen Zustande studirt; — sämmtliche beobachtete und im vorliegenden Werke beschriebenen Erscheinungen verlaufen in der Muffel d. h. innerhalb eines allenthalben von weissglühenden Wänden eingeschlossenen Raumes, unter der Glocke der Luftpumpe und im Focus eines Brennglases ebenso wie an freier Luft; — ein zur Flüssigkeit verdichtetes Gas, schweflige Säure, welches in diesem Zustand bei — 11° siedet, in einer rothglühenden Schale unter die Glocke der Luftpumpe gebracht, verflüchtigt sich nur langsam und siedet nicht mehr, wenn es sphäroidalisirt ist.

Das sind die Resultate aus 72 Versuchen, die B. im ersten Theile mittheilt. Welcher Art diese Versuche zum Theil sind, und welches Vertrauen die numerischen Angaben verdienen, werden wir unsern Lesern am anschaulichsten machen, wenn wir einige derselben hierhersetzen.

Die Temperatur des Wassers im sphäroidalen Zustande anlangend, sagt B., dass aus seinen Versuchen hervorgeht, dass sie zwischen 96° und 98° liegt, er aber geneigt ist, anzunehmen, dass sie wirklich 96,5° ist. B. hat auf verschiedene Weise versucht, diese Temperatur zu messen, aber nur einmal ist es ihm vollständig gelungen, und diesen einzigen Fall beschreibt er im zwölften Versuche wie folgt: „Eine halbkugelförmige Silberschale von 0,043 Meter Durchmesser, 45 Gramm schwer und 23 Cubikcentimeter Inhalt wurde über der Flamme einer guten Aeolipyle mit verticalem Blasrohr erhitzt. Sobald sie rothglühend war, goss man mit Vorsicht 12 — 15 Gramm destillirtes Wasser hinein und senkte in dasselbe die Kugel eines zu diesem Versuche construirten Thermometers. Das Quecksilber stieg stets bis 96,5°, oft auch bis 109°, einigemale bis 102°. Das Wasser kochte nicht, aber es wurde durch Dampfblasen, welche sich nur schwer zwischen der Wand der Schale und dem Tropfen entwickeln konnten, durchbrochen; diese berührten die Thermometerkugel und veranlassten ein Steigen über den Siedepunkt des Wassers. Eine andere Fehlerquelle war die erhöhte Temperatur des Mittels, in dem sich die Thermometerröhre befand. Als das Thermometer die Temperatur zwischen 96° und 102° zeigte, wurde die Flamme der Aeolipyle ausgelöscht. Jetzt ist die Dampfentwickelung weniger beträchtlich und geschieht mit Leichtigkeit an der Wand der Schale; das Thermometer fällt schnell bis auf 96,5° und bleibt constant auf diesem Punkte, so lange sich das Wasser im sphäroidalen Zustande befindet. Sobald es jedoch seinen Zustand ändert, und die Schale noch heiss genug ist, um es zum Sieden zu bringen, was fast immer der Fall ist, steigt das Thermometer auf 100°, um alsbald nach den Gesetzen der Abkühlung zu sinken. Es wären nun wohl hier einige Correctionen anzubringen für den Fall, dass die Thermometerröhre isolirt wäre; allein man kann sich durch das Gefühl versichern, dass ihre Temperatur der des Wassers, in welche die Kugel taucht, sehr nahe steht. Die Correctionen sind daher überflüssig, da sie verschwin-

dend klein ausfallen müssten." — Doch dies ist nicht der einzige Fall, wo B. seine Finger als Thermometer benutzt. Man lese z. B. den 65. Versuch: „Ein eiserner Topf, zu drei Viertheilen mit Wasser gefüllt, wird mittels eines Hakens über einem Feuer aufgehängt. Sobald das Wasser im vollen Sieden ist, zieht man das Gefäss vom Feuer und hält unmittelbar darauf die Hand darunter. Man bemerkt mit Erstaunen, dass der Boden kalt oder fast kalt ist; eine halbe Minute später erreicht er die Temperatur des Wassers und bringt man jetzt die Hand wieder an denselben Ort, so wird man sie nicht ohne Unbequemlichkeit dort lassen können." Wie undeutlich übrigens bisweilen B.'s Beschreibungen seiner Versuche sind und wie wenig Zutrauen seine Angaben verdienen, mag man an dem 55. Versuch ersehen: „Man mache die gusseiserne Schale, die zum fünfzigsten Versuche gedient hat, glühend und hänge ein Stück Eis von 100—150 Gramm derart an einem feinen Eisendrahte auf, dass es sich vom Mittelpunkt der Schale in einer gewissen Entfernung befindet. Ein Thermometer befestigt man so, dass seine Kugel über dem Mittelpunkt der Schale und nur etwa 2—3 Millimeter vom Boden entfernt ist. Das Eis schmilzt, geht in den sphäroidalen Zustand über, ohne vorher den flüssigen zu passiren, und das Thermometer zeigt constant eine Temperatur von 96,5°." Dieser Versuch, in welchem die constante Temperatur von 96,5° wohl etwas zu bezweifeln sein dürfte, kann übrigens, wenn man kein geeignetes Thermometer hat, auch ohne Thermometer folgendermassen angestellt werden: „56. Versuch. Man macht eine Silberschale von 5—6 Centimeter Durchmesser glühend und wirft ein Stück Eis von 3—5 Gramm hinein. Sobald sich ungefähr die Hälfte davon im sphäroidalen Zustande befindet, fasst man die Schale mit der Pincette und schüttet den Inhalt schnell in die Hand oder auf den Rücken derselben. Man wird zuerst ein Gefühl von Wärme, danach von Kälte haben, jenes durch das Wasser im sphäroidalen Zustande, dieses durch das Stück Eis veranlasst, welches die Temperatur des Wassers schnell auf 0° erniedrigt." Ebenso wenig wie mit diesem lässt sich mit dem 60. Versuch etwas anfangen. „Man macht einen gusseisernen Cylinder von 0,057 Meter Höhe und 0,076 Meter Durchmesser, in welchem ein Kugelsegment von 0,028 Meter Tiefe und 57 Cubikcentimeter Inhalt ausgehöhlt ist, glühend, zieht ihn vom Feuer und reinigt ihn sorgfältig, darauf giesst man destillirtes Wasser hinein, welches in den sphäroidalen Zustand übergeht; dasselbe geräth in die tumultuarische Bewegung, auf welche im zwölften Versuche aufmerksam gemacht wurde. Man giesst so lange Wasser hinzu, bis die Schale benetzt wird und ein deutliches Sieden stattfindet; fährt man dann noch ferner mit dem Wasserzusatz fort, so kommt ein Augenblick, wo jedes Zeichen des Siedens verschwindet: die Temperatur des Wassers kann jetzt bedeutend unterhalb 100° sein. Aber diese Ruhe dauert nur einen Augenblick, das Wasser kocht von Neuem sehr stark und verschwindet schnell. Giesst man eine Minute später einige Tropfen Wasser in das Gefäss, so gehen diese in

den sphäroidalen Zustand über." Diese Beispiele mögen genügen, um dem Leser unser Urtheil begreiflich zu machen, wonach wir die Boutigny'schen Versuche und Beobachtungon für völlig unzureichend halten , die expeperimentelle Grundlage für eine Theorie des Leidenfrost'schen Versuches zu bilden. Vergleichen wir ausserdem den Inhalt des Boutigny'schen Buches mit dem anderer Schriften, die denselben Gegenstand behandeln, z. B. mit Abschnitten aus M. L. Frankenheim's Lehre von der Cohäsion, die 1835 erschienen ist, — und wir wählen gerade diese Schrift, weil sie ein Jahr vor der Zeit erschienen ist, wo Boutigny anfing, sich mit dem Leidenfrost'schen Phänomen zu beschäftigen, so müssen wir allerdings gestehen, dass B.'s mehr als zwanzigjährige Bemühungen die Auflösung des Problems, das wir oben nannten, nicht sehr gefördert haben. Wir finden bei Boutigny eine unverzeihliche Unkenntniss in der Literatur des Gegenstandes, dessen Erforschung er sich zur Lebensaufgabe gestellt hat, und was noch schlimmer ist, eine völlige Unbekanntschaft mit den Anfängen der rationellen Physik. Der Gedanke, eine grosse Entdeckung gemacht und hiermit ein neues Princip zur Erklärung aller Naturerscheinungen auf der Erde und in den Himmelsräumen gefunden zu haben, hat ihn der Ruhe eines nüchternen Forschers beraubt und ihn zum Verfasser des vorliegenden Buches gemacht, das in mehr als einer Hinsicht ein Curiosum genannt zu werden verdient. Bleiben wir einstweilen jedoch noch beim ersten Theile, bei der Physik, stehen, so finden wir in demselben allein 40 Seiten den Dampfkesselexplosionen gewidmet. Doch auch hier ist aus der Lectüre nicht viel Frucht zu holen. Was eine Discussion der Erscheinungen ist, davon scheint Boutigny keine Idee zu haben. Er berichtet nach den Zeitungen von mehreren Dampfkesselexplosionen, aber nirgends erkennt man ein Bestreben, die Umstände, unter denen sie erfolgten, zu sammeln; doch die Umstände mögen sein welche sie wollen, der Grund für eine Explosion oder für den Untergang einer Dampfmaschine überhaupt liegt für Boutigny stets zur Hand und im sphäroidalen Zustande des Wassers: so raisonnirt er z.B. über den Untergang des Dampfschiffes Butterfly, der fern von den Blicken der Menschen stattfand und bei welchem Ereignisse alle Diejenigen umkamen, welche sich am Bord des Schiffes befanden! (S. 75.) Wir treffen hier übrigens auf die Erklärung des genialen Mechanikers Perkins, dessen Name von Boutigny ganz in den Hintergrund gedrängt wird. Die Ursache der einen Art von Dampfkesselexplosionen, bei denen eine Oeffnung des Sicherheitsventils oder eine Abnahme in der Spannkraft des Dampfes vorhergegangen ist, hat Boutigny zur Construction einer neuen Art von Dampfgeneratoren geführt, eines Systems welches ebensogut auf schwächere Dampfkessel ($^1/_2$ Pferdekraft) wie auf die grössten anwendbar ist. Er beschreibt diese Dampfkessel auf S. 91 bis S. 123.

Der zweite Theil des vorliegenden Buches ist der Chemie gewidmet. Der Verfasser giebt selbst folgendes Résumé darüber: „Die Ueberführung

gewisser Körper in den sphäroidalen Zustand bietet ein vortreffliches Mittel der Oxydation oder der langsamen Verbrennung, der Action und Reaction, der Analyse und Synthese, und der Ozonisation. Der Dampf der Körper im sphäroidalen Zustande, der sich sehr langsam entwickelt, befindet sich so zu sagen, *in statu nascenti*, d. h. unter den günstigsten Bedingungen der Zersetzung und Verbindung." Ueber die Erscheinung, welche B. die Respiration der unorganischen Materie genannt hat, können wir hier nicht näher eingehen und verweisen Diejenigen, die Lust haben sollten, Boutigny's eigenthümliche Ansichten kennen zu lernen, auf das Buch selbst. Wir wenden uns vielmehr zu dem dritten, letzten und schwächsten Theile, der Theorie, und folgen hier um so lieber dem vom Verfasser gegebenen Résumé, als es uns schwer fallen würde, aus 130 Seiten voll wunderlicher Ansichten und Phantasien die Gedanken des Verfassers herauszulesen. Die Definitionen, die Boutigny vom sphäroidalen Zustande giebt, haben wir schon oben angeführt. Das folgende sind wieder die Worte unseres Autors: „Die Körper im sphäroidalen Zustande werden nicht durch ihren eigenen Dampf, sondern durch die Repulsionskraft, welche die Wärme in den Körpern erzeugt, ausserhalb ihrer chemischen Wirkunsgsphäre gehalten. Es besteht zwischen allen Theilen eines Körpers im sphäroidalen Zustande eine Attractionskraft, welche bewirkt, dass er sich so verhält, als wäre er auf einen im Raume isolirten materiellen Punkt reducirt. Bis hierher ist das Wort sphäroidaler Zustand nur zur Vermeidung von Umschreibungen angewendet worden; jetzt suchen wir ihm eine ähnliche theoretische Geltung zu erwerben, wie den Worten fester, flüssiger, gasförmiger Zustand. Unter den zahlreichen Eigenschaften, welche die Körper im sphäroidalen Zustande von den Körpern in den drei Aggregatzuständen unterscheiden, heben wir hervor: die Temperatur der Körper im sphäroidalen Zustande ist einzig und unveränderlich, während die der Körper im festen, flüssigen und gasförmigen Zustande unendlich vielfältig und veränderlich ist. Mit andern Worten: die Körper im sphäroidalen Zustande befinden sich in Beziehung zur Wärme in einem Zustande stabilen Gleichgewichts, während in den drei andern Zuständen die Körper in der gleichen Beziehung in einem Zustande labilen Gleichgewichts sind. Man hat früher gesehen, dass die Körper im sphäroidalen Zustande constant auf einer Temperatur unterhalb ihres Siedepunktes verharren; dies ist eine Eigenschaft der Materie in diesem Zustande, d. h. eine Wirkung, deren Ursache unbekannt ist. Wenn man die Theorie Ampère's über die Ursache der Wärme annimmt, was meinerseits geschieht, so ergiebt sich, dass die Temperatur für die Körper im sphäroidalen Zustande dasselbe ist, was der Ton für die vibrirenden Körper, und dass die Ursache des sphäroidalen Zustandes mit Recht in vibrirenden Bewegungen gesucht werden kann. Die Volumina der Sphären der Körper im sphäroidalen Zustande stehen in umgekehrten Verhältnisse zu ihrem specifischen

Gewicht, und ihre Massen sind einander gleich. Hieraus folgt, dass die Körper im sphäroidalen Zustande dem Attractionsgesetze folgen und Satelliten der Erde bilden. Da die Körper im sphäroidalen Zustande die Eigenschaft der planetaren Körper besitzen, kann man nach Analogie schliessen, dass diese die Eigenschaften jener haben, und so gelangt man zur Kosmologie, — mit der wir aber den Leser verschonen wollen. Nur noch einige theoretische Sätze Boutigny's sei uns gestattet anzuführen: „Eine einzige Kraft herrscht in der ganzen Natur: die Attraction, ihr Gegensatz ist die Repulsion, welche nichts Anderes als geringe Attraction ist. Alle Körper verhalten sich gegen glühende Oberflächen gleich, woraus man schliessen kann, dass die Materie homogen ist. Der Aether bildet das primitive Molecül der Materie. Der Wasserstoff ist der erste materielle Körper, den wir kennen, er ist condensirter, wahrnehmbarer und wägbarer Aether. Sein Atomgewicht ist ein Multiplum von dem des Aethers oder der unbekannten Zwischenkörper, deren Atomgewichte ihrerseits wieder Multipla von dem des Aethers sind. Die Molecüle aller Gase sind kugelförmig, hohl und gleichgross; sie unterscheiden sich nur durch eine mehr oder weniger grosse Wanddicke. Durch Condensation und Fall auf eine bis zu einer gewissen Temperatur erhitzten Oberfläche gehen die Körper in den sphäroidalen Zustand über."

Wir enden hiermit die Besprechung des Boutigny'schen Buches, das nichts Thatsächliches über den Leidenfrost'schen Versuch enthält, was nicht schon in jedem guten Lehrbuche der Physik aufgenommen wäre. Unsere Recension würde zu einem Buche so dick wie das Boutigny'sche selbst anschwellen, wollten wir alle Sonderbarkeiten und wunderlichen Speculationen, die jede Seite desselben füllen, anführen. Wenn Boutigny von sich selbst sagt: „Ich bin ein Mann des Laboratoriums aber kein Schriftsteller" — so wollen wir gegen diese letztere Einsicht keinen Widerspruch erheben. Die Welt hätte genug gehabt, wenn Boutigny seine Versuche allein mitgetheilt hätte. Doch können wir dem Uebersetzer nicht beistimmen, der die Arbeiten des Verfassers als werthvolle Grundlagen ansieht, welche einer weiteren Verbreitung würdig sind, und welche die rechnende Physik zum Aufbau einer vollständigen Theorie des Phänomens und aller damit zusammenhängenden Erscheinungen benutzen kann. Das Bemühen des Uebersetzers, ein möglichst treues Abbild des Originals zu liefern, was sicherlich keine leichte Arbeit gewesen war, ist ihm hinlänglich gelungen: es ist nicht seine Schuld, wenn das Lesen des Buches keinen befriedigenden Eindruck hinterlässt. Die äussere Ausstattung des Buches ist sehr gut.

Dr. R. Hoffmann.

Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen. Von SIMON SPITZER, Professor an der Wiener Handelsakademie. Wien, Gerold's Sohn. 1860.

Wie den Lesern unserer Zeitschrift bekannt sein wird, hat sich der Verfasser bereits seit längerer Zeit mit der Integration verschiedener Differentialgleichungen beschäftigt und die Resultate seiner Untersuchungen in vielen kleineren, hier und da zerstreuten Abhandlungen veröffentlicht. Die vorliegende Schrift vereinigt die früheren und ausserdem bisher ungedruckte Arbeiten des Verfassers zu einem systematischen Ganzen, welches zwar an Umfang (72 S.) nicht bedeutend, dem Inhalte nach aber sehr bemerkenswerth ist.

Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0,$$

die bekanntlich schon von Euler, Laplace, Mainardi, neuerdings auch von Petzval und Weiler behandelt worden ist. Namentlich hatte Laplace gezeigt, dass ihr durch bestimmte Integrale von der Form

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{xu} \varphi(u)\, du$$

genügt werden kann, wenn die Function $\varphi(u)$ und die Integrationsgrenzen auf passende Weise bestimmt werden. Dieses sehr elegante Verfahren führt aber in vielen Fällen nur zu particulären Integralen und es blieb daher immer noch die Frage, ob die Laplace'sche Methode nicht so modificirt werden könnte, dass sie unter allen Umständen das allgemeine Integral liefert. In dieser Richtung bewegen sich hauptsächlich die weitläufigen Untersuchungen von Petzval,*) sowie die vorliegende Arbeit des Verfassers; durch die letztere dürfte aber der Gegenstand wohl vollständig erledigt sein. Der Verfasser geht nämlich alle möglichen einzelnen Fälle durch und weiss in jedem Falle durch glückliche Substitutionen das allgemeine Integral zu entdecken. Gleichzeitig vermeidet der Verfasser die doppelten Formen, welche man sonst unterscheiden musste, jenachdem x positiv oder negativ war, auch besitzen die meisten der vom Verfasser gefundenen Integrale endliche Grenzen, sodass ein Fortschritt in dreifacher Beziehung vorhanden ist.

Der zweite Abschnitt hat die Integration binomischer Gleichungen von der allgemeinen Form

---

*) Trotzdem dass Prof. Petzval dieselben Buchstaben wie Laplace benutzt, nimmt er gleichwohl mit einer merkwürdigen Hartnäckigkeit die ganze Methode, nebst deren Anwendung auf binomische Differentialgleichungen und Differentialgleichungen für sich in Anspruch. Damit hängen jedenfalls auch die unrichtigen Citate zusammen, deren sich Prof. Petzval da bedient, wo er zu längst bekannten Resultaten gelangt.

$$y^{(n)} = a x^m y$$

zum Gegenstande (wohin z. B. die Riccati'sche Gleichung gehört), die bereits Kummer für den Fall eines ganzen und positiven m integrirt hat. Indem der Verfasser die Kummer'sche Methode erweitert, gelangt er auch in Fällen, wo m negativ ist, zu den Integralen solcher Differentialgleichungen. So findet sich z. B. für die Differentialgleichung

$$x^{2n} y^{(n)} = y$$

folgendes Integral

$$y = x^{n-1} \left\{ C_1 e^{-\frac{\mu}{x}} + C_2 e^{-\frac{\mu^2}{x}} + \ldots + C_n e^{-\frac{\mu^n}{x}} \right\},$$

worin μ eine primitive Wurzel der Einheit bedeutet. Daraus können nachher, wie der Verfasser zeigt, die Integrale der Differentialgleichungen

$$x^{2n-1} y^{(n-1)} = y, \quad x^{2n-2} y^{(n-2)} = y \text{ u. s. w.}$$

ohne Mühe abgeleitet werden.

Referent schliesst diese Anzeige mit dem Wunsche, dass der Verfasser die nöthige Musse zur Fortsetzung seiner Arbeiten nicht vermissen möge.

Schlömilch.

Ausführliches Lehrbuch der Elementargeometrie. Ebene und körperliche Geometrie. Von H. B. Lübsen. Vierte Auflage. Hamburg, O. Meissner.

Das Buch fängt mit folgenden Worten an: „Die ursprüngliche Geschichte aller menschlichen Kenntnisse vor der Sündfluth ist bekanntlich in der Sündfluth untergegangen, und Alles, was man über einzelne, vermeintlich gerettete Bruchstücke berichtet, verliert sich in reine Muthmassungen und Fabeln, die keinen Glauben verdienen. Auch noch gleich nach der Sündfluth, als man die Welt wieder von vorne anfing, hat sich die erste Spur der allgemeinen Geschichte in tiefes, nie zu lichtendes Dunkel gehüllt. Erst lange nachher, als die egyptische Finsterniss riss, (wovon in den **meisten** Schulen noch ein Stück zu sehen ist) bricht eine Art Dämmerung in der Geschichte an u. s. w." — Man weiss in der That nicht, ob man bei dieser Einleitung sich mehr über die Geschmacklosigkeit im Vorbringen abgedroschener Witze oder über die Dreistigkeit im Aburtheilen wundern soll; wie viele Schulen Deutschlands hat denn der Verfasser so genau revidirt, dass er sein wegwerfendes Urtheil auch nur einigermassen begründen könnte?

Was nun den materiellen Inhalt des Buches betrifft, so besteht derselbe, streng genommen, nur in einem auf das nothdürftigste beschränkten und möglichst populär zugerichteten Auszuge aus Euklid. Auf die gewöhnlichen Erklärungen und einfachen Sätze von Linien und Winkeln folgt in Buch 3 die Congruenz der Dreiecke, ferner enthält Buch 4 die Lehre „von *den* Perpendikeln" (sie muss sehr wichtig sein, da ihr der Verfasser ein

besonderes Buch widmet), B. 5: die Parallellinien, B. 6: Summe der inneren und äusseren Winkel einer geradlinigten Figur, B. 7: Vom Kreise, B. 8: Vom Parallelogramm und Flächenmaass, B. 9: Der Pythagoräische Satz,*) B. 10: Von den Proportionallinien, B. 11: Von der Aehnlichkeit der Figuren, B. 12: Proportionen am Kreise, B. 13: Regelmässige Vielecke, Quadratur und Rectification des Kreises. Aeusserst dürftig ist der Inhalt des zweiten Theiles; nach den gewöhnlichen Sätzen von der Lage der Ebenen und Geraden kommt nur die Ausmessung der Körper, wobei die Inhaltsgleichheit zweier Pyramiden von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen einfach daraus geschlossen wird, dass Querschnitte, in gleichen Höhen genommen, gleiche Flächen besitzen.

Von einem Principe der Anordnung des Stoffes, ja auch nur von einem Streben nach Uebersichtlichkeit hat Referent keine Spur entdecken können, und während man sonst in den meisten neueren Werken anerkennenswerthe Versuche zu einer natürlicheren Gruppirung der geometrischen Sätze findet, steht der Verfasser noch auf jenem alten Standpunkte, wo man zufrieden ist, wenn man nur Alles, gleichgültig in welcher Ordnung, bewiesen hat. Möglich, dass dies Manchem für ein in sehr bescheidenen Grenzen gehaltenes Privatstudium genügt; als Schulbuch aber möchten wir Herrn Lübsen's Werk nicht empfehlen. Schlömilch.

*) Der Verfasser erklärt ihn für den wichtigsten der ganzen Geometrie und sagt dann: „Wir haben desshalb auch, dem Pythagoras zu Ehren, diesem Satze ein eignes Buch gewidmet; unter anderen Umständen würden wir ihm (dem Pythagoras oder seinem Satze?) einen Tempel gebaut haben.“

Bibliographie
vom 1. December 1859 bis 1. Februar 1860.

Periodische Schriften.

Abhandlungen, mathematische, der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1858. Berlin, Dümmler's Verlagshandlung in Comm. 1⅓ Thlr.

Abhandlungen, physikalische, der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1858. Ebendas. 6 Thlr.

Mémoires de l'académie impériale des sciences de Pétersbourg. Série 7. Tome I. No. 1—15. Pétersbourg. Leipzig, Voss.

Mémoires présentés à l'académie de Pétersbourg par divers savants. Ebendas. *Tome VIII,* 6 Thlr. *Tome IX.* 6 Thlr. 17 Ngr.

Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du bulletin de l'académie de Pétersbourg. Tome VIII, 1 livr. Ebendas. ⅓ Thlr.

Mélanges physiques et chimiques tirés du bulletin de l'académie de Pétersbourg. Tome III. 5. et 6. livr. Ebendas. 1 Thlr.

Astronomisches Jahrbuch für 1862. Herausgegeben von J. F. Encke unter Mitwirkung von Wolfers. Berlin, Dümmler. 3 Thlr.

Astronomische Nachrichten, begründet von Schumacher, fortgesetzt von A. Hansen und F. Peters. 52. Bd. No. 1 und 2. Hamburg, Perthes, Besser & Mauke. pro compl. 5 Thlr.

Wochenschrift für Astronomie, Meteorologie und Geographie. Neue Folge. 3. Jahrgang. 1860. Herausgegeben von Heis. Halle, Schmidt. pro compl. 3 Thlr.

Archiv der Mathematik und Physik. Herausg. von J. A. Grunert. 34. Theil, 1. Heft. Greifswald, Koch. pro compl. 3 Thlr.

Reine Mathematik.

Mossbrugger, L., Auflösung der algebraischen Gleichungen aller Grade. Aarau, Sauerländer. 27 Ngr.

Schwager, H., Die Elemente der Arithmetik und Algebra. 1. Thl. Besondere Arithmetik. Würzburg, Kellner. ⅚ Thlr.

Zehme, W., Die Geometrie der Körper. Iserlohn, Bädecker. 24 Ngr.

Schrön, L., Siebenstellige gemeine Logarithmen der Zahlen von 1 bis 108000 und der Sinus, Cosinus etc. Nebst einer Interpolationstafel. Braunschweig, Vieweg. 1⅚ Thlr.

HERMITE, *Théorie des équations modulaires, et la resolution de l'équation du cinquième degré. Paris.* 1⅜ Thlr.

Angewandte Mathematik.

BREMIKER, C., Das Risico bei Lebensversicherungen. Berlin, Nicolai'sche Verlagshandlung. ⅜ Thlr.

ROGG, Abriss einer Geschichte der astronomisch-trigonometrischen Vermessungen im südlichen Deutschland und der Schweiz. Tübingen, Fues in Comm. ⅙ Thlr.

TUXEN, G. E. und J. C., Lehrbuch der Navigation mit zugehörigen Tafeln. 2 Bde. Altona, Mentzel, 8 Thlr.

WEISBACH, J., Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik. 3. Thl. 9. und 10. Liefrg. Braunschweig, Vieweg & Sohn. pro Liefrg. 9 — 12 2 Thlr.

WEISBACH, J., Der Ingenieur. Sammlung von Formeln, Tafeln etc. 1. Abth. 3. Aufl. Braunschweig, Vieweg. 24 Ngr.

STEFAN, Ueber ein neues Gesetz der lebendigen Kräfte in bewegten Flüssigkeiten. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 4 Ngr.

KENNGOTT, A., Netze zur Anfertigung von Krystallmodellen. 1. Heft. 6. Aufl. Wien, Lechner. 9 Ngr.

Physik.

Encyclopädie der Physik. Bearb. von BRIX, DECHER etc. Herausg. von KARSTEN. 6. Liefrg. Leipzig, Voss. 2⅝ Thlr.

Fortschritte der Physik im Jahre 1857. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. 13. Jahrg. Redigirt von A. KRÖNIG und O. HAGEN. 2. Abth. Berlin, Reimer. 1⅝ Thlr.

KUNZEK, A., Lehrbuch der Physik mit mathematischer Begründung. 2. Aufl. Wien, Braumüller. 3⅝ Thlr.

MORITZ, A., Lebenslinien der meteorologischen Stationen am Kaukasus. Petersburg, Leipzig, Voss. ⅓ Thlr.

PÉCLET's vollständiges Handbuch über die Wärme und deren Anwendungen. Nach der 3. Aufl. des Originals deutsch bearbeitet von HARTMANN. 1. Lief. Leipzig, Gerhard. 1½ Thlr.

ARAGO's Werke. Herausgegeben von W. G. HANKEL. 8. Bd. Leipzig, O. Wigand. 1⅙ Thlr.

FECHNER, G. Th., Elemente der Psychophysik. 1. Thl. Leipzig, Breitkopf & Härtel. 1 Thlr. 24 Ngr.

ARAGO, F., *Oeuvres complètes, publiées par* A. BARRAL. *Tome XI.* Leipzig, O. Weigel. 2 Thlr.

Mathematisches Abhandlungsregister.

Ueber die Abkürzungen und sonstige Einrichtung dieses Registers vergl. Bd. IV dieser Zeitschrift. Auf Register eines anderen Bandes als des laufenden wird von nun an durch die dem betreffenden Bande zukommende römische Ziffer verwiesen. Eine arabische Abhandlungsziffer ohne römische Ziffer bezieht sich stets auf den laufenden Band.

1859.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Analytische Geometrie der Ebene.

1. Ueber eine auf die Bestimmung der Lage der Punkte in einer Ebene durch ihre Entfernungen von zwei gegebenen festen Punkten gegründete analytische Geometrie mit Rücksicht auf niedere Geodäsie. Grunert. Grun. Archiv XXXII, 444.
2. *Sur les coordonnées courvilignes planes quelconques. Aoust. Compt. rend. XLVIII,* 842.
3. Weitere Untersuchungen über Grenzverhältnisse bei Curven. Völler. Grun. Archiv XXXII, 97. [Vergl. Bd. IV, No. 248.]
4. Ueber einen allgemeinen Satz aus der Curvenlehre. Weiler. Grun. Archiv XXXII, 418 [vergl. Bd. IV, No. 248].
5. *Sur le nombre des points multiples d'une curbe algébrique. Abel Transon. N. ann. math. XVIII,* 142.
6. *On the forms of infinite branches of curves. Frost. Quart. Journ. Math. III,* 164.
7. *Démonstration de deux theorèmes de M. Steiner se rapportant aux normales abaissées de deux points sur une courbe du degré n et aux angles droits circonscrits à cette courbe. Dewulf. N. ann. math. XVIII,* 174.
8. *Note on the incipient caustic. Holditch. Quart. Journ. Math. III,* 88.
9. *On the* n^{th} *caustic by reflexion from a circle. Holditch. Quart. Journ. Math. II,* 301.
10. *Theorems on polar conics with respect to curves of the third class. Smith. Quart. Journ. Math. II,* 327.
11. *On the intersection of tangents drawn trough two points on a curve of the third degree. S. Roberts. Quart. Journ. Math. III,* 118.

Vergl. Ellipse, Kegelschnitte, Kreis, Krümmungskreis, Normale, Quadratur.

Analytische Geometrie des Raumes.

12. Die Theorie der Pole und Polaren bei Curven höherer Ordnung; mit einer Einleitung: Zwei Coordinatensysteme. W. Fiedler. Zeitschr. Math. Phys. IV, 93.
13. Ueber drei geometrische Transformationen. O. Böklen. Grun. Archiv XXXII, 83.
14. Ueber die mittleren Radien der Linien, Flächen und Körper. Drobisch. Zeitschr. Math. Phys. IV, 1.
15. *Sur quelques formules qui peuvent être utiles dans la théorie des surfaces courbes. Baehr.* Grun. Archiv XXXII, 221.
16. *Théorème sur le cône. A. A. Terquem. N. ann. math. XVIII,* 205.
17. *On curves of the third order. Salmon. Phil. Mag. XVII,* 71.

18. *Sulle linee del terz'ordine a doppia curvatura.* Cremona. *Annali mat. II,* 19.
Vergl. Cubatur, Geodäsie, Isotherme Linien, Krümmungskreis, Loxodromische Linie, Normale, Oberflächen, Oberflächen 2ter Ordnung, Sphärik.

Astronomie.

19. *Proposition in the planetary theory.* Frost. *Quart. Journ. Math II,* 353.
20. *The planetary theory.* Frost. *Quart. Journ. Math. II,* 358.
21. Ueber die Berechnung der planetarischen Störungen. Grunert. Astr. Nachr. L, 33.
22. Allgemeine Störungen der Metis. Lesser. Astr. Nachr. L, 193.
23. Ueber die Gauss'sche Auflösung des Keppler'schen Problems. Strehlke. Grun. Archiv XXXII, 433.
24. *Calcul de l'accélération séculaire du moyen mouvement de la lune.* Adams. *Compt. rend. XLVIII,* 247.
25. *Calcul de l'accélération séculaire du moyen mouvement de la lune.* Delaunay. *Compt. rend. XLVIII,* 817.
26. *Equations of motion of the moon.* Mc Clean. *Quart. Journ. Math III,* 86.
Vergl. Geschichte der Mathematik 87.

Attraction.

27. *Note of the theory of attraction.* Cayley. *Quart. Journ. Math. II,* 338.
28. *On Rodrigues' method for the attraction of ellipsoids.* Cayley. *Quart. Journ. Math. II,* 333.

B.

Bestimmte Integrale.

29. *Sur un cas spécial, qui se présente dans la transformation des intégrales multiples.* Bouniakowsky. *Petersb. Acad. Bull. XVII,* 437.
30. *Sur les intégrales trinomes.* Besge. *Journ. Mathém. XXIV,* 194.
31. *Sur une intégrale définie multiple.* Liouville. *Journ. Mathém. XXIV,* 155.
32. Bemerkungen über ein vielfaches Integral. Genocchi. Zeitschr. Math. Phys. IV, 75.
33. *On the multiple integral* $\int^n dx\, dy \ldots dz$. Schlaefli. *Quart. Journ. Math. II,* 269, *III,* 54, 97.
Vergl. Imaginäres 109, 110, Reihen 193.

Biquadratische Form.

34. *Composizione di una funzione biquadratica ed a quattro indeterminate.* Tortolini. *Annali mat. II,* 9.

Brennlinie.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 9.

C.

Combinatorik.

35. *On the classification of polygons of a given number of sides.* De Morgan. *Quart. Journ. Math. II,* 340.

Cubatur.

36. Ueber die Inhaltsberechnung der Körper. Ligowsky. Grun. Archiv XXXII, 241.
Vergl. Quadratur 180, Stereometrie 219.

Cubische Formen.

37. *Sur la réduction des formes cubiques à deux indéterminées.* Hermite. *Compt. rend. XLVIII,* 351.

D.

Determinanten.

38. *La teorica dei covarianti e degli invarianti delle forme binarie e le sue principali applicazioni.* Brioschi. *Annali mat. II,* 82 [vgl. Bd. IV, No. 347].

39. *Sur l'Invariant le plus simple d'une fonction quadratique bi-ternaire et sur le Résultant de trois fonctions quadratiques ternaires.* Cayley. Crelle LVII, 139.
40. *Il Determinante di Sylvester ed il risultante di Eulero.* Hesse. *Annali mat. II*, 5.
41. Vergleich zweier Formen der Eliminations-Resultante. Borchardt. Crelle LVII, 183.
42. *Théorème de Michael Roberts.* *Del Beccaro.* *N. ann. math. XVIII*, 73.
43. Ueber die Determinante $\Sigma \pm (a_0 + b_0)^p (a_1 + b_1)^p \ldots (a_n + b_n)^p$. Zehfuss. Zeitschr. Math. Phys. IV, 233.
Vergl. Gleichungen, Sturm's Function.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

44. *Application de la nouvelle analyse aux surfaces du second ordre.* Painvin. *N. ann. math. XVIII*, 33, 49, 89.
45. *Etant données trois courbes planes de l'ordre m trouver le lieu des points de contact des courbes d'ordre m qui passent par les points d'intersection des courbes A et B touchant la troisième C.* Faure. *N. ann. math. XVIII*, 237.
46. *Equation d'un cercle touchant des droites.* Cayley. *N. ann. math. XVIII*, 222.
47. Ueber das grösste Tetraeder, welches sich einem Ellipsoid einschreiben lässt. S. Spitzer. Grun. Archiv XXXII, 194.

Differentialgleichungen.

48. Integration einiger Gleichungen durch Aufsuchung des integrirenden Factors. Wolfers. Grun. Archiv XXXII, 239.
49. *On the integrating factor of* $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$. *De Morgan.* *Quart. Journ. Math. II*, 323.
50. Zur Integration einiger linearen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung. Weiler. Grun. Archiv XXXII, 184.
51. *Sur une équation différentielle.* Besge. *Journ. Mathém. XXIV*, 72.
52. Note über Differentialgleichungen. S. Spitzer. Grun. Archiv XXXII, 127.
53. Studien über Differentialgleichungen. S. Spitzer. Zeitschr. Math. Phys. IV, 37.
54. Ueber die Integration der Differentialgleichung $x^m \cdot \frac{d^n y}{dx^n} = \pm y$ durch bestimmte Integrale. S. Spitzer. Crelle LVII, 82 [vergl. Bd. IV, No. 375].
55. *Note sur l'intégration des équations de la forme* $x^m \cdot \frac{d^n y}{dx^n} = \varepsilon y$ *par des intégrales définies,* ε *désignant le nombre* ± 1, *m et n des nombres entiers et positifs soumis à la condition* $m > n$. *S. Spitzer.* *Compt. rend. XLVIII*, 746.
56. *Note sur les équations de la forme* $\xi^m \frac{d^n z}{d\xi^n} = \alpha z$ *dans lesquelles* α *est un nombre constant.* *S. Spitzer.* *Compt. rend. XLVIII*, 995.
57. Aufsuchung derjenigen Differentialgleichung, welcher durch eine gegebene Function genügt wird. S. Spitzer. Zeitschr. Math. Phys. IV, 73.
Vergl. Hypergeometrische Reihe, Isotherme Linien, Mechanik 150, Singuläre Auflösungen.

Differenzengleichungen.

58. Neue Integrationsmethode für Differenzen-Gleichungen, deren Coefficienten ganze algebraische Functionen der unabhängig Veränderlichen sind. S. Spitzer. Grun. Archiv XXXII, 334.

E.

Ellipse.

59. Construction der Ellipse durch Zusammenfügung von vier Linealen. Grunert. Grun. Archiv XXXII, 355.
60. *On the conjugate diameters of an ellipse.* Smythe. *Quart. Journ. Math. III*, 185.
61. *On the coincidence of the two rays in a doubly refracting medium.* Wace. *Quart. Journ. Math. III*, 47.

Elliptische Functionen.

Vergl. Gleichungen 96.

F.

Functionen.

62. *Sur les fonctions rationelles linéaires prises suivant un module premier et sur les substitutions auxquelles conduit la considération de ses fonctions.* J. A. Serret. *Compt. rend. XLVIII,* 112, 178, 237.

63. *Mémoire sur le nombre des valeurs que peut acquérir une fonction.* Mathieu. *Compt. rend. XLVIII,* 810 [vergl. Bd. IV, No. 327].

64. $\log(n+1) < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < 1 + \log(n+1)$. Michaux. *N. ann. math. XVIII,* 69. — Astier. *ibid* 71. — Lemmonnier. *ibid.* 150. — Schloemilch *ibid.* 172.

65. *Sur la limite de* $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$. De Montebello. *N. ann. math. XVIII,* 66. — Chabirand. *ibid.* 147.

66. *Sur la fonction* $y = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$. Genocchi. *N. ann. math. XVIII,* 118.

Vergl. Gammafunctionen, Imaginäres, Sturm's Function, Trigonometrie 222.

G.

Gammafunction.

67. Ueber eine mit der Gammafunction verwandte Transcendente und deren Anwendung auf die Integralrechnung. Kinkelin. Crelle LVII, 122.

Geodäsie.

68. Formeln zur Berechnung der geodätischen Breiten, Längen und Azimuthe auf dem Erdsphäroid. v. Andrä. Astr. Nachr. L, 161.

Geometrie (descriptive).

69. Neue analytische Entwicklung der Theorie der stereographischen Projection mit neuen Sätzen und Formeln und neuen Eigenschaften derselben. Grunert. Grun. Archiv XXXII, 250.

Geometrie (höhere).

70. *Transformation des propriétés métriques des figures.* Fauré. *N. ann. math. XVIII,* 181.

71. *Généralisation de la théorie de l'involution.* De Jonquières. *Annali mat. II,* 86.

72. *Note sur le nombre de coniques qui sont determinées par cinq conditions, lorsque, parmi ces conditions, il existe des normales données.* De Jonquières. *Journ. Mathém. XXIV,* 49.

73. Ueber einige geometrische Sätze. v. Staudt. Crelle LVII, 88.

74. *Solution de deux problèmes de géométrie à trois dimensions* De Jonquières. *Journ. Mathém. XXIV,* 81.

75. *Note sur les cubiques gauches.* Cremona. *N. ann. math. XVIII,* 199.

76. Zur Theorie der dreiseitigen Pyramide. Joachimsthal. Grun. Archiv XXXII, 107 [vergl. Bd. IV, 458].

Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung, Kegelschnitte.

Geschichte der Mathematik.

77. *Considérations sur les porismes en général et sur ceux d'Euclide en particulier. Examen et réfutation de l'interprétation donnée par M.* Breton *(de Champ) aux textes de Pappus et de Proclus relatifs aux porismes.* A. J. H. Vincent. *Journ. Mathém. XXIV,* 9.

78. *Question des porismes.* Breton *(de Champ). Journ. Mathém. XXIV,* 153.

79. Zur Biographie Kepler's. Michael. Astr. Nachr. L, 17.

80. *Sur l'invention des exposants fractionnaires ou incommensurables.* Prouhet. *N. ann. math. XVIII, Bulletin de bibl.* 42.

81. *Note historique supplémentaire sur le calcul de* π. Bierens de Haan. *N. ann. math. XVIII, Bulletin de bibl.* 46.

82. Biographie von Abraham Sharp. Grunert. Grun. Archiv XXXII, 237. — *N. ann. math. XVIII. Bulletin de bibl.* 47.

83. *Sur la rectification de la méthode d'approximation de Newton.* Prouhet. N. ann. math. XVIII, Bulletin de bibl. 39.
84. Necrolog von Gustav Lejeune-Dirichlet. Borchardt. Crelle LVII, 91.
85. Necrolog von Wichmann. Peters. Astr. Nachr. L, 79.
86. Necrolog von Johnson. Slatter. Astr. Nachr. L, 113.
87. Bemerkung über die Nomenclatur der Asteroiden. Laugier Astr. Nachr. L, 27.

Gleichungen.

88. *A proof that every equation has as many roots as it has dimensions.* Challis. Phil. Mag. XVII, 112. — Airy. ibid. 177. — Challis. ibid. 283.
89. *Critérium pour q'une équation du degré n ait au moins un couple de racines imaginaires.* Brault. N. ann. math. XVIII, 217.
90. Einfachere Ableitung der früher mitgetheilten Sätze über die reellen Wurzeln der dreigliedrigen algebraischen Gleichungen. Drobisch. Zeitsch. Math. Phys. IV, 66.
91. *Sur la limite supérieure des racines négatives déduites de la formule aux différences de Newton.* Vitasse. N. ann. math. XVIII, 213.
92. *Sur la résolution par radicaux des équations dont le degré est une puissance d'un nombre premier.* Betti. Compt. rend. XLVIII, 182.
93. Zur Auflösung der cubischen Gleichungen. Spitz. Grun. Archiv XXXII, 435.
94. *Méthode pour la résolution des équations littérales du troisième et du quatrième degré.* Jourdain. Journ. Mathém. XXIV, 205.
95. *Note sur les équations du quatrième degré.* Michael Roberts. N. ann. math. XVIII, 87.
96. Die Transformation und Auflösung der Gleichungen fünften Grades nach Jerrard und Hermite. Zeitschr. Math. Phys. IV, 77.
97. *Note sur la résolution de l'équation du cinquième degré.* P. Joubert. Compt. rend. XLVIII, 290.
98. *Observations on the theory of equations of the fifth degree.* Cockle. Phil. Mag. XVII, 356.
99. Ueber ein die Elimination betreffendes Problem. Borchardt. Berl. Acad. Ber. 1859, 376. — Crelle LVII, 111.
Vergl. Determinanten.

H.

Homogene Functionen.

100. Neue Eigenschaften der linearen Substitutionen, welche gegebene homogene Functionen des zweiten Grades in andere transformiren, die nur die Quadrate der Variabeln enthalten. Hesse. Crelle LVII, 175.

Hydrodynamik.

101. *On the central motion of an elastic fluid and on the theory of Tartini's beats.* Challis. Phil. Mag. XVII, 21.
102. Ueber Diffusion von Salzlösungen im Wasser. Beez. Zeitschr. Math. Phys. IV, 212.
103. Ueber das Gleichgewicht schwimmender Körper. Clebsch. Crelle LVII, 149.
104. Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. Helmholtz. Crelle LVII, 1.

Hyperbel.

Vergl. Functionen 65.

Hypergeometrische Reihe.

105. Ueber die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe. S. Spitzer. Crelle LVII, 78. — Borchardt. ibid. 81.
Vergl. Differentialgleichungen 54.

I.

Imaginäres.

106. *Sur le sens géométrique des quantités imaginaires.* Zehfuss. Grun. Archiv XXXII, 234.

107. Die Rechnung mit Richtungszahlen. Riecke. Grun. Archiv XXXII, 470.
108. *Quaternion investigations connected with Fresnel's wavesurface.* Tait. *Quart. Journ. Math. III,* 190
109. *Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires.* Marie. *Journ. Mathém. XXIV,* 121.
110. *Sur les fonctions d'une variable imaginaire.* Bertrand. *Compt. rend. XLVIII,* 427

Interpolation.

111. *Sur l'interpolation.* Hermite. *Compt. rend. XLVIII,* 63.
112. *Sur l'interpolation.* Rouché. *N. ann. math. XVIII,* 26.
113. Ueber das Interpolationsproblem. Grunert. Grun. Archiv XXXII, 149.
Vergl. Gleichungen 99.

Isotherme Linien.

114. *Nouvelle théorie générale des lignes isothermes.* Haton de la Goupillière. *Compt rend. XLVIII,* 621.

K.

Kegel.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 16.

Kegelschnitte.

115. Ueber drei characteristische Eigenschaften der Kegelschnittslinien. Zampieri. Grun. Archiv XXXII, 319. — Grunert. ibid. 330.
116. *Conique donnée par des points ou des tangentes.* De Jonquières. *N. ann. math. XVIII,* 215.
117. Neue Methode, durch beliebig gegebene Punkte Berührende an Kegelschnitte zu ziehen. Grunert. Grun. Archiv XXXII, 425.
118. *On the equation to the asymptotes of any conic section* $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. Wolstenholme. *Quart. Journ. Math. III,* 182.
119. *On the conics which touch four given lines.* Cayley. *Quart. Journ. Mathém. III,* 94.
120. *Sur le triangle inscrit et circonscrit.* Hart. *N. ann. math. XVIII,* 166.
121. *Théorème sur un angle droit, dont le sommet est sur une courbe du second ordre.* Beynac. *N. ann. math XVIII,* 85.
122. *Lieu géométrique de certain point dans les coniques.* Terquem. *N. ann. math. XVIII,* 163.
123. *Par un point fixe donnée dans le plan d'une conique passe une sécante mobile; trouver le lieu géométrique du point d'intersection des deux normales menées à la conique aux deux points où la sécante coupe la conique.* A Terquem. *N. ann. math. XVIII,* 77.
124. Ueber die Bestimmung der vier gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte. Spitz. Grun. Archiv XXXII, 198.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 10, Ellipse, Geometrie, höhere 7, Hyperbel, Krümmungskreis 132, Normale 159, 160, Parabel, Sphärik 211, Verwandtschaft 229.

Kettenbrüche.

Vergl. Reihen 196, 197, Zahlentheorie 242.

Kreis.

125. *Trouver l'équation du cercle, qui coupe à angle droit trois cercles donnés.* Souillart. *N. ann. math. XVIII,* 224. — Chabiraud. *ibid.* 230.
126. *On a particular case of Castillon's problem.* Cayley. *Quart. Journ. Math. III,* 157.
127. *Sur les quatre cercles qui touchent trois côtés d'un triangle. N. ann. math. XVIII,* 223.
128. *Des relations qui existent entre les rayons des huit cercles tangents à trois autres, et entre les rayons des seize sphères tangentes à quatre autres.* Mention. *Petersb. Acad. Bull. XVII,* 465, 481.
129. Ueber die Relation zwischen der Entfernung der Mittelpunkte und den Halbmessern zweier Kreise, von denen der eine um und der andere in dasselbe Vieleck beschrieben ist. Grunert. Grun. Archiv XXXII, 68.
130. *On the circular points at infinity.* S. Roberts. *Quart. Journ. Math. III,* 90.

Krümmungskreis.

131. *Note on the radius of absolute curvature at any point of a curve.* *Quart. Journ. Math. II*, 356.
132. *On the circle of curvature of a conic section.* Smythe. *Quart. Journ. Math. III*, 183.
133. Ueber Krümmungshalbmesser. Lobatto. Grun. Archiv XXXII, 121 [vgl. Bd. IV, No. 138].
134. *Des centres de courbure successifs.* Haton de la Goupillière. *Journ. Mathém. XXIV*, 183.
135. *Propriétés des lignes de courbure de l'ellipsoide.* Aoust. *Compt. rend. XLVIII*, 886.
136. *Recherches géométriques relatives au lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe, qui roule sur une droite.* Mannheim. *Journ. Mathém. XXIV*, 93.
137. *Sur la courbure d'une série de surfaces et de lignes.* Hirst. *Annali mat. II*, 95.

L.

Logarithmen.

138. *On the logocyclic curve and the geometrical origin of logarithms.* Booth. *Quart. Journ. III*, 38, 127.

Loxodromische Linie.

139. Theorie der loxodromischen Linien auf dem Ellipsoid und auf der Kugel. Flegemann. Grun. Archiv XXXII, 1.

M.

Maxima und Minima.

140. *Dei criteri per distinguere i massimi dei minimi valori di una funzione.* Brioschi. *Annali mat. II*, 61.
141. Zwei Sätze über das grösste Product aus ganzen Zahlen von gegebener Summe. Oettinger. Crelle LVII, 90.
142. *Sur une question de minimum relative aux polygones réguliers.* Morgue. *N. ann. math. XVIII*, 158.
143. Ueber grösste einem Ellipsoide eingeschriebene eckige Körper. S. Spitzer. Grun. Archiv XXXII, 439.
Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 47.

Mechanik.

144. *Sur le principe de la moindre action.* Braschmann. *Petersb. Acad. Bull. XVII*, 487.
145. Entwicklungen über ein Kapitel von Poisson's Mechanik nach J. Liouville. Fiedler. Zeitschr. Math. Phys. IV, 49.
146. *Sur la manière de ramener à la dynamique des corps libres celle des corps qu'on suppose gênés par des obstacles fixes.* Poinsot. *Journ. Mathém. XXIV*, 171.
147. *On motion and acceleration of motion.* Frost. *Quart. Journ. Math. III*, 71.
148. *On the motion of a body referred to moving axes.* Slesser. *Quart. Journ. Math. II*, 341.
149. *Sur la quantité de mouvement, qui est transmise à un corps par le choc d'un point massif qui vient le frapper dans une direction donnée.* Poinsot. *Journ. Mathém. XXIV*, 161.
150. *Direct demonstration of Jacobi's canonical formulae for the variation of elements in a disturbed orbit.* Hayward. *Quart. Journ. Math III*, 22.
151. *Theoretical considerations respecting the relation of pressure to density.* Challis. *Phil. Mag. XVII*, 401.
152. Ueber die Gleichgewichtsfigur eines biegsamen Fadens. Clebsch. Crelle LVII, 93.
153. *Note on the equilibrium of flexible surfaces.* Besant. *Quart. Journ. Math. III*, 68.
154. *Mémoire sur la poussée des terres avec ou sans surcharge.* Saint-Guilhem. *Journ. Mathém. XXIV*, 57.
155. Ueber den geometrischen Zusammenhang der Maschinen. Noeggerath. Zeitschr. Math. Phys. IV, 171.
Vergl. Astronomie, Attraction, Hydrodynamik, Schwerpunkt, Trägheitsmoment.

Methode der kleinsten Quadrate.

156. *Sur un instrument destiné à faciliter l'application numérique de la méthode des moindres carrés et à contrôler les résultats obtenus par cette méthode.* Bouniakowsky. *Petersb. Acad. Bull. XVII,* 289.

Modulargleichungen.

157. *Sur la théorie des équations modulaires.* Hermite. *Compt. rend. XLVIII,* 940
158. *Sur l'abaissement de l'équation modulaire de huitième degré.* Hermite. *Annali mat. II,* 59. — Kronecker. *ibid.* 131.

N.

Normale.

159. Ueber die Normalen der Kegelschnitte. Grunert. Grun. Archiv XXXII, 129.
160. *Sur les normales aux courbes du second ordre.* Mention. *Petersb. Acad. Bull. XVII,* 305.
161. *Sur une surface engendrée par des normales.* Terquem. *N. ann. math. XVIII,* 192.

O.

Oberflächen.

162. *Investigation of the conditions for an umbilicus.* Stone *Quart. Journ Math. III,* 146.
163. *On the wave surface.* Cayley. *Quart. Journ. Math III,* 16, 142.
164. *Mémoire sur la figure de la terre considérée comme peu différente d'une sphère.* Ossian Bonnet. *Annali mat. II,* 46, 113.
165. *Intorno alle superficie della seconda classe inscritte in una stessa superficie sviluppabile della quarta classe.* Cremona. *Annali mat. II.* 65.
166. *Des vingt-sept droites, qui en général existent sur une surface du troisième degré.* De Jonquières. *N. ann. math XVIII,* 129.
167. *Sur quelques propriétés des surfaces du troisième ordre.* Brioschi. *N. ann. math. XVIII,* 138.
Vergl. Imaginäres 108, Mechanik 153.

Oberflächen zweiten Grades.

168. Ueber den mittleren Radius des dreiachsigen Ellipsoides. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. IV, 242.
169. *Propriétés focales des surfaces du deuxième ordre d'après Mr. Heilermann.* Dewulf. *N. ann. math. XVIII,* 46.
170. *Sui punti focali nelle superficie di secondo grado.* Del Beccaro. *Annali mat. II,* 30.
171. *On a property of confocal surfaces of the second degree.* Ferrers. *Quart. Journ. Math. III,* 155.
172 Ueber confocale Ellipsoide. Zehfuss. Zeitschr. Math. Phys. IV, 166.
Vergl Attraction 28, Determinanten in geometrischer Anwendung 47, Geometrie, höhere, 74, Loxodromische Linie, Maxima und Minima 143.

Operationscalcül.

173. *On an application of the calculus of operations to the transformation of trigonometric series.* Donkin. *Quart. Journ. Math. III,* 1.
174. *A theorem in the calculus of operations with some applications.* Greer. *Quart. Journ. Math. III,* 148.

P.

Parabel.

Vergl. Quadratur 190, 191.

Perspective.

175. Neue Methode zur Entwerfung perspectivischer Zeichnungen nebst einer streng wissenschaftlichen Darstellung der Perspective überhaupt. Grunert. Grun. Archiv XXXII, 361.

Planimetrie.

176. Construction der mittleren Proportionale. Krüger. Grun. Archiv XXXII, 355 [vergl. Bd. IV, No. 433].

177. Ueber den goldnen Schnitt. Grunert. Grun. Archiv XXXII, 360.
178. Ueber den Fermat'schen geometrischen Lehrsatz. Blindow. Grun. Archiv XXXII, 125.
179. Ueber eine Aufgabe der Elementargeometrie. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. IV, 244.
180. Ueber eine durch einen Eckpunkt eines Dreiecks gezogene Linie. Lobatto. Grun. Archiv XXXII, 123. — Blindow ibid. 124. (Vgl. Bd. IV. No. 193 u. 430.)
181. Die Verhältnisse der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks zu bestimmen, in dem sich die Abschnitte der Hypotenuse, in welche dieselbe von dem auf sie von der Spitze des rechten Winkels gefällten Perpendikel getheilt wird, wie $m:n$ verhalten. Grunert. Grun. Archiv XXXII, 479.
182. *Théorème sur des transversales en nombre impair passant par un même point.* *Poitrasson. N. ann. math. XVIII,* 184. — *De Chauliac et De Boysson. ibid.* 207.
183. *Si on prend deux points quelconques M et N sur les lignes AB, CD, qu'on tire les droites NFA, NEB, MED, MFC, qu'on joigne EF, cette droite pivote autour d'un point fixe. Vernier. N. ann. math. XVIII,* 108. — *Fort. ibid* 110. — *Poitrasson. ibid.* 186.
Vergl. Imaginäres 107.

Potential.

184. *Mémoire sur la théorie du potentiel cylindrique. Haton de la Goupillière. Compt. rend. XLVIII,* 345.
185. *Nouvelle théorie générale du potentiel cylindrique. Haton de la Goupillière. Compt. rend. XLVIII,* 988.
Vergl. Hydrodynamik 104.

Q.

Quadratische Form.

186. *Sur la réduction des formes quadratiques positives à trois indéterminées entières. Lejeune-Dirichlet. Journ. Mathém. XXIV,* 209.
187. Ueber eine symbolische Formel, die sich auf die Zusammensetzung der binären quadratischen Formen bezieht. Schlaefli. Crelle LVII, 170.
188. *Sur la forme* $x^2+y^2+5(z^2+t^2)$. *J. Liouville. Journ. Mathém. XXIV,* 47.

Quadratur.

189. *Note on areas and volumes in trilinear and quadriplanar coordinates. Slesser. Quart. Journ. Math. II,* 357.
190. Ueber einen allgemeinen Satz von den Flächen ebener Curven. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. IV, 163.
191. Neue Methode die Quadratur der Parabel zu bestimmen. Völler. Grun. Archiv XXXII, 420.
192. *Sur une aire logarithmique. Vernier. N. ann. math XVIII,* 148.
Vergl. Functionen 65, Stereometrie 214.

R.

Reihen.

193. Ueber die Discontinuität gewisser unendlicher Reihen. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. IV, 161.
194. *Note sur les séries divergentes. Catalan. N. ann. math. XVIII,* 195.
195. Ueber Summirung einer gewissen Art von Reihen. Lottner. Grun. Archiv XXXII, 111 [vergl. Bd. IV, No. 234].
196. *Sur une nouvelle série. Tchébychef. Petersb. Acad. Bull. XVII,* 257.
197. *Série de Tchebichef. N. ann. math. XVIII,* 193.
198. *Sur la série de Schwab. De Virieu. N. ann. math. XVIII,* 234.
199. $1-\frac{A(A-a)}{a\,b}+\frac{A(A-a)(A-b)}{a.b.c}+\ldots=0$, *quand un des facteurs* $A-a, A-b, A-c$ .... *devient nul. N. ann. math. XVIII,* 219.
200. *Sur l'équation* $0=1^p-\frac{m^p}{1^p}+\frac{m^p(m^p-1^p)}{1^p.2^p}-\ldots$ *Francoise. N. ann. math. XVIII,* 233.

201. *Sur la valeur de la somme* $\frac{1}{a^m}+\frac{1}{b^m}+\frac{1}{c^m}+\ldots+\frac{1}{l^m}$, *a b ... l étant les termes d'une progression arithmétique croissante.* *Lebesgue.* *N. ann. math. XVIII,* 82.

202. *Sur une série dont la somme est* $\frac{4}{\pi}$. *De Virieu.* *N. ann. math. XVIII,* 129. — *Genocchi ibid.* 161.
Vergl. Operationscalcül, Trigonometrie 223.

S.

Schifffahrtskunde.

203. Ueber die Schifffahrt auf dem grössten Kreise, ein Beitrag zur Nautik. Grunert. Grun. Archiv XXXII, 305.

Schwerpunkt.

204. Elementare Ableitung der Guldin'schen Regel. Grunert. Grun. Archiv XXXII, 348.

205. Ueber den Schwerpunkt eines dreieckigen gleichmässig beschwerten Rahmens. Strehlke. Grun. Archiv XXXII, 433.

Singuläre Auflösungen.

206. *Note on the singular solutions of differential equations* *Cayley.* *Quart Journ. Math. III,* 36.

207. Eine Bemerkung über die besonderen Auflösungen der Differentialgleichung der zweiten Ordnung mit zwei Veränderlichen. Weiler. Grun. Archiv XXXII, 286.

Sphärik.

208. *Formules fondamentales de l'analyse sphérique.* *Vannson.* *N. ann. mat. XVIII,* 5 [vergl. Bd. IV, No. 456].

209. Ueber die Gleichheit des Flächenraumes bei symmetrischliegenden sphärischen Scheiteldreiecken. Féaux, Grunert. Grun. Archiv XXXII, 118.

210. Die Radien der in und um die regulären Polyeder beschriebenen Kugeln. Sommer. Grun Archiv XXXII, 289.

211. *On a theorem relating to spherical conics.* *Cayley.* *Quart. Journ Math. III,* 53.
Vergl. Kreis 128, Loxodromische Linie, Schifffahrtskunde.

Stereometrie.

212. *On Poinsot's four new regular solids.* *Cayley.* *Phil Mag. XVII,* 123, 209.

213. *Remarques sur la pyramide triangulaire.* *Mention.* *Petersb. Acad. Bull XVII,* 113.

214. Ueber den Mantel eines Kugelrumpfes. Escher. Grun. Archiv XXXII, 188.

215. *Proposition on the tetrahedron.* *Wolstenholme.* *Quart. Journ Math III,* 89.

216. *Sur les hauteurs d'un tetraèdre.* *De Chauliac et Pugens.* *N. ann. math. XVIII.* 206.

217. *Théorème sur les hauteurs du tétraèdre.* *Chordonnet et Darboux.* *N. ann. math. XVIII,* 232.

218. *Determination of the mutual inclination of two opposite edges of a tetrahedron in terms of the magnitudes of the edges.* *Quart. Journ. Math. III,* 145.

219. *Sur le volume d'un tétraèdre.* *De Chauliac et Pugens.* *N. ann. math. XVIII,* 204.

Sturm's Functionen.

220. *Demonstration of a theorem of Mr. Cayley's in relation to Sturm's functions.* *Zeipel.* *Quart. Journ. Math. III.* 108.

T.

Trägheitsmoment.

221. Zur Theorie der Trägheitsmomente und der Drehung um einen Punkt. Clebsch. Crelle LVII, 73.

Trigonometrie.

222. Beweis der allgemeinen Gültigkeit der Formeln für *sin* $(\alpha+\beta)$ und *cos* $(\alpha+\beta)$. Spitz, Grun. Archiv XXXII, 293.

223. *Geometrical summation of two trigonometric series.* *Croker.* *Quart. Journ. Math. III,* 181.

224. **Bestimmung eines Dreiecks aus der Grundlinie, der Höhe und der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten. Grunert. Grun. Archiv XXXII, 478.**
225. *Solution nouvelle de deux problèmes relatifs au triangle.* **Mention.** *Petersb. Acad. Bull. XVII*, 310
226. *De problemate quodam geometrico* **Lindmann** Grun. Archiv XXXII, 94.
227. Zu der Lehre vom Viereck. Baur. Zeitschr. Math. Phys. IV, 236.
228. *Note on a theorem in spherical trigonometry* **Cayley.** *Phil. Mag. XVII*, 151. — **Airy.** *ibid.* 176.
Vergl. Sphärik 209.

V.

Variationsrechnung.

Vergl. Mechanik 152.

Verwandtschaft.

229. *On a theorem relating to homographic figures* **Cayley.** *Quart. Journ. Math. III.* 177.
230. *Relation circulaire de* **Moebius.** *N. ann. math XVIII*, 167.

Z.

Zahlentheorie.

231. *Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres.* **Liouville.** *Journ. Mathém. XXIV*, 1, 73, 111, 195 [vergl. Bd. IV, No. 483].
232. Eine unbestimmte Aufgabe. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. IV, 232.
233. *Trouver un triangle dont les côtés et la surface forment une équidifférence en nombres entiers.* **Lebesgue.** *N ann. math. XVIII*, 44.
234. Der Fermat'sche und der Wilson'sche Satz aus einer gemeinschaftlichen Quelle abgeleitet. Toeplitz. Grun. Archiv XXXII, 104.
235. *Le produit de quatre nombres entiers en progression arithmétique ne saurait être le bicarré d'un nombre rationnel* **Berton.** *N. ann. math. XVIII*, 191.
236. *Sur la possibilité de la décomposition des nombres en trois carrés.* **Lejeune-Dirichlet.** *Journ Mathém. XXIV*, 233.
237. *Trouver, parmi les puissances parfaites des nombres entiers, celles qui ont pour racines la somme des chiffres nécessaire à leur expression dans un système de numération donné.* **Berton.** *N. ann mat. XVIII*, 209.
238. Ueber vollkommene Zahlen. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. IV, 160.
239. *Sur la transformation des modules dans les congruences du premier degré.* **Bouniakowsky** *Petersb. Acad. Bull. XVII*, 128.
240. *Transformation des modules dans les congruences du premier degré* **Bouniakowsky.** *N. ann mat. XVIII*, 168.
241. *Resolutio congruentiarum primi gradus per formulas novas.* **Zehfuss.** Grun. Archiv XXXII, 422.
242. *Sur l'équation $x^2 - ny^2 = 1$ dans laquelle on suppose que n représente un nombre entier, positif, non carré.* **Gerono.** *N. ann. math XVIII*, 122, 153.
243. *On the equation* $P(n) + E\left(\frac{m}{m-1}\right) P(1) + E\left(\frac{m}{m-2}\right) . P(2) + \ldots + E(m) = \frac{m(m+1)}{2}$. **Sylvester.** *Quart. Journ. Math. III*, 186.
244. Ueber den biquadratischen Charakter der Zahl „zwei". Dirichlet. Crelle LVII, 187.
245. *Démonstration de l'irréductibilité de l'équation aux racines primitives de l'unité.* **Lebesgue** *Journ Mathém. XXIV*, 105.
246. Tafel der aus 5ten Einheitswurzeln zusammengesetzten primären complexen Primfactoren aller reellen Primzahlen von der Form $5\mu + 1$ in der ersten Viertelmyriade Reuschle. Berl. Acad. Ber. 1859, 488.
Vergl. Biquadratische Form, Cubische Form, Functionen 62, Quadratische Form.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Einleitung in die Mechanik. Zum Selbstunterricht mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens, von H. B. Lübsen. Zwei Bände. Hamburg, O. Meissner. 1858 und 1859.

Das vorliegende Werk, welches dem Vorworte zufolge hauptsächlich Leser von beschränkterem mathematischen Wissen, denen namentlich die Sprache der Trigonometrie nicht geläufig ist, in das Studium der Mechanik einführen soll, zerfällt in sechs Theile, deren drei erste den ersten Band bilden und sich mit der Statik fester, tropfbar flüssiger und luftförmiger Körper beschäftigen, während die drei letzten den Gesetzen der Dynamik, bezogen auf die drei Aggregatzustände, gewidmet sind.

Der erste, die Statik fester Körper behandelnde Theil wendet sich nach einer Einleitung, in welcher die Grundbegriffe: Ruhe, Bewegung, Zeit, Geschwindigkeit und Kraft, sowie einige Grundsätze der Statik besprochen werden, zunächst zur Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften, welche auf einen Punkt wirken. Das Kräfteparallelogramm wird hierbei häufig als Bewegungsparallelogramm aufgefasst, in einer Weise, welche einer strengen Kritik gegenüber dem Verfasser selbst ungenügend erschienen sein mag; wenigstens wird es nur hierdurch erklärlich, dass derselbe Gegenstand an einer späteren Stelle wieder aufgenommen und durch einen strengeren statischen Beweis in ein klareres Licht gestellt worden ist. — Aus dem Kräfteparallelogramm werden in bekannter Weise die für Zusammensetzung und Zerlegung paralleler Kräfte gültigen Grundgesetze hergeleitet, an den hierbei erlangten Begriff des Mittelpunktes paralleler Kräfte reiht sich die Theorie des Schwerpunktes. Referent vermisst in dieser Theorie zunächst einen allgemeineren Begriff des Schwerpunktes, als den von der Schwerkraft hergeleiteten, da an späteren Stellen des Werkes dieser Punkt ohne Weiteres als Mittelpunkt paralleler, den Massen proportionaler Kräfte aufgefasst wird, ohne dass irgendwo die Berechtigung zu dieser Begriffserweiterung nachgewiesen ist. Was ferner über die Theorie

der Stabilität gesagt wird, dürfte den praktischen Bedürfnissen gegenüber, welche der Verfasser an anderen Stellen besonders im Auge behält, nicht vollkommen genügend sein. Wie endlich die der Schwerpunktstheorie angehängten Betrachtungen über die Bewegung eines Papierdrachens und über die Wirkung des Windes auf ein Schiffssegel hierher gehören. ist durchaus nicht abzusehen; wenigstens wäre die bei ersterem Beispiele wahrscheinlich zur Vermittelung dienen sollende Voraussetzung, dass man sich den Winddruck im Schwerpunkte jenes Kinderspielzeugs concentrirt zu denken habe, soweit sie überhaupt wahr ist, nachzuweisen gewesen. — Den in den drei ersten Büchern der Statik entwickelten allgemeinen Lehren folgt im Buch IV. und V. die Theorie der einfachen Maschinen, nebst Anwendungen auf einige zusammengesetztere Apparate, z. B. Räderwerk, Brückenwage u. s. w. Endlich schliesst sich hieran die Theorie der Reibung, mit Anwendung auf einige der vorher besprochenen Apparate. Was bei der Lehre von den einfachen Maschinen über das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, hergeleitet aus der „um die Idee vergrössert gedachten Kraft" gesagt ist, möchte schwerlich geeignet sein, in den Lesern klare Begriffe zu erwecken; wie aber als Folgerung aus diesem Principe hingestellt werden kann, es sei, um eine Last im Gleichgewichte zu halten, oder sie zu bewegen, eine Maschine anzuwenden, „1) wenn nicht Kraft genug vorhanden ist, es unmittelbar zu thun, 2) wenn die Kraft billig zu haben ist, 3) wenn sie ganz umsonst zu haben ist," dies ist dem Referenten vollkommen unverständlich. — Die Bücher VII. bis IX. enthalten für vorgerücktere Leser Ergänzungen und Aufgaben zur Statik fester Körper, wobei zum Theil auch von der Trigonometrie, sowie von den Grundlehren der Coordinaten-Geometrie Gebrauch gemacht ist. Zunächst wird in strengerer Weise nach Poinsot die Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte wieder aufgenommen, woran sich die Theorie der Kräftepaare nebst allgemeineren Entwickelungen über die Zusammensetzung paralleler Kräfte anreiht. Die Aufgaben enthalten Schwerpunktsbestimmungen, sowie die Theorie der Kniepresse, der Roberval'schen Wage u. s. w.

Die Hydrostatik behandelt in drei Büchern die Grundeigenschaften tropfbar flüssiger Körper, die Gestalt der freien Oberfläche, den Druck auf die Wände eines die Flüssigkeit einschliessenden Gefässes, sowie die Lehre vom Auftriebe und vom Schwimmen der Körper. Bei den Untersuchungen über die Oberflächenbeschaffenheit, sowie über den Druck einer tropfbaren Flüssigkeit beschränkt sich der Verfasser auf den einfachen Fall, wo nur die Schwerkraft in Frage kommt, was für eine Einleitung in das Studium der Mechanik allerdings hinreichend ist. Nicht gerechtfertigt erscheint es aber, dass die hieraus erwachsenden Beschränkungen der gewonnenen Resultate nirgends genügend hervorgehoben sind; so allgemein hingestellte Lehrsätze, wie z. B. in §. 164: „Die freie Oberfläche einer ruhigen tropfbaren Flüssigkeit ist immer horizontal," können sonst bei Anfängern, für

welche ja das Buch einzig bestimmt ist, grosse Missverständnisse hervorrufen.

Die Aërostatik beginnt mit einem zehn Seiten langen Excurs über die Geschichte der Theorie des Luftdruckes, welche, mit dem weissen Salomo anhebend, sich zur Archimedeischen Lehre vom Abscheu der Natur gegen den leeren Raum wendet, die richtigeren Ansichten Galilei's und Toricelli's vorführt, und mit Herrn v. Drieberg und dem auf Fanny Elsler's grosser Zehe lastenden Drucke schliesst. Auf einer nicht viel grösseren Seitenzahl werden dann das Mariotte'sche und Gay-Lussac'sche Gesetz, Auftrieb der Luft, Theorie der Pumpen nnd des Hebers, Höhe der Atmosphäre und barometrisches Höhenmessen abgehandelt. Bei Gelegenheit des Gay-Lussac'schen Gesetzes gedenkt der Verfasser der Idee, die durch Erwärmung verdichtete Luft als Motor zu benutzen und fertigt dieselbe mit den Worten ab, es lasse sich zur Erreichung dieses Zweckes keine andere Vorschrift geben, als welche man Knaben giebt, um Sperlinge zu fangen — eine läppische Bemerkung, die gegenüber den ernsten auf diesen Endzweck gerichteten praktischen und theoretischen Bestrebungen als einem wissenschaftlichen Werke unangemessen bezeichnet werden muss. Noch ist zu bemerken, dass der Ausdehnungscoefficient 0,00366 für Erwärmung der atmosphärischen Luft um 1° Cels. bekanntermassen nicht, wie Herr Lübsen angiebt, von Gay-Lussac herrührt, dass ferner in der Laplace'schen Formel für das barometrische Höhenmessen der mit Rücksicht auf den Feuchtigkeitsgehalt der Luft aufgenommene Coefficient 0,004, sowie das arithmetische Mittel aus den an den Endstationen beobachtete Temperaturen nicht „auf's Gerathewohl“ eingeführt sind.

In der Dynamik fester Körper, welche sich im Vergleich mit den vorhergehenden Abschnitten durch eine wunderliche Anordnung des Stoffes auszeichnet, werden zunächst die phoronomischen Grundformeln für gleichförmige und gleichförmig geänderte Bewegung entwickelt, woran sich die Bewegungen einer, vorläufig in einem Punkte concentrirt gedachten Masse unter Wirkung der Schwerkraft, zunächst in verticaler Richtung, dann auf der schiefen Ebene, endlich in krummer Linie bei der Wurfbewegung, anreihen. Was hierbei in §. 24 über die Berechtigung, bei einem excentrischen Stosse die bewegende Kraft parallel zu sich selbst nach dem Schwerpunkte zu verlegen, gesagt ist, muss als völlig verunglückt bezeichnet werden, da vor Feststellung der dynamischen Bedeutung dieses Punktes die angewendete Verlegung als eine reine Willkühr erscheint, und in ganz gleicher Weise auf jeden andern Punkt bezogen werden konnte. Uebrigens scheint das ganze Kapitel von der Wurfbewegung für einen andern Leserkreis bestimmt, da in demselben mathematische Grundlagen vorausgesetzt werden, deren Kenntniss an anderen Stellen höchstens in den Anmerkungen berücksichtigt wird. In dem hierauf folgenden Abschnitte, welcher sich mit der Theorie der Centrifugalkraft beschäftigt, wird gelegentlich auch ein

Maas für die Massen eingeführt, und zwar benutzt der Verfasser zu diesem Endzwecke die Gewichtseinheit. Lässt sich nun auch bei der Proportionalität von Masse und Gewicht vom rein praktischen Standpunkte aus die Wahl dieses Maases vertheidigen, so erscheint sie doch namentlich deshalb verwerflich, weil sie nur zu sehr geeignet ist, die bei Anfängern so häufig vorkommende Verwechselung der Begriffe von Masse und Gewicht zu befördern. In einer Anmerkung zu §. 11 verwahrt sich zwar unser Verfasser entschieden gegen diese Begriffsverwechselung, doch mag gerade das von ihm gewählte Maas Veranlassung gewesen sein, dass sein eigener Ausdruck nicht an allen Stellen eine strenge Trennung der beiden Begriffe erkennen lässt. — Bis hierher war im ganzen Verlaufe der Dynamik noch nirgends des Principes der Beharrlichkeit der Materie, wenigstens in bestimmter Fassung, Erwähnung geschehen, wenn es auch selbstverständlich in versteckter Weise allen vorhergehenden Entwickelungen zu Grunde lag; das folgende Buch ist daher bestimmt, in einer etwas weitschweifigen Abhandlung über das Trägheitsgesetz, das Princip von Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung, Theorie des Kreisels, Gyroscop und Foucault's Pendelversuch diesem Uebelstande abzuhelfen. Hieran reihen sich in den drei folgenden Büchern die Grundlehren vom Stosse fester Körper, ferner eine Reihe auf die geradlinige Bewegung unter Wirkung constanter Kräfte bezüglicher Aufgaben und endlich die Theorie der Trägheitsmomente. Den Schluss der Dynamik fester Körper bilden die Theorie des Pendels und ein von der Wirkung oder Arbeit der Kräfte handelnder Abschnitt, in welchem auch das Princip der lebendigen Kräfte zur Erwähnung gelangt und auf die Theorie des Schwungrades angewendet wird. Die Herleitung des Gesetzes der Pendelschwingungen für kleine Schwingungsbögen mittelst Vergleichung der ungleichförmigen Bewegung des einfachen Pendels mit einer Componente der gleichförmigen Bewegung im Kreise ist zwar nicht unelegant, würde aber jedenfalls dem Verständnisse der Mehrzahl der Leser, für welche das Lübsen'sche Buch bestimmt ist, näher gerückt worden sein, wenn dabei die Anwendung der Trigonometrie hätte ausgeschlossen werden können. Die von Möbius in den Elementen der Mechanik des Himmels §. 26 benutzte Methode, die im Wesentlichen auf demselben Princip beruht, hätte hierbei Nachahmung verdient. — In Betreff der Arbeit der Kräfte ist noch zu erwähnen, dass dieser von der Dauer der Wirksamkeit einer Kraft unabhängige Begriff nicht gehörig von dem das Element der Zeit in sich schliessenden Begriffe des Effectes einer Maschine getrennt ist.

Die Hydrodynamik und Aërodynamik sind verhältnissmässig kurz behandelt; der Verfasser beschränkt sich hierbei auf die Gesetze des Ausflusses der Flüssigkeiten aus Gefässen und auf ihren Stoss und Widerstand gegen feste Körper. Mit Rücksicht auf den noch unentwickelten Zustand der hydrodynamischen Theorien ist für ein Buch, welches nur zur Einleitung in das Studium der Mechanik dienen soll, diese Beschränkung gerechtfertigt.

Was die Darstellungsweise in dem vorliegenden Werke betrifft, so empfiehlt sich dieselbe im Allgemeinen, mit Ausnahme einzelner, zum grossen Theile in der vorhergehenden Inhaltsangabe gerügter Punkte, durch grosse Klarheit der Behandlung der einzelnen Materien, die nur zuweilen aus Besorgniss vor zu geringer Einsicht des Lesers gar zu sehr in die Breite geht. Die mathematische Entwickelung derjenigen Disciplinen, welche mit Bequemlichkeit durch elementare Hülfsmittel bewältigt werden können, ist grösstentheils tadellos. Weniger gelungen sind dagegen nicht selten diejenigen Partieen, welche für eine strenge Behandlung die Einführung des Begriffes der Grenze nothwendig machen; der Fundamentalsatz, dass eine unendliche Zahl unendlich kleiner Vernachlässigungen sehr wohl einen endlichen Fehler erzeugen kann, ist hierbei in der Regel unbeachtet gelassen.

Noch hat sich Referent gegen eine tadelnswerthe Methode auszusprechen, mit welcher sich der Verfasser an einigen Stellen über schwierigere Punkte hinweghilft und die im Grunde auf einer Täuschung des Lesers beruht. Dieselbe besteht nämlich darin, ein zu entwickelndes Gesetz an einem Beispiele, in welchem sich die Vorbedingungen besonders einfach gestalten, klar darzulegen und hierauf die allgemeine Gültigkeit des gewonnenen Resultates sofort als selbstverständlich hinzustellen. So wird, um nur ein besonders grelles Beispiel dieser Art vorzuführen, in §. 105 und 106 der Dynamik die Formel für die Lage des Stossmittelpunktes für den Fall entwickelt, dass Massen über eine gerade, um einen ihrer Punkte drehbare Linie vertheilt sind, und der Verfasser fährt hierauf in §. 107 fort: „Es ist ohne Weiteres einleuchtend, dass die vorhergehende Formel nicht blos für eine schwer gedachte gerade Linie (Stange), sondern für alle solche um eine Achse schwingender Körper gilt, welche durch eine durch den Schwerpunkt und rechtwinklig durch die Drehachse gehende Ebene in zwei symmetrische Hälften getheilt werden und wo zugleich die Richtung des Stosses in dieser Ebene rechtwinklig auf der vom Schwerpunkte auf die Achse gedachten Senkrechten stattfindet.“ Sollte Herr Lübsen wirklich geglaubt haben, dass die Nothwendigkeit der in diesem Satze enthaltenen Bedingungen seinen Lesern „ohne Weiteres“ einleuchtend sein solle, so hat er denselben hier viel mehr zugetraut, als sich mit der von ihm anderwärts gewählten Darstellungsweise in Einklang bringen lässt.

Das Vorstehende wird genügen, den Beweis zu liefern, dass Alles, was im vorigen Jahrgange dieser Literaturzeitung S. 109 über die Vorzüge und Mängel der Lübsen'schen Bücher gesagt ist, auch auf dieses Werk Anwendung findet, mit welchem der Verfasser das Gebiet der angewandten Mathematik betritt. Innerhalb der Kreise, unter denen seine anderen Bücher vielfach verbreitet sind, wird auch das vorliegende günstig aufgenommen werden und Referent glaubt gern, dass es ungeachtet seiner Mängel daselbst manchen Nutzen bringen wird. O. Fort.

Die Anwendung der Algebra auf praktische Arithmetik, enthaltend die Rechnungen des Geschäftslebens von W. Berkhan. Halle, H. W. Schmidt.

Der Verfasser zeigt an gutgewählten Beispielen durch allgemeine Zahlzeichen und durch Ziffern in den drei ersten Kapiteln die Anwendung directer und indirecter, der einfachen und zusammengesetzten geometrischen Proportionen und der Kettenregel von der Einheit auf die Mehrheit schliessend in sehr klarer Weise und fasst die erkannten Wahrheiten in kurze Regeln und Lehrsätze zusammen. Es ist mit Recht nur zu tadeln, dass der Proportionsform von vornherein das Wort geredet wird, währenddem der Verfasser selbst durch zwei gleiche Brüche zu dieser Form gelangt. Ref. glaubt, dass man die Proportionen als antiquirt betrachten solle. Auch wird es unzweckmässig erscheinen, in Gelehrtenschulen nach alten Regeln zu rechnen, wo man namentlich für den theoretisch-mathematischen Unterricht, der insbesondere betrieben werden soll, die volle Zeit in Anspruch nimmt.

Im IV. Kapitel werden die Theilungs- und Gesellschaftsrechnungen durch Anwendung der Algebra gelehrt. Die hier aufgeführten Beispiele sind gut gewählt; nur sind einige Aufgaben nicht präcis gestellt; wie die allgemeine S. 47, §. 47, in welcher es heisst: „nach Verlauf einer unbestimmten Zeit gewinnen sie damit eine Summe von *G* Thlr.; es muss offenbar die Zeit, nach welcher der Gesellschaftshandel abgeschlossen wurde, angegeben werden, da die Gewinnste hiervon abhängen. Ref. hat sich bis jetzt mit dieser sonst üblichen Auflösungsweise nie begnügen können. Der Verf. giebt selbst in der Anmerkung §. 32 zu, dass sich Capitalien, Zeiten und Zinsen nicht wie Ursache, Zeit und Wirkung verhalten. S. 151 wendet er diese Verfahrungsweise wiederum an, giebt aber hier zu, dass sie streng genommen nicht allgemein zulässig sei. Ref. wird später darauf zurückkommen.

Die Vermischungsrechnungen im V. Kapitel sind ausführlich behandelt und auf Mischung mit Metallen, auf die Kronprobe von Archimedes, die Richmann'sche Regel etc. angewendet. In den unbestimmten Aufgaben soll es offenbar statt: „wie viel muss man von jeder Sorte nehmen," „wie viel kann man nehmen," heissen.

Der Verf. hat zur Lösung der Mischungen mit zwei und drei etc. Sorten interessante Regeln aufgestellt. Ref. ist auch hier der Ansicht, solche bestimmte oder unbestimmte Aufgaben immer durch die von Schülern gebildeten Gleichungen lösen zu lassen. Das viele Regeln bilden taugt nichts; sie bilden weder die Ein- noch die Umsicht, noch weniger die eigentliche Fertigkeit; denn im weitesten Sinne hiess dies die mathematischen Kenntnisse in Form von Kochrecepten geben. Dass der Verfasser hiervon selbst kein Freund ist, zeigen seine übrigen Schriften.

Die Vereinigungsrechnungen des VI. Kapitels können als vermischte

Aufgaben zu den vorhergegangenen betrachtet werden. Referent findet zwischen den Arbeitsrechnungen und Terminrechnungen keine Analogie; etwa die, dass man in beiden multiplicirt?

Aufg. 4, S. 134, hält Ref. mit einfacher Verzinsung für unrichtig gelöst; denn würde der Schuldner etwa nach 3 Monaten 2 Thlr. bezahlen, so würde sich das Kapital um 1¾ Thlr. vermehren, statt vermindern; es müsste dann Zins von Zins bei der nächsten Abzahlung gerechnet werden, was die Aufgabe nicht verlangt. Eine Zinsrechnung kann überhaupt nur durch die Mathematik richtig gelöst werden, wenn bestimmt angegeben ist, ob einfache oder zusammengesetzte Zinsen gerechnet werden sollen. Es soll diese Aufgabe richtig mit einfacher Verzinsung gelöst werden. Es ist Jemand am Anfange des Jahres k fl. schuldig; er trägt nun nach a Monaten k_1, nach b Monaten k_2 ab; wie gross ist der Rest der Schuld am Ende des Jahres zu p %?

Zahlt der Schuldner k_1 nach a Monaten, so sind diese zu zerschlagen in ein Kapital x am Anfange des Jahres fällig und in den Zins aus diesem Kapital vom 1. Januar für a Monaten, so dass

$$k_1 = x + \frac{\frac{p}{12}ax}{100}; \quad x = \frac{100\,k_1}{100 + \frac{ap}{12}} = \frac{1200\,k}{1200 + ap}\,ap;$$

ebenso

$$x_2 = \frac{1200\,k_2}{1200 + bp}.$$

Der Rest des Kapitals am Anfange des Jahres

$$= k - \frac{1200\,k_1}{1200 + ap} - \frac{1200\,k_2}{1200 + bp} = R.$$

Der Zins aus R vom 1. Januar bis Ende des Jahres $\frac{pR}{100}$; also die Schuld am Ende des Jahres $= R + \frac{pR}{100} = \left(1 + \frac{p}{100}\right) R$.

Im VIII. Kapitel sind die allgemeinen Formeln für das Rabattiren und Discontiren aufgestellt und viele Zahlenbeispiele schliessen sich auf das Geschäftsleben angewendet an. Ref. hätte nur gewünscht, dass man hier die Erklärung des Interusuriums von Hoffmann gegeben und allgemein nachgewiesen hätte, dass das Discontiren in Hundert zu Ungereimtheiten führe. In Aufgabe 4, S. 149 ist von unverzinslichen Kapitalien gegeredet, sie wird auch in dreifacher Weise vom Verfasser richtig gelöst; in der 4. Auflösungsweise wird zuerst der mittlere Zahlungstermin gesucht und dadurch gelöst; wenn sich hierdurch ein Unterschied ergiebt, so ist die Ursache offenbar die, weil hier die Kapitalien verzinslich betrachtet werden oder Rabatt in Hundert gerechnet wird.

Das IX. und X. Kapitel enthält die sogenannten Terminrechnungen in

sehr ausführlicher Weise, wie sie keine andere Schrift enthalten mag. Obwohl der Verfasser selbst zugiebt (S. 151), dass die bisherige Lösung der mittleren Zahlungstermine nicht allgemein zulässig sei, so giebt er weder den innern Grund an, noch sucht er eine richtige Lösung mit einfachen Zinsen. Das IX. Kapitel enthält lauter Aufgaben, die mit wenig Ausnahmen enthalten, ob die Kapitalien „verzinslich“ oder „unverzinslich“ zu betrachten sind. Sind verschiedene Kapitalien nach verschiedenen Zeitfristen verzinslich zu zahlen, so können an jedem Tage dieselben mit ihren entsprechenden Zinsen bezahlt werden ohne des Gläubigers oder Schuldners Schaden; es möchte somit das Suchen eines allgemeinen Verfalltages gar keinen praktischen Werth haben, nur etwa dann, wenn der mittlere Zinstag gesucht werden soll, für mehrmonatliche Fristen. Für diesen Fall wird richtig sein, wenn man mit $k_1, k_2 \ldots k_r$ die Kapitalien und mit $a, b \ldots c$ die die entsprechenden Zeiten und mit x den mittleren Verfalltag bezeichnet

$$x = \frac{ak_1 + bk_2 + \ldots + ck_r}{k_1 + k_2 + \ldots + k_r}.$$

In dieser Weise werden die Aufgaben vom Verfasser nicht angeschaut; dies geht aus Anm. S. 151 hervor. Behalten wir die Bezeichnungen bei und nehmen der Kürze wegen $p = p_1 = p_2$ etc. und die Kapitalien als unverzinslich an, so müssen die Ansprüche des Gläubigers und Schuldners gleich sein $k_1 + k_2 + \ldots + k_r$. Sucht man den baaren Werth W der Ansprüche des Gläubigers, so erhält man

$$1) \qquad W = \frac{100k_1}{100 + ap} + \frac{100k_2}{100 + bp} + \ldots + \frac{100k_r}{100 + cp}.$$

Der baare Werth der Ansprüche des Schuldners, Nutzniessers:

$$2) \quad D = k_1 + k_2 + \ldots + k_r - \left(\frac{100k_1}{100 + ap} + \frac{100k_2}{100 + bp} + \ldots + \frac{100k_r}{100 + cp}\right)$$

$$D = \frac{apk_1}{100 + ap} + \frac{bpk_2}{100 + bp} + \ldots + \frac{cpk_r}{100 + cp};$$

somit

$$D + W = k_1 + k_2 + \ldots + k_r;$$

also

$$D = \frac{Wpx}{100}; \quad x = \frac{100D}{Wp}$$

$$3) \qquad x = \frac{100}{p} \cdot \frac{\dfrac{apk_1}{100 + ap} + \dfrac{bpk_2}{100 + bp} + \ldots + \dfrac{cpk_r}{100 + cp}}{\dfrac{100k_1}{100 + ap} + \dfrac{100k_2}{100 + bp} + \ldots + \dfrac{100k_r}{100 + cp}}.$$

Nach gehöriger Reduction wird im Allgemeinen dieser Ausdruck die Form

$$4) \qquad x = \frac{Cp + E}{Fp + G} = \frac{C}{F} + \frac{EF - CG}{F(Fp + G)}$$

annehmen.

Es ist also der Zinsfuss in der Weise abhängig, dass der Verfalltag um so später fällt, je kleiner der Zinsfuss p ist und so umgekehrt. Wird $p=0$, d. h. der Schuldner hat keine Nutzniessung anzusprechen, die Capitalien sind verzinslich, so verwandelt sich 3) in

$$5) \qquad x = \frac{a k_1 + b k_2 + \ldots + c k_r}{k_1 + k_2 + \ldots + k_r}.$$

Die Gleichung 3) giebt die richtige Lösung. Klarer tritt die Richtigkeit hervor, wenn man in derselben Weise diese Aufgabe mit Zinseszinsen löst; es ist dann

$$\left[\frac{k_1}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^a} + \frac{k_2}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^b} + \ldots + \frac{k_r}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^c}\right]^x = k_1 + k_2 + \ldots + k_r$$

So verfährt der Verf. S. 207 und 208 mit Zinseszinsen.

Es sind demnach die meisten Aufgaben des Kap. IX und X unrichtig gelöst; zugleich wird einleuchten, warum die Auflösungen der meisten Gesellschaftsrechnungen mit Recht Misstrauen erregen.

Ref. ist übrigens weit entfernt, dem Verf. den geringsten Vorwurf zu machen; denn es wird in allen mir bekannten Schriften so verfahren. Oettinger hat den Versuch gemacht, der politischen Arithmetik eine durchgreifend wissenschaftlicho Form zu geben, er verfährt ebenso. Im Kapitel über das Interusurium greift er sogar in der That das vorher von ihm selbst als richtig dargestellte, als unrichtig an. Meier Hirsch, Eisenlohr etc. verfahren ebenso. Es wimmelt von arithmetischen Aufgabensammlungen, welche gar keinen Anspruch machen können auf die allgemeine Richtigkeit ihres Inhalts.

In den folgenden Kapiteln sind sehr interessante Aufgaben über Zinseszinsrechnungen, Berechnung der Volksmengen, der Forsten, Ablösungskapitalien, Waldberechnung enthalten. Nur wäre es wünschenswerth gewesen, wenn das Leinitz'sche Interusurium mehr seine Anwendung bei den Zinseszinsrechnungen gefunden hätte und gerade auf Aufgaben, wie sie im IX. und X. Kapitel enthalten sind.

Als Anhang sind verschiedene Aufgaben über kaufmännisches Rechnen die Regula falsi und die merkwürdige Eigenschaft der Zahl 9 als Divisor beigegeben.

Wenn Ref. Manches sich erlaubte zu tadeln, so geschah dies nur deswegen, um überhaupt auszusprechen, dass in der politischen Arithmetik viele Ungereimtheiten vorkommen, viel alter Kram, der als Ballast nachgeschleppt wird, den man abschütteln sollte.

Es enthält diese Schrift ein sehr schätzbares Material für Schüler und Lehrer und zeichnet sich vor andern dergleichen Schriften aus und es kann somit deren Gebrauch nur empfohlen werden.

Bruchsal. Dr. Schlechter.

Das Entwerfen geographischer Kartennetze in Verbindung mit dem mathematischen Unterrichte am Obergymnasium. Von VINZENZ ADAM, Professor am k. k. Gymnasium in Brünn (Separatabdruck aus dem Programm für 1858 desselben Gymnasiums).

Der Herr Verfasser macht im Eingange der genannten Abhandlung die gewiss sehr treffende Bemerkung, dass es zur Belebung des mathematischen Unterrichts wesentlich beitragen würde, wenn man den vorgerückteren Schülern einen Gegenstand zur Anwendung darbieten würde, der, wie das Entwerfen von Kartennetzen ihr Interesse durch ihren geographischen Unterricht ebensowohl, als durch die Aufmerksamkeit in Anspruch nimmt, welche man in neuerer Zeit geographischen Studien und Darstellungen überhaupt (insbesondere auch in Oesterreich) schenkt. Der Verfasser hat nun in seinem Schriftchen das für den genannten Zweck Wissenswertheste und Wichtigste über Kartenprojectionen zusammengestellt und wird dadurch sicherlich denjenigen seiner Herren Fachgenossen nützen, welche diesem Gegenstande bis jetzt ihre Aufmerksamkeit noch nicht geschenkt haben sollten. Die mathematische Darstellung der Netzconstructionen setzt nur die einfachsten Begriffe in der Stereometrie und Kenntnisse in der Trigonometrie voraus und ist insofern gewiss dem beabsichtigten Zwecke entsprechend. Der Construction des Netzes folgt in der Regel die Angabe der Eigenschaften desselben und die Angabe der Anforderungen, die durch das Netz wirklich erreicht werden. Was die äussere Ausstattung anbelangt, so trägt es sehr zur Deutlichkeit bei, dass jede Netzconstruction mit in den Text eingedrucktem Holzschnitte des betreffenden Netzes versehen ist. Dr. EMIL KAHL.

Die Geometrie der Körper. Von Dr. W. ZEHME, Director der Provinzial-Gewerbschule zu Hagen. Iserlohn, Julius Bädeker.

Unter Voraussetzung der Bekanntschaft mit den gewöhnlichen Sätzen über die gegenseitige Lage unbegrenzter Geraden und Ebenen beschäftigt sich das vorliegende, 118 Seiten zählende Werkchen vorzugsweise mit der eigentlichen Ausmessung der Körper. Im ersten Theile, welcher nur 28 Seiten umfasst, werden die einfachsten Fälle behandelt, nämlich Oberfläche und Inhalt von Prisma, Pyramide, Obelisk, Cylinder, Kegel und Kugel bestimmt; der zweite, weit reichhaltigere Theil erörtert allgemeine Methoden zur Berechnung der Körper und zeigt deren Gebrauch an einer grossen Zahl geschickt gewählter praktischer Aufgaben; im Anhange sind Erläuterungen und Beweise einiger im zweiten Theile benutzten Eigenschaften der Kegelschnitte hinzugefügt. Dieser allgemeinen Inhaltsangabe mögen einige specielle Bemerkungen folgen.

Im ersten, gewissermaassen dem elementaren Theile findet man, der Natur der Sache nach, weniger Originelles als später, doch ist anerkennend hervorzuheben, dass der Verfasser immer von möglichst allgemeinen Ge-

sichtspunkten ausgeht und hierbei manchen Satz beweist, den man in den Lehrbüchern der Stereometrie entweder gar nicht oder nicht begründet antrifft. Dahin gehört z. B. der fruchtbare Satz, dass zwei über denselben Grundflächen stehende Körper inhaltsgleich sind, wenn ihre, in gleichen Höhen genommenen Querschnitte gleiche Flächen besitzen; der Verfasser beweist dieses Theorem mit derselben Grenzenbetrachtung, die sonst nur speciell für die Pyramide angewendet wird.

Von besonderem Interesse ist der zweite Theil. Hier wird zunächst die barycentrische Methode der Körperberechnung (Guldin'sche Regel) auf elementarem Wege begründet und auf circa 24 Aufgaben angewendet. Hieran knüpft sich eine Modification jenes Verfahrens, welche dem Verfasser eigenthümlich zu sein scheint und auf folgendem Satze beruht: In einer Ebene mögen zwei parallele Gerade x (Rotationsachse) und y (Hülfsachse) liegen und um h von einander entfernt sein; ausserhalb oder innerhalb dieser beiden Parallelen liege ferner in der nämlichen Ebene die Fläche Q, welche bei der Drehung um x das Volum V_x, dagegen bei der Drehung um y das Volumen V_y erzeugt; dann gilt immer die Relation

$$V_x = 2\pi h Q \pm V_y,$$

worin das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem Q ausserhalb der Parallelachsen oder zwischen denselben liegt. Durch dieses Theorem wird man von der speciellen Lage des Schwerpunktes der Erzeugungsfläche unabhängig und kann daher von vielen, schon ziemlich complicirten Körpern (Hohlkehlen, Schraubenmuttern, Walzen zur Eisenfabrication etc.) die Volumina sehr leicht bestimmen. — Von nicht minderem Interesse sind die folgenden Erörterungen über die Volumina schief abgeschnittener Körper (Hufe), sowie die Anwendungen der Simpson'schen Regel und der Summenformel*)

*) Der Verfasser beweist dieselbe auf die gewöhnliche Weise mit Hülfe des binomischen Satzes; elementarer und kürzer dürfte folgende Einleitung sein. Ersetzt man in der Gleichung

$$\frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a - b} = a^k + a^{k-1}b + a^{k-2}b^2 + \ldots + ab^{k-1} + b^k$$

einmal jedes b durch das grössere a, so wird

$$\frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a - b} < (k+1)\,a^k;$$

ersetzt man dagegen jedes a durch das kleinere b, so wird

$$\frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a - b} > (k+1)\,b^k.$$

In der ersten Ungleichung nehme man nach einander

$$a = 1, 2, 3, \ldots n, \quad b = 0, 1, 2, \ldots n-1,$$

in der zweiten

$$a = 2, 3, 4, \ldots n+1, \quad b = 1, 2, 3, \ldots n,$$

und addire alle entstehenden Ungleichungen; dies giebt

$$(k+1)(1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k) \begin{matrix} > n^{k+1} \\ < (n+1)^{k+1} - 1, \end{matrix}$$

und hieraus folgt der obige Satz, wenn man mit $(k+1)\,n^{k+1}$ dividirt und n in's Unendliche wachsen lässt.

$$Lim \frac{1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}, \text{ für } n = \infty,$$

zur Berechnung von Kappen und Zonen verschiedener, von Flächen zweiten Grades begrenzter Körper. Den Beschluss macht die Berechnung regelmässiger Gewölbeformen.

Trotz seines geringen Umfanges enthält das Buch doch sehr viel Schätzenswerthes und verdient, selbst abgesehen von seiner nächsten Bestimmung (für Gewerbeschulen), schon als reichaltige Sammlung elementar und elegant behandelter stereometrischer Aufgaben auch in weiteren Kreisen bekannt und benutzt zu werden. Die äussere Ausstattung entspricht dem Inhalte.

SCHLÖMILCH.

Bibliographie

vom 1. Februar bis 1. April 1860.

Periodische Schriften.

Monatsberichte der K. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahrg. 1860, 1. Heft. Berlin, Dümmler. pro compl. 1⅓ Thlr.

Annalen der Physik und Chemie von POGGENDORF. Jahrg. 1860. No. 1. Leipzig, Barth. pro compl. 9⅓ Thlr.

Mémoires de l'académie de sciences de Pétersbourg. VII. série, Tome II. Leipzig, Voss. 4½ Thlr.

Reine Mathematik.

KUMMER, E. E., Die allgemeinen Reciprocitätsgesetze unter den Resten und Nichtresten der Potenzen, deren Grad eine Primzahl ist. (Akad.) Berlin, Dümmler in Comm. 1⅙ Thlr.

WAGNER, W., Bestimmung der Genauigkeit, welche die Newton'sche Methode zur Berechnung der Wurzeln darbietet. Leipzig, E. Fleischer. 6 Ngr.

SIMERKA, W., Die trinären Zahlformen und Zahlwerthe. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 14 Ngr.

MÜLLER, J., Anfangsgründe der geometrischen Disciplinen. 3 Theile. Braunschweig, Vieweg. 1⅓ Thlr.

Davon einzeln verkäuflich:

Geometrie und Stereometrie, 2. Aufl. ½ Thlr.

Ebene und sphärische Trigonometrie, 2. Aufl. ⅓ Thlr.

Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes. ½ Thlr.

FISCHER, J. G., Leitfaden zum Unterricht in der Elementargeometrie. 1. Cursus. 3. Aufl. Hamburg, Perthes, Besser & Mauke. 6 Ngr.

BECKER, F. W., Lehrbuch der Elementargeometrie. 2. Thl. 1. Abth. Stereometrie. Oppenheim a. R., Kern. 18 Ngr.

EUKLID, Sammlung geometrischer Aufgaben und Lehrsätze. Aus dem Englischen von POTTS, übersetzt von H. v. ALLER. Hannover, Hahn. 24 Ngr.

MOÇNIK, F., Lehrbuch der Geometrie für Obergymnasien. 6. Aufl. Wien, Gerold's Sohn. 1 Thlr.

KOPPE, K., Anfangsgründe der reinen Mathematik. 4. Thl. Ebene Trigonometrie. 3. Aufl. Essen, Bädeker. 16 Ngr.

UHDE, A., Die ebene Trigonometrie. Braunschweig, Vieweg. ⅓ Thlr.

WIEGAND, A., Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. 4. Aufl. Halle, Schmidt. ⅓ Thlr.

WITTSTEIN, TH., Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Hannover, Hahn. ⅙ Thlr.

Angewandte Mathematik.

FISCHER, PH., Grundzüge des auf menschliche Sterblichkeit gegründeten Vericherungswesens 1. Abth. Bestimmung der Sterblichkeitsverhältnisse. Oppenheim a. R., Kern. 1 Thlr. 12 Ngr.

POHLKE, K., Darstellende Geometrie. 1. Abthlg. Berlin, Gärtner. 1 Thlr.

SCHELLBACH, K. H., Neue Elemente der Mechanik; bearbeitet von G. ARENDT. Berlin, G. Reimer. 1⅚ Thlr.

LEJEUNE-DIRICHLET, Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik. Aus dessen Nachlasse hergestellt von R. DEDEKIND. Göttingen, Dietrich. 16 Ngr.

RIEMANN, B., Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. Ebendas. ⅓ Thlr.

SCHEFFLER, H., Die Elasticitätsverhältnisse von Röhren, welche einem hydrostatischen Drucke ausgesetzt sind. Wiesbaden, Kreidel & Niedner. 12 Ngr.

NIEMTSCHIK, R., Ueber die directe Constructionsmethode der verticalaxigen Krystallgestalten aus den Kantenwinkeln. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 16 Ngr.

ARGELANDER, F. W. A., Astronomische Beobachtungen auf der Sternwarte zu Bonn. 3. Bd. Bonner Sternverzeichniss, 1. Sect. Bonn, Marcus. 5 Thlr.

ALLÉ, M., Ueber die Bahn der Nemausa. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 2 Ngr.

LÖWY, M., Ueber die Bahn der Eugenia. Ebendas. 3 Ngr.

SCHIELE, L., Theorie der Ausweichgeleise und Bahnkreuzungen. Leipzig, Schrag. 1 Thlr.

Taschenbuch des Ingenieurs, herausgegeben von dem Verein „die Hütte." 1. Hälfte, 3. Aufl. Berlin, Ernst & Korn. 1⅓ Thlr.

LOWNDES, *The Engineers Handbook. London, Longman.* 16 sh.

Physik.

Die Naturwissenschaften, bearbeitet von DIPPEL, GOTTLIEB, KOPPE u. s. w. 2. Aufl. 1. Bd. 2. Abth. Essen, Bädeker. 1 Thlr.

SCHOEDLER, F., Das Buch der Natur. 11. Aufl. 1. Thl. Physik, physikal. Geogr., Astronomie und Chemie. Braunschweig, Vieweg. 1 Thlr.

EMSMANN, A. H., Leitfaden zur physikalischen Vorschule. Leipzig, O. Wigand. 6 Ngr.

PISKO, F., Lehrbuch der Physik für Untergymnasien. 2. Aufl. Wien, Gerold's Sohn. 1 Thlr.

SCHABUS, J., Grundzüge der Physik. 2. Aufl. Ebendas. 2 Thlr. 12 Ngr.

WEISS, F., Die Geschichte der Satellitenbildung. Einleitung zur Geschichte der Erde. 2⅓ Thlr.

BLASERNA, MACH und PETERIN, Ueber elektrische Entladung und Induction. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 6 Ngr.

CLEMENT, K. J., Das grosse Nordlicht am 29. Aug. 1859 und die Telegraphenverwirrung in Europa und Nordamerika. Hamburg, Perthes-Besser & Mauke. 1 Thlr.

BÉRON, P., *Atlas du magnétisme terrestre avec un texte contenant l'explications de tous les faits magnétiques suivant les lois physiques. Paris, Mallet-Bachelier.* 16 Frcs.

Joannis Kepleri opera omnia

edidit Chr. Frisch. Francofurti et Erlangae, Heyder & Zimmer. Vol. I. 1858.

Eine Ehre, deren sich mancher wenig bedeutende Schriftsteller in Deutschland rühmt, war einem der grössten Namen unseres Vaterlandes bisher nicht widerfahren: wir besassen keine Gesammtausgabe der Werke Kepler's. Und doch gehört Kepler zu den wenigen Auserwählten, bei denen jedes Epithet überflüssig, die nicht dem Fachmanne allein, sondern jedem Gebildeten bekannte, ruhmgekrönte Gestalten sind. Kein besonderer Gau kann ihn sein eigen nennen, die Orte seiner Geburt, seiner Erziehung und selbstständigen Thätigkeit machen ihn zum Deutschen im allgemeinsten Sinne des Wortes. Er hat den deutschen Geist für immer und alle Zonen verherrlicht durch Tiefe der Gedanken und unverwüstlichen Humor durch Ausdauer sonder gleichen und ungebrochene Phantasie, durch unerschütterliche Ehrenhaftigkeit und seltene Urtheilskraft. Und die Producte dieses Geistes existiren grossentheils nur in wenigen Exemplaren oder sind geradezu blos handschriftlich vorhanden. Sollen die widerlichen Erbärmlichkeiten, welche einen der edelsten Menschen, die es je gab, sein ganzes Leben hindurch verfolgten, sich noch an seinen unsterblichen Arbeiten fortsetzen, und uns Epigonen beschieden sein, die allenthalben zerstreuten Erzeugnisse seiner Hand nach und nach dem Untergange geweiht zu sehen, wie seine Zeitgenossen einst umsonst die Stätte suchten, wo seine irdischen Ueberreste ruhen?

In ächt vaterländischer Weise hat Professor Frisch seit vielen Jahren in aller Stille daran gearbeitet, diese Schmach von uns abzuwenden, und tritt nun mit einem völlig geordneten, aus den verschiedensten Quellen mit bewundernswürdiger Aufopferung gesammelten Materiale für nicht weniger als acht ziemlich starke Bände vor die Verehrer Kepler's hin, deren Zahl Legion — sein sollte. Zwei bereits erschienene, den ersten Band bildende Hefte enthalten: *Mysterium Cosmographicum*, *Apologia Tychonis*, *Calendaria Opera Astrologica*, mit wichtigen, hauptsächlich aus Kepler's Briefwechsel geschöpften Commentaren, und zeugen für die Umsicht und Sorgfalt, welche hier aufgewendet wurden, um uns die Werke des unvergänglichen Todten in würdiger Gestalt vorzuführen. Aber das treffliche Unternehmen stockt — aus Mangel an Theilnahme. Schon einmal*) erhob ich meine Stimme

*) Augsburger Allgemeine Zeitung, 14. Juli 1857, Beilage.

im Vereine mit meinen Collegen: Argelander, Hansen, Encke, Gould, Peters, Rümker, Struve d. ä. u. j., Zech, leider nicht mit der gewünschten Wirkung zu Gunsten dieser so höchst verdienstlichen Publication, die nicht nur eine alte Schuld Deutschlands an einen seiner herrlichsten Söhne bezahlen, sondern die heutige Welt in den Stand setzen soll, an der Quelle zu schöpfen, was ihr nachgerade unzählige Male unlauter geboten wurde. Ich wähle heute zu diesem wiederholten Aufrufe ein Organ, das als Reliquie des deutschen Reiches doppelt berufen ist, sich Sr. Römisch kaiserlichen Majestät Mathematikers anzunehmen. Möge die patriotische Begeisterung für einen anderen grossen Deutschen, deren Nachklänge wir noch vernehmen, sich auch hier bewähren! Kepler litt im Leben hauptsächlich unter der unglückseligsten aller Spaltungen unseres Vaterlandes; möge die Erinnerung an ihn versöhnt werden durch die Einigkeit, mit der wir beitragen zur Errichtung eines Denkmales, das in unseren Tagen von der Presse dauernder und erfolgreicher gegründet wird als durch Meissel und Marmor! Wenn nur einige Länder noch dem von Preussen und Oesterreich gegebenen schönen Beispiele in Unterstützung dieses Unternehmens beitreten, wenn insbesondere öffentliche Bibliotheken es nicht verschmähen, ein Werk zu erwerben, das jeder derselben zur Zierde gereichen wird, so ist die Bereicherung nicht bloss der deutschen, sondern der gesammten Literatur um einen wahren Schatz gesichert, dessen universeller Charakter in der glänzenden Liberalität der russischen Regierung einen sprechenden Ausdruck gefunden hat.*)

Wien, 17. Dec. 1859. **C. v. Littrow.**

*) Die Redaction hofft durch Abdruck dieses auf Veranlassung der Kaiserlich Leopoldinisch-Carolinischen Academie zuerst in der Leopoldina No. 9 erschienenen Aufrufes einer eben so mühevollen als überaus verdienstlichen Arbeit neue Gönner erwerben zu können.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Ueber Zahlensysteme und deren Geschichte. Von Joseph Krist. Am Schlusse des Schuljahres 1859 veröffentlicht vom Director der k. k. Oberrealschule der königlich freien Hauptstadt Ofen.

„Das Menschengeschlecht als Eins, durch geistige Interessen zum Ganzen verbundene, aufzufassen, das ist es, was uns mehr denn je noth thut, „und was der Zweck des culturgeschichtlichen Unterrichtes sein soll." In diesem Satze, welcher der kurzen Einleitung des uns vorliegenden Programms entnommen ist, spricht sich das pädagogische Glaubensbekenntniss des Verfassers aus. Wohl ist es so, wie er sagt, und wäre unser Zweck ein politischer statt eines wissenschaftlichen, wir könnten darüber Betrachtungen der ernstesten Art anstellen. Eine Betrachtung nur können wir nicht zurückhalten, die freilich nichts weniger als neu ist aber zu denen gehört, welche nie oft genug wiederholt werden können. An jenen Ausspruch weiter knüpfend, stellt nämlich der Verfasser die Anforderung an die Lehrer der verschiedensten Disciplinen, sich dessen zu erinnern, dass keine Wissenschaft auf einmal entstanden, dass jede ihren Entwickelungsgang gehabt, dessen Darstellung sicher mit in den Unterricht gehöre. Ganz besonders lag es in seinem Wunsche, die Mathematiker seines Vaterlandes zur Berücksichtigung dieser Methode anzuregen, und wenn, wie es scheint, diese Hoffnung nicht in Erfüllung geht, wenn bis jetzt noch kein österreichisches Organ die vorliegende Abhandlung auch nur besprach, so mag der Verfasser sich getrost sagen, dass nicht die Unrichtigkeit seines Principes daran die Schuld trägt, sondern die Unzulänglichkeit derer, an die er sich direct wandte. Es ist aber einer der reformbedürftigsten Missstände des Unterrichtswesens in fast allen Ländern, dass man zu glauben pflegt, den mathematischen Unterricht an Mittelschulen oder auch in niederen Klassen höherer Schulen könne ein Jeder ertheilen, der nur selbst die Elemente der Wissenschaft begriffen hat. Man wird keinen Philologen mit der Erklärung des Cornelius Nepos beauftragen, von dem man nicht weiss, dass

er Tacitus zu verstehen im Stande ist, allein bei der Mathematik genügt es, wenn der Lehrer so viel weiss, als er mitzutheilen hat! Es giebt natürlich überall ehrenwerthe Ausnahmen, aber sie dienen nur dazu, die Regel zu bestätigen. Und wie will man von Leuten, denen das *omnia secum portare* so leicht fällt, verlangen, dass sie lehren, zu dessen Erlernung ihnen kaum je Gelegenheit geboten war? Referent ist gewiss davon entfernt, deshalb weniger den Wunsch zu hegen, es möge in weitere und weiteste Praxis übergehen, was er selbst mit aller Kraft zu verbreiten anstrebt, nur möchte er es ermöglicht sehen, dass solchen Anforderungen genügt werde, und deshalb muss immer und immer wiederholt werden: Soll die Mathematik an den Schulen so segensreich wirken, wie sie es im Stande ist, so muss vor Allem die Stellung des Mathematiklehrers eine höhere werden, dann erst kann man denselben Maasstab an seine Leistungen legen. Um so erfreulicher ist es, wenn auch jetzt schon eine ganze Anzahl von strebsamen Männern trotz der Ungunst der Verhältnisse ihre Wissenschaft von einem höheren Standpunkte zu betrachten wissen; wenn namentlich auch an Orten, wo die literarischen Quellen nicht so leicht zugänglich sind, doch eingehende Bearbeitungen einem gründlichen Studium unterworfen werden. Von diesem Gesichtspunkte aus können wir dem vorliegenden Programme nur unsere Anerkennung aussprechen.

Der Verfasser hat sich bestrebt, die bisherigen Forschungen über die Geschichte der Zahlensysteme und der Zahlenreihen zusammenzustellen und hat dadurch ein übersichtliches Gesammtbild gewonnen, an welchem nur wenig zu retouchiren scheint. Es sei uns erlaubt, aus Interesse an dem Gegenstande, die geringen Ausstellungen zu machen, welche uns dabei sich ergaben.

Ueber die verschiedenen Arten der Zahlensysteme spricht sich der Verfasser im ersten Theile des Programms ziemlich vollständig aus. Neu war uns dabei namentlich die Erwähnung, dass der magyarischen Sprache vielleicht ein Siebenersystem zu Grunde liege. Hier könnte noch eines anderen seltsameren Systems Erwähnung geschehen, welches bei den Osseten, einem Volksstamme des Kaukasus, in Gebrauch sein soll. Der bekannte Reisende Kohl will nämlich bei denselben ein Octodecimalsystem gefunden haben (vergl. dessen Reisen in Südrussland II, 216). Ferner möchten wir auf die Vermengung des Decimal- und des Duodecimalsystems aufmerksam machen, welche bei den alten Deutschen existirte und deren Ueberbleibsel noch in den, wenn auch nicht durchweg deutschen Zahlennamen: Gross = 144, Schock = 60, Mandel = 15, Dutzend = 12 nachklingen, während das sogenannte grosse Hundert = 120 in den skandinavischen Sprachen als Storhundrud von dem kleinen Hundert, Lillehundrud = 100 unterschieden wird. In der deutschen Sprache ist diese letztere Unterscheidung jetzt zwar verschollen, kam aber besonders bei den Strafbedingungen germanischer Gesetzgebung vielfach in Betracht. Nähere Unter-

suchungen über diesen Gegenstand wären von mathematischer Seite noch wünschenswerth; Material dazu findet sich bei Sachse, historische Grundlagen des deutschen Staats- und Rechtslebens. Heidelberg 1844, S. 247 flg.

Das zweite Kapitel des Programmes behandelt die dem Gegenstande nach weit verwickeltere Geschichte der Zahlensysteme und Zahlenzeichen. Der Verfasser unterscheidet S. 58 (nach Nesselmann, wie er selbst angiebt) drei Klassen von einfachen Zahlenzeichen: 1) Willkührliche von der Buchstabenschrift unabhängige Zeichen; 2) die Buchstaben des Alphabets in ihrer gewöhnlichen Reihenfolge; 3) Anfangsbuchstaben oder Abkürzungen der Zahlworte. Zu der ersten Klasse werden mit Nesselmann die indisch-arabischen Ziffern gerechnet, zu den Beispielen für die dritte Klasse fügt der Verfasser „eine von Prinsep entdeckte indische Zahlenschrift" hinzu. Hierin liegt aber ein offenbar aus einem Missverständnisse hervorgegangener Widerspruch. Prinsep schreibt gerade den indisch-arabischen Ziffern selbst einen solchen stenographischen Ursprung zu. Sie können also nur entweder mit Nesselmann zur ersten oder mit Prinsep zur dritten Klasse gerechnet werden. Beides zugleich ist unmöglich. Referent hatte seit Veröffentlichung seiner letzten Untersuchungen über die Geschichte der Zahlzeichen die Gelegenheit, Prinsep's Originalabhandlung zu studiren (*James Prinsep, Essays on Indian antiquities, edited by Edward Thomas, London* 1858. I, 145; II, 70—84), ohne freilich dabei die volle Ueberzeugung von der Richtigkeit der Hypothese desselben gewinnen zu können. Unsere Zweifel beziehen sich indessen nur auf die Identität seiner Zahlzeichen mit Buchstaben. Zugeben müssen wir hingegen, dass der Uebergang von den Zeichen Prinsep's in die spätere Form indischer Ziffern kein schwieriger ist. Die allmäligen Veränderungen, welche z. B. die deutsche Buchstabenschrift noch in den letzten 4 bis 5 Jahrhunderten erlitten hat, sind noch viel bedeutender, und ähnlicher Weise haben in allen Kunstproducten einzelne Formveränderungen immer stattgefunden, sowohl beim Sichverbreiten von Nation zu Nation, als beim Wechsel der Zeiten, als auch bloss nach dem Geschmacke des jedesmaligen Verfertigers. Warum sollte dieses bei den Zahlzeichen sich anders verhalten? Wir erinnern nur an unsere heutige Sieben, deren verticaler Theil bald als gerader Strich, bald unten nach rechts gekrümmt, bald mit, bald ohne Schleife abgebildet wird, und solche Varianten, die uns heute nicht im Mindesten auffallen, kamen selbstverständlich überall vor, wo die Zahlenschrift Volkseigenthum war. Wir müssen deshalb auch dem Verfasser widersprechen, wenn er S. 70 unsere Ziffern nicht formverwandt mit den von den Arabern gebrauchten Zahlzeichen nennt. Eine Verwandtschaft findet allerdings statt, nur keine Identität. Ja, eine Verwandtschaft, glauben wir, beabsichtigte der Verfasser an anderen Stellen gar nicht in Zweifel zu ziehen, da er S. 66 an den semitischen Ursprung der unseren Ziffern zunächst stehenden *apices* des Boethius glaubt.

Ein weiterer Punkt, worin wir nicht mit dem Verfasser übereinstimmen können, ist die Controverse, ob das Werk *de numerorum divisione* von Gerbert oder von Beda herrühre. Der Verfasser meint S. 71, Chasles habe sich für die Autorschaft des letzteren ausgesprochen. Dieses ist nur theilweise richtig. Chasles sprach diese Meinung in seiner Geschichte der Geometrie (Uebersetzung S. 529) freilich aus, aber schon S. 589 desselben Werkes treten bei ihm Bedenken über diese Ansicht auf, und in der etwa 7 Jahre späteren Abhandlung in den *Comptes rendus* vom 23. Januar 1843 ist er vollständig zu der entgegengesetzten Meinung bekehrt, für welche auch Referent in seinen Untersuchungen über diesen Gegenstand noch einige weitere Gründe beibrachte.

Endlich fühlen wir uns verpflichtet, einen Irrthum zu berichtigen, dem wir selbst früher huldigten. Wir fassten, wie der Verfasser S. 72, den Ursprung des Werkes Algorithmus als durch Zusammensetzung aus Al und ἄριθμος entstanden auf und verwarfen die Hypothese Rainaud's (vrgl. diese Zeitschrift I, 73). Neuere Forschungen von Buoncampagni, über welche Chasles in der Academiesitzung vom 6. Juni 1859 Bericht erstattete, haben dagegen auf's Glänzendste bestätigt, dass die Ableitung aus dem Namen des arabischen Mathematikers Mohamed-ben Moussa Alkharesmi die einzig richtige ist. Der Hauptbeweis gründet sich auf ein Manuscript der Universitätsbibliothek zu Cambridge, welches die Ueberschrift trägt: *Algoritmi de numero Indorum* und mit den Worten beginnt: *Dixit algoritmi* u. s. w. So wird auch die Orthographie des bekannten Werkes des Spaniers Savacorda aus dem 12. Jahrhundert leicht erklärlich, während bisher *Ysagoge alchorismi* immerhin Schwierigkeit machte.

Möge der Verfasser diese Bemerkungen, welche bei dem Lesen seiner Abhandlung sich uns ergaben, nicht übel deuten. Das zur Anhänglichkeit gesteigerte Interesse an einem Gegenstande, dem man selbst eine ganze Reihe von Jahren nachgeforscht hat, steigert ebenso auch den Kriticismus und lässt es wünschenswerth erscheinen, jeden Mangel auszumerzen, so geringfügig er sein mag. CANTOR.

Lehrbuch der Physik von Dr. KARL STAMMER. Lahr, Verlag von Schauenburg & Co. Erster Band mit 170 Holzschnitten. 1858. Preis 1 Thlr. 10 Ngr. (Bei Einführung in Schulen 1 Thlr.) Zweiter Band mit 155 Holzschnitten. 1859. Preis 1 Thlr. (Bei Einführung in Schulen 25 Ngr.)

Dieses Lehrbuch gehört zu einem Cyclus organisch verbundener Lehrbücher der medicinischen Wissenschaften, welcher seit einiger Zeit bei Schauenburg & Co. in Lahr erscheint. Der besondere Zweck des Werkes erklärt die Menge und die im Interesse des Studirenden der Medicin ge-

troffene Auswahl des behandelten Stoffes, sowie die Methode der Darstellung, welche in diesem Falle von einem ausgedehnten Gebrauche der Mathematik abzusehen pflegt. Der Verfasser bemerkt in seinem Vorworte über die Ausführung des Buches im Einzelnen folgendes: „Dieses Lehrbuch der Physik soll die Vorlesungen nicht etwa überflüssig machen, sondern vielmehr zu deren Verständniss behülflich sein, den Lernenden zugleich zum eigenen Studium anführen und nützliches Wiederholen durch Hinweisung auf Bekanntes und leicht Einzuprägendes befördern.“ Demgemäss hat der Verfasser die Beschreibung von Experimenten hinweggelassen, welche bei den Vorlesungen einzelne Thatsachen mit grösserer Deutlichkeit erhellen, andererseits — und dies empfiehlt das Lehrbuch zum Gebrauch für die Schüler — hat der Verfasser durch Aufgaben und Beschreibung leicht anzustellender Versuche anzuregen gesucht, welche den einzelnen Abtheilungen des Buches angefügt sind. Erstere erfordern nur die Kenntniss sehr einfacher arithmetischer Operationen, letztere, die Versuche, sind so ausgewählt, dass sie von jedem angestellt werden können, der sich einige Uebung im Biegen von Glasröhren und im Gebrauche der Feile angeeignet, wobei die Kosten der Versuche immer nur sehr unbedeutend sind.

Die beim Schüler zum Verständnisse des Buches nothwendigen mathematischen Vorkenntnisse haben sich nur auf die einfachsten Begriffe der Arithmetik, ebenen Geometrie und Stereometrie zu erstrecken. Die Reichhaltigkeit des dargebotenen wissenschaftlichen Materiales lässt im Allgemeinen nichts zu wünschen übrig und es ist besonders anzuerkennen, dass der Verfasser auch durch ausführlichere Behandlung technischer Anwendungen der Physik, z. B. Telegraphie, Photographie, sowie durch einen Abschnitt über Meteorologie anregend zu wirken gesucht hat. Was die Anordnung des Stoffes im Allgemeinen anbelangt, so finden wir im I. Bande folgende Abschnitte: 1) allgemeine Eigenschaften und Bewegungsgesetze der Körper; 2) Gleichgewicht und Bewegung der Körper; 3) Wärmelehre; 4) Magnetismus; 5) Elektricität; 6) Elektrodynamik. Der II. Band enthält: 7) Anwendung des Elektromagnetismus; 8) die Wellenbewegungen; 9) Akustik; 10) das Licht; 11) Meteorologie.

Was die Anordnung des Stoffes und die Darstellung im Einzelnen anbelangt, so erlaubt sich Referent gegen Einiges Bedenken zu erheben. Dies betrifft zunächst den 1. Abschnitt, in welchem unter anderen die Gravitation als allgemeine Eigenschaft der Körper aufgeführt und bereits das Gravitionsgesetz ausgesprochen wird, ohne zu erklären, was man unter der Entfernung zweier Körper von einander zu verstehen hat. Ebenso wird im Eingange des zweiten Abschnittes ohne Weiteres von der gleichförmigen und gleichförmig beschleunigten Bewegung von Körpern gesprochen, während der Leser mit Recht erwarten muss, dass man ihm erklärt, ob man hierunter Bewegung der Körpertheile in parallelen Bahnen zu verstehen habe oder vielleicht irgend eine andere Art Bewegung meint. Die

Absicht des Verfassers, die Statik und Dynamik kurz zu behandeln, konnte auch erreicht werden, ohne der Deutlichkeit zu schaden, man muss sich im Gegentheil gestehen, dass die gewünschte Präcision der Vorstellungen und Begriffe bei einer sonst guten Anordnung sehr zur Kürze befähigt haben würde, weil man in diesem Falle dem Schüler weit eher eine offengelassene Lücke selbst auszufüllen zumuthen darf. Was den Abschnitt über Magnetismus anbetrifft, so bekennt Referent selbst, dass es einige Mühe und Zeit kostet, die Begriffe, die magnetischen Messungen zu Grunde liegen, Schülern beizubringen, welche nicht wenigstens das Binomialtheorem schon kennen, allein es geht doch, namentlich wenn man gewisse einfache Vorstellungen einführt, die dem Schüler das Lernen ungemein erleichtern. Denkt man sich z. B. die Beschleunigung betrüge beim freien Fallen nur 1 Millimeter (während sie in unsern Breiten ca. 9800 Millimeter ist), so kann man die absolute Krafteinheit definiren als die Schwere einer Masse von 1 Milligramm. Man kann ferner als Nordpol eines Magneten den Mittelpunkt der parallelen Kräfte definiren, welche auf den gesammten freien Nordmagnetismus des Stabes in dem Falle wirken würden, in welchem man sich den Magneten einem unendlich entfernten magnetischen Punkte ausgesetzt dächte. In derselben Weise kann man den Südpol definiren. Die Verbindungsgerade beider Pole ist die magnetische Achse. Es sei d die Mittelpunktsentfernung zweier Magneten, l und l' seien die zwischen ihren Polen enthaltenen Längen ihrer Achsen, beide so klein, dass die zweite und höheren Potenzen von l und l' gegen die nämlichen Potenzen von d ohne erheblichen Fehler vernachlässigt werden dürfen, so lässt sich für diesen Fall zeigen, dass die Magnete in der Entfernung ebenso auf einander wirken, als wenn ihre freien magnetischen Fluida in ihren zugehörigen Polen concentrirt wären. Ein Magnet wird durch diese Vorstellung, was seine Fernewirkungen anbelangt, einer mathematischen Linie gleich, welche an beiden Enden gleiche Mengen ungleichnamigen Magnetismus trägt. Man findet ferner die Vorstellung berechtigt, dass die ebenbeschriebene Nadel wie eine Nadel von der Kraft 1 wirkt, wenn ihre Länge 1 Millimeter beträgt und wenn an jedem Endpunkte die Menge 1 von Magnetismus sich befindet. Man denke sich eine solche Nadel von der Kraft 1 senkrecht gegen die Ebene des magnetischen Meridianes und in horizontaler Lage festgehalten, diese Nadel wird vom Erdmagnetismus an beiden Enden durch zwei gleiche Kräfte angegriffen, beide der Inclination parallel aber entgegengesetzt gerichtet. Man nennt die Grösse einer solchen Kraft die Grösse der Intensität des Erdmagnetismus am Beobachtungsorte. — In ähnlicher Weise, wie oben, dabei gehörig elementar gehalten, ist es sicher möglich, dem Schüler präcise Begriffe zu bieten. Dann werden Gesetze wie das der Fernewirkung von Magneten gehörig verstanden; es ist dies in Dr. Stammer's Werk nicht wohl möglich, da das Gesetz angegeben ist, ohne nur zu erklären, was man unter Kraft des Stabes, Entfernung zweier Stäbe zu verstehen hat.

Für das besprochene Werk bilden die Aufgaben (gegen 100), die dem Vorwort des Verfassers zufolge zum Theil den Sammlungen von Frick und Fliedner entnommen sind, eine recht zweckmässige Zugabe; dasselbe ist von den fast ebenso zahlreichen Versuchen zu sagen, die gewiss nicht verfehlen werden, den Schüler zur eigenen Anschauung der Erscheinungen und zum fleissigen Studium anzuregen.

Das Vorhergehende zeigt, dass das besprochene Lehrbuch, obwohl über Einzelnes Ausstellungen gemacht werden mussten, doch andererseits recht gute Seiten hat und dass es dem Schüler eine fruchtbare Anregung zum Studium der Physik geben wird. Am Schlusse dieser Besprechung möge noch der netten äusseren Ausstattung gedacht werden, welche die Verlagshandlung dem genannten Werke gegeben hat. Dr. Kahl.

Die Elemente der Mathematik. Von Dr. Richard Baltzer, Oberlehrer am städtischen Gymnasium zu Dresden. Erster Band, enthaltend: Gemeine Arithmetik, allgemeine Arithmetik, Algebra. Leipzig, S. Hirzel. 1860.

Wie der Titel andeutet, zerfällt der vorliegende Band in drei Bücher, über deren Inhalt sich der Verfasser in der Vorrede folgendermaassen ausspricht:

„Das erste Buch, welches von der gemeinen Arithmetik handelt, enthält einen kurzen Abriss des Rechenunterrichts zur Vorbereitung auf die allgemeine Arithmetik. Es braucht heute nicht mehr gerechtfertigt zu werden, dass ich die Regel de tri, gegründet nicht auf die Lehre von den Proportionen, sondern auf die Berechnung der Mehrheiten und Einheiten, weit in den Vordergrund gerückt habe. Einige Aenderungen im Vortrag der Lehre von den gemeinen Brüchen und den Decimalbrüchen mögen für sich selbst sprechen; das über die Genauigkeit von Zahlenangaben und Rechnungsresultaten Mitgetheilte kann als eine Ergänzung vieler Rechenbücher betrachtet werden.

„Das zweite Buch, die allgemeine Arithmetik enthaltend, besteht eigentlich aus vier Abschnitten, von denen der erste die vier Species, der zweite die Potenzen, Wurzeln und Logarithmen, der dritte das Binomialtheorem, der vierte die Combinatorik zum Gegenstande hat. Man findet darin insbesondere die Lehre von den Wurzeln der Einheit und den Logarithmensystemen, den Gebrauch der Gauss'schen Tabelle bei der Zinsrechnung, die Zerlegung der Exponentialreihe, die Bildung der Permutationen durch Vertauschung von Paaren, die Determinanten, die figurirten Zahlen. Zugaben zu den einzelnen Abschnitten bilden einige Elemente der Zahlenlehre, der Zinsrechnung, der Lehre von den Kettenbrüchen und von der Wahrscheinlichkeit.

„Das dritte Buch, dessen Gegenstand die Algebra ist, handelt zuerst von den Proportionen, von den Functionen, von der analytischen Methode. Das Bedenken, welches gegen die Aufnahme des Begriffs Function in die Elemente erhoben werden kann, habe ich nach angestellten Versuchen aufgegeben; die schärfere Fassung der algebraischen Grundbegriffe bietet reichlichen Ersatz für die kleine Mühe der Abstraction, durch welche jener Begriff gewonnen wird. Bei der Erklärung der analytischen Methode ist die Zurückführung von Rechnungsaufgaben auf die Auflösung von Gleichungen und die Zurückführung von Constructionsaufgaben auf die Construction von Hülfsfiguren in genauerer Analogie aufgezeigt, als es gewöhnlich geschieht. Auf diese Einleitung folgt das gewöhnliche Material der elementaren Algebra, wobei man die Eintheilung der Gleichungen in identische und nicht identische, und der letztern in algebraische und transcendente, sowie die Bestimmung von Unbekannten durch Systeme von Gleichungen mit der erforderlichen Genauigkeit auseinandergesetzt findet. Die Gauss'sche Auflösung der quadratischen Gleichungen, die Bestimmungen über die Wurzeln einer biquadratischen Gleichung und die Reduction der reciproken Gleichungen werden vielleicht nicht unwillkommene Zugaben sein. Den letzten Abschnitt bilden zunächst einige Bemerkungen über transcendente Gleichungen und die Auflösung der numerischen Gleichungen, insbesondere der algebraischen nach Newton's Methode, deren Werth aus meiner der Urquelle entnommenen Darstellung besser einleuchten dürfte, als aus den zumeist anzutreffenden Reproductionen. Die hierauf folgende Behandlung der Diophantischen Aufgaben konnte wenigstens in Betreff der Aufgaben ersten Grades einige Vollständigkeit erreichen. Den Schluss macht der Fundamentalsatz der algebraischen Analysis von der Zerlegbarkeit der ganzen rationalen Functionen, aus dem noch die Rationalisirung der irrationalen algebraischen Functionen abgeleitet worden ist.

„Wo es nöthig schien, habe ich Beispiele mit vollständiger Ausführung als Paradigmen aufgenommen; Beispiele zur Einübung sind unter den einzelnen Paragraphentiteln aus der weit verbreiteten und anerkannten Sammlung von Heis citirt worden. Besondere Mühe aber erforderte die Aufsuchung der geschichtlichen Nachweise, welche ich den einzelnen Sätzen und Problemen hinzuzufügen wünschte; obgleich meine Arbeit in dieser Beziehung von gegebenen Bibliothek - Beständen begrenzt war und von den Mängeln eines ersten Versuches nicht frei sein mag, so wird man doch mancherlei wissenswerthe und wenig bekannte Notizen angemerkt finden.“

Ein Blick auf diese Inhaltsangabe zeigt, dass der Verfasser bedeutend mehr giebt, als in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Arithmetik und Algebra geboten wird; dahin gehören z. B. die Bestimmung der Menge von Zahlen, welche kleiner als eine gegebene Zahl und relativ prim zu ihr sind, die Sätze von Fermat, Wilson, einige Theoreme von Gauss und Lejeune-

Dirichlet, der allgemeine binomische Satz, die Reihen für e^x, $\cos x$, $\sin x$, Einiges über Determinanten und über algebraische Functionen etc. Ref. gesteht, dass er diesen Reichthum nicht recht mit dem Begriffe von „Elementen der Mathematik“ zu vereinigen weiss. Der grösste Theil der vom Verfasser aufgenommenen zahlentheoretischen Sätze findet bei den nachherigen Operationen an dekadischen Zahlen keine Anwendung und gehört eben desswegen nicht zu den Elementen; dasselbe gilt von den angeführten Reihenentwickelungen, welche ein ganz ungenügendes Bruchstück der algebraischen Analysis bilden und womit kein Schüler irgend etwas anzufangen wissen wird. So hätte z. B. auf die Entwickelung von e^x auch die von ly folgen müssen, wenn der Verfasser wenigstens die beiden conjugirten Aufgaben „zu einer Zahl den Logarithmus und umgekehrt zu einem Logarithmus die Zahl zu finden“ vollständig lösen wollte; dass aber nur die Lösung der zweiten Aufgabe gegeben wird, ist eine offenbare Halbheit, und ebenso verhält es sich mit den Entwickelungen von $\cos x$ und $\sin x$, denen die Reihen für $Arcsin\, x$ und $Arctan\, x$ gegenüber gestellt werden müssen. Jedenfalls hätte der Verfasser besser gethan, sich auf das Nothwendige zu beschränken und der algebraischen Analysis einen besonderen Band zu widmen. Die Sache hat aber ausserdem noch eine andere Seite. Jener Reichthum auf dem geringen Raume von 17 Bogen ist nämlich nur dadurch möglich geworden, dass der Verfasser, obschon er keine blossen Andeutungen zu Beweisen geben wollte, doch zu einer Kürze der Beweisführung gegriffen hat, die vielen Lesern in der That nur Andeutungen liefern wird. Eigentlichen Schülern dürfte beim Selbststudium ein grosser Theil des Buches unverständlich bleiben und Referent möchte es daher als Schulbuch keinem Lehrer empfehlen, der nicht das Glück hat, lauter Talente ersten Ranges zu unterrichten. Um so bereitwilliger erkennt aber Referent an, dass des Verfassers Werk für Lehrer von Werth sein wird; namentlich sind es die sehr reichhaltigen historischen und literarischen Nachweise, welche dem Buche viele Freunde erwerben werden. SCHLÖMILCH.

Bibliographie
vom 1. April bis 1. Juni 1860.

Periodische Schriften.

Berichte über die Verhandlungen der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Math.-phys. Classe. 1859, III und IV. Leipzig, Hirzel. ⅔ Thlr.

Abhandlungen der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 8. Bd. (1858 und 1859.) Göttingen, Dieterich. 9⅔ Thlr.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Math.-naturw. Classe. Jahrg. 1860. 28 Nummern. Wien, Gerold's Sohn in Comm. 16 Thlr.

Astronomische Nachrichten, begründet von Schumacher, fortgesetzt von Hansen und Peters. 53. Bd. No. 1. Hamburg, Perthes, Besser & Mauke in Comm. pro compl. 5 Thlr.

Bremiker, C., Nautisches Jahrbuch, oder vollständige Ephemeriden und Tafeln f. d. J. 1862. Berlin, Reimer. ½ Thlr.

——, *Annuaire nautique pour l'an* 1862. Ebendas. ½ Thlr.

Beobachtungen der Kaiserl. Universitäts-Sternwarte zu Dorpat. 15. Bd. 1. Abth. Herausgegeben von Maedler. Dorpat, Gläser in Comm. 2 Thlr.

Reine Mathematik.

Gallenkamp, W., Die Elemente der Mathematik. 2. Aufl. 1. Theil (Arithmetik, Algebra 1. Abth. und Planimetrie). Iserlohn, Bädeker. ½ Thlr.

Köhler, H. G., Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. 7. Ster.-Ausg. Leipzig, Tauchnitz. 27 Ngr.

Meyer, G. F., Ueber Bernoulli'sche Zahlen. Inaug. Dissert. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. ⅓ Thlr.

Mink, F., Geometrische Formenlehre. Crefeld, Schüller. ¼ Thlr.

——, Lehrbuch der Geometrie. 3. Aufl. Ebendas. 27 Ngr.

Schneider, J., Anfangsgründe der Stereometrie. Wien, Beck's Universitätsbuchhandlung in Comm. 16 Ngr.

SCHELLBACH, K. H., Mathematische Lehrstunden. Aufgaben aus der Lehre vom Grössten und Kleinsten. Bearbeitet und herausgegeben von A. BODE und E. FISCHER. Berlin, Reimer. 1 Thlr.

REMY, C. v., Constructive Methoden zur Umwandlung der regelmässigen Polygone in Kreise von angenähertem Flächeninhalte. Wien, Gerold's Sohn. 8 Ngr.

PIHAN, A. P., *Exposé des signes de numération usités chez les peuples orientaux anciens et modernes. Paris, Challamel aîné.* 7 Frcs.

HAAN, B. de, *Exposé de la théorie des propriétés, des formules de transformation et des méthodes d'évaluation des intégrales définies. Partie* 1 *et* 2. *Amsterdam, van der Post.* 4 Fr. 60 C.

Angewandte Mathematik.

SPITZER, J., Anleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften. Wien, Gerold's Sohn. 1 Thlr.

ROGNER, J., Abriss der Masskunde. Ebendas. 12 Ngr.

WEDELL, H. v., Das militärische Aufnehmen. Berlin, Mittler. 1 Thlr.

——, Theorie des Planzeichnens. Ebendas. ⅓ Thlr.

HEGER, E., Flächentheilung und Ertragsberechnungsformeln. Giessen, Ricker. ⅔ Thlr.

KÜLP, E., Statik und Dynamik fester und flüssiger Körper. (1. Bd. d. Lehrb. d. Experim.-Physik.) Darmstadt, Diehl. 2 Thlr.

GRUBE, J., *De cylindri et coni attractione. Dissert. inaug.* Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 18 Ngr.

THON, Th., Der Sonnenzeiger oder Anweisung, alle Arten von Sonnenuhren herzustellen. Leipzig, Hunger. ⅓ Thlr.

PRATT, J. H., *A Treatise on Attractions, Laplace's functions and the figure of the earth. London, Macmillan.* 6 sh. 6 d.

JEANS, H. W., *Navigation and nautical astronomy. London, Longman.* 9 sh.

STEICHEN, M., *Mémoire sur la machine à vapeur.* (*Extrait des annales des travaux publiques.*) *Bruxelles, Muquardt.* ⅓ Thlr.

KEPLERI, J., *Opera omnia, ed.* C. FRISCH. *Vol. III.* Frankfurt a. M., Heyder & Zimmer. 4 Thlr.

Physik.

MÜLLER, J., Grundriss der Physik und Meteorologie. 7. Aufl. Braunschweig, Vieweg. 1⅔ Thlr.

——, Mathematischer Supplementband hierzu. Ebendas. ⅔ Thlr.

ARAGO's sämmtliche Werke. Herausgegeben von W. G. HANKEL. 15. Band. Leipzig, O. Wigand. 2 Thlr.

Fechner, G. Th., Ueber einige Verhältnisse des binocularen Sehens. Leipzig, Hirzel. 1 Thlr. 26 Ngr.

Péclet's vollständiges Handbuch über die Wärme und deren Anwendungen. Deutsch bearbeitet von Hartmann. 2. Lieferung. Leipzig, Gerhard. 2 Thlr. 12 Ngr.

Baumgartner, A. v., Ueber den Grund der scheinbaren Abweichung des mechanischen Wärmeäquivalentes bei verschiedenen Gasen. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 3 Ngr.

Du Bois-Reymond, Untersuchungen über thierische Elektricität. 2. Bd. 2. Abthlg. Berlin, Reimer. 2 Thlr.

Fritsch, K., Ueber die Störungen des täglichen Ganges einiger wichtigen meteorologischen Elemente an Gewittertagen. Wien, Gerold's Sohn in Comm. 14 Ngr.

Weisse, M., Variationen der Declination der Magnetnadel, beobachtet in Krakau. Ebendas. 18 Ngr.

Schulze, F. E., Beobachtungen über Verdunstung im Sommer 1859. Gekrönte Preisschrift. Rostock, Stiller'sche Hofbuchhandlung in Comm. 8 Ngr.

Ritgen, F. v., Betrachtung der Kometen als Sterne in früher Gestaltungszeit. Giessen, Ricker. 2 Thlr.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Anfangsgründe der geometrischen Disciplinen, für Gymnasien, Real- und Gewerbeschulen bearbeitet von Dr. JOH. MÜLLER, Professor der Physik an der Universität zu Freiburg. 1. Theil: Ebene Geometrie; 2. Theil: Ebene und sphärische Trigonometrie; 3. Theil: Analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 1860.

Gegenüber von Werken, die sich durch elegante Ausstattung und anschauliche Figuren sehr bemerklich machen, wird Genauigkeit und Ausführlichkeit zur doppelten Pflicht für die Kritik, damit das Publikum sich nicht von dem glänzenden Aeusseren bestechen lasse. Hierzu kommt im vorliegenden Falle noch der Umstand, dass der Verfasser durch seine Bearbeitung von Pouillet's Physik und der Verleger durch viele gute Verlagsartikel sehr bekannt sind; man wird es daher natürlich finden, wenn Referent, seiner sonstigen Gewohnheit entgegen, die vorliegenden Schulbücher etwas eingehender bespricht.

In der Vorrede nimmt es der Verfasser gleich anfangs als ausgemachte Sache an, dass der Erfolg des mathematischen Unterrichts verhältnissmässig nur sehr gering sei —; dies mag vielleicht für die Nachbarschaft des Verfassers gelten, im Allgemeinen aber muss Referent diese Behauptung bestreiten. Wer z. B. die preussischen und die nach demselben Muster eingerichteten Realschulen der Nachbarstaaten (z. E. die Gothaische unter Looff's Leitung) kennt, wird wissen, dass gerade in der Mathematik sehr Anerkennenswerthes geleistet wird; das Gleiche kann man auch von den Realschulen Oesterreich's sagen, die sich noch besonders durch ihre Pflege der graphischen Methoden auszeichnen. Den Grund jenes angeblich geringen Erfolges sucht der Verfasser darin, dass der Vortrag der mathematischen Disciplinen meistens zu abstract gehalten werde, wodurch er für die Naturwissenschaften unfruchtbar bleibe. Weiter heisst es: „Die mathematischen Vorkenntnisse, deren man für ein gedeihliches Studium der

nd, wenn es sich nicht gerade um die schwierigsten Fra- weder sehr umfangreich, noch schwer zugänglich; es bedarf issig weniger aber klar verstandener Sätze etc.“ Mit einem sser will den Leuten in der Geschwindigkeit soviel oder matik beibringen, als gerade zum Verständniss von Pouil- r's Physik nothwendig ist. Gegen diesen Zweck lässt sich nichts einwenden, jedoch müssen wir Mathematiker im Interesse un- is schaft verlangen, dass der Verfasser das Wenige ordentlich behandele und sich nicht etwa darauf beschränke, seinen Lesern m nur plausibel vorzustellen. In wie weit diese Forderung erfüllt las Folgende zeigen.

ch einer kleinen Einleitung und den einfachsten Sätzen von den keln und Parallellinien, welche le e sehr kurz abgefertigt werden, an die Bestimmung durch drei seiner Bestandtheile. des Dreiecks aus seinen drei Seiten; e en n und sich mithin auch die Frage auf- diese Dreie gruent oder verschieden sind, incommodirt asser nicht im desten; es heisst einfach: „da sich die Kreise l über als unter der Basis schneiden, so lässt sich das verlangte Drei- sowohl über als unter der Basis construiren“. Nach dieser Probe von hematischer Strenge wundert man sich nicht mehr, wenn die Ausmes- ung eines Rechtecks (Verfasser sagt consequent „längliches Rechteck“) durch schachbretförmige Zerlegung in Quadrate, und die Aehnlichkeit der Dreiecke durch Theilung mittelst Parallelen zur Basis erledigt wird, ohne dass irgendwo von irrationalen Verhältnissen die Rede ist, obschon der Verfasser beim geometrischen Mittel etc. auf irrationale Zahlen stösst. Mit gleicher Leichtigkeit wird auch die Rectification des Kreises abgemacht.

Den Begriff der Stereometrie nimmt der Verfasser so eng als möglich: „die Elementar-Stereometrie beschränkt sich auf die Berechnung der Oberfläche und des körperlichen Inhalts von Prismen, Pyramiden, Cylindern, Kegeln und Kugeln“. Also nichts von den Lagen der Geraden gegen Gerade oder gegen Ebenen oder zweier Ebenen gegen einander. Glaubt denn der Verfasser wirklich, dass es für ein „gedeihliches Studium“ der Naturwissenschaften (z. B. Trägheitsmomente, Polarisation, Wellenbewegungen etc.) ganz überflüssig sei, die Bedingungen kennen zu lernen, unter denen z. B. eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht oder ihr parallel ist etc.? Diess wäre doch nur möglich, wenn man unter Physik weiter nichts als eine Sammlung von Thatsachen versteht, die in nothdürftiger Ordnung neben einander gestellt und durch Experimente (womöglich recht glänzende) illustrirt werden. Auf diesem Standpunkte ist der Physiker kaum mehr als der höhere Feuerwerker; wer nur einen Schritt in der Theorie thun will, muss solide mathematische Kenntnisse zur Basis haben, und weil alle physikalischen Processe nicht in der Ebene, sondern im Raume vor sich gehen,

ist gerade eine gewandte Anschauung der im Raume möglichen Lagen ganz unerlässlich. Hiernach weiss Referent in der That nicht recht zu sagen, welchen Lesern er die „Elemente der ebenen Geometrie und Stereometrie" empfehlen sollte; ein Gymnasium oder eine Realschule, die sich mit einem solchen Mangel an wissenschaftlichem Geiste zufrieden gäbe, wäre in der That zu beklagen, und nur an Handwerker- und Sonntagsschulen dürfte der Gebrauch des Werkchens unbedenklich sein.

Nicht viel höher steht die Trigonometrie. Der Verfasser beschränkt sich auf die Betrachtung der Winkel zwischen 0^0 und 180^0 und auf die Berechnung von Dreiecken. Auch hier ist zu bezweifeln, ob man damit auskommen wird, denn schon in dem einfachen Falle, wo mehrere Kräfte in einer Ebene auf einen Punkt wirken, sind Winkel aller vier Quadranten nicht zu vermeiden, ebensowenig da, wo es sich um Vielecke handelt. Eigenthümlich genug nimmt es sich aus, wenn in der sphärischen Trigonometrie plötzlich Normalen zu Ebenen, Neigungswinkel zwischen Ebenen etc. auftauchen und gewisse Sätze der Stereometrie in Anspruch genommen werden, während doch von all Dem kein Wort in dem vorhergehenden Bande zu lesen ist. Wo soll denn da jene vom Verfasser beabsichtigte Klarheit und Verständlichkeit herkommen? Endlich muss Referent noch die Bezeichnungsweise rügen; in der ebenen Trigonometrie nennt der Verfasser A, B, C die Seiten, α, β, γ die Winkel, in der sphärischen Trigonometrie dagegen bezeichnet er mit α, β, γ die Seiten und mit a, b, c die Winkel. Diess ist altmodisch und zugleich inconsequent, wobei die Analogie zwischen den Formeln der ebenen und der sphärischen Trigonometrie gänzlich verloren geht.

Am dürftigsten ist der dritte Theil. Wer einmal bis zur analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes vordringt, hat schon gründlichere Studien im Sinne und dann erscheint Das, was der Verfasser giebt, nach allen Seiten hin ungenügend. Nimmt man hierzu die Unbehülflichkeit, womit die Rechnung geführt wird, so kann man sich kaum des Gedankens erwehren, dass der Verfasser hier nicht mehr in seinem Fahrwasser, dass er überhaupt gar nicht Mathematiker genug ist, um eine analytische Geometrie schreiben zu können. Auf Seite 24 z. B. soll der Winkel bestimmt werden, den eine Kreistangente mit der x-Achse bildet, und zu diesem Zwecke sucht der Verfasser den Grenzwerth von

$$\frac{\sqrt{r^2-(x+h)^2}-\sqrt{r^2-x^2}}{h}$$

für verschwindende h. Statt nun diesen Bruch in

$$-\frac{2x+h}{\sqrt{r^2-(x+h)^2}+\sqrt{r^2-x^2}}$$

umzusetzen, benutzt der Verfasser den **allgemeinen** binomischen Satz, ohne zu bedenken, dass die Leser, für die er schreibt, doch schwerlich

etwas von diesem Theoreme wissen können. In dem allgemeineren Falle, wo bei einer beliebigen Curve $y=f(x)$ ist, postulirt er ganz analog, dass $f(x+h)$ in eine nach Potenzen von h fortschreitende Reihe verwandelbar sei (Taylor'scher Satz!) — ein ganz unnützer und für Anfänger ungangbarer Umweg. — Der analytischen Geometrie des Raumes fehlen gerade die wichtigsten Fundamentalformeln. Sind z. B. α, β, γ die Winkel, die eine Gerade mit den Coordinatenachsen einschliesst, so hat man bekanntlich

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

aus den Richtungswinkeln zweier Geraden bestimmt sich der Winkel ϑ zwischen den Geraden nach der Formel

$$\cos\vartheta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2;$$

aus den Gleichungen einer Geraden

$$y = Bx + b, \quad z = Cx + c$$

erhält man für deren Richtungswinkel

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = 1 : B : C;$$

ist ferner

$$Ax + By + Cz = D$$

die Gleichung einer Ebene und sind α, β, γ die Richtungswinkel einer Normalen auf derselben, so gilt die Proportion

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = A : B : C$$

u. s. w.

Von allen diesen Hauptsachen findet sich gar nichts. — Der Verfasser lässt es einfach bei der Aufstellung der Gleichungen von Geraden und Ebenen bewenden, ohne damit irgend etwas anzufangen, ja ohne auch nur die Fundamentalaufgaben (z. B. Senkrechte von einem Punkte auf eine Gerade oder Ebene) zu berühren. Mit anderen Worten, es werden einige Werkzeuge der analytischen Geometrie producirt, aber vom Gebrauche derselben ist nicht weiter die Rede. — Als Beispiele für krumme Flächen benutzt der Verfasser die Cylinder-, Kegel- und Umdrehungsflächen; sonstige Flächen zweiten Grades kommen nicht vor, obschon das dreiachsige Ellipsoid, Hyperboloid etc. manche Anwendung in der Mechanik und Physik finden; ebenso fehlen die vielfach gebrauchten Schraubenlinien und Flächen. Gleich ungenügend sind die Durchschnitte von Flächen mit Ebenen behandelt; mit den einfachsten trigonometrischen Formeln für das rechtwinklige ebene Dreieck können leicht die Gleichungen

$$x = a + x'\cos\psi - y'\sin\psi\cos\vartheta$$
$$y = b + x'\sin\psi + y'\cos\psi\cos\vartheta$$
$$y = y'\sin\vartheta$$

entwickelt werden, welche den Durchschnitt jeder beliebigen Fläche mit jeder beliebigen Ebene sofort bestimmen; statt dessen beschränkt sich der Verfasser auf den ganz speciellen Fall, wo ein gerader Kegel von einer Ebene geschnitten wird, und schweigt über jeden anderen Fall gänzlich.

Nach diesen Mittheilungen wird man es wohl nicht unbescheiden finden,

wenn Referent dem Verfasser den Rath ertheilt, seine literarische Thätigkeit auf das Gebiet der Physik zu beschränken und die Abfassung mathematischer Lehrbücher den Leuten von Fach zu überlassen.

SCHLÖMILCH.

Die ebene Trigonometrie, bearbeitet von AUG. UHDE, Dr. phil., Schulrath und Professor am Collegio Carolino in Braunschweig. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 1860.

So sicher man den vorhin besprochenen gleichzeitig erschienenen Werken von Prof. Müller ansieht, dass sie von keinem Mathematiker herrühren, so deutlich merkt man an den ersten Seiten des vorliegenden Buches, dass hier ein Mann von Fach und geübter Lehrer die Feder führt. Zunächst wird in einer kurzen und klaren Einleitung die Aufgabe der Trigonometrie bestimmt, dann werden die zu Gebote stehenden Mittel erörtert und es ist hierbei recht gut motivirt, warum man von dem rechtwinkligen Dreieck und dessen Seitenverhältnissen ausgehen muss. Darauf folgt die lineare Bedeutung der trigonometrischen Functionen, eine Erklärung der trigonometrischen Tafeln und dann sogleich die Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks, welche durch mehrere sehr gut gewählte Beispiele erläutert ist. Nun erst geht der Verfasser an die Erweiterung der Begriffe der Winkelfunctionen auf stumpfe, überstumpfe und negative Winkel; zu diesem Zwecke betrachtet er die beiden rechtwinkligen Dreiecke, in welche ein beliebiges Dreieck ABC durch die Höhe CD zerlegt wird und zeigt, dass die Gleichung $c = a \cos B + b \cos A$ sowohl für spitzwinklige als für stumpfwinklige Dreiecke gelten kann, wenn der Cosinus eines stumpfen Winkels als negativ in Rechnung gebracht wird. Diese geschickte Motivirung des Zeichenwechsels der trigonometrischen Functionen kommt im Wesentlichen auf den Begriff der Projection zurück und wäre vielleicht noch einfacher geworden, wenn der Verfasser den Begriff der Projection in den Vordergrund gerückt hätte, wie es Referent in seinen Grundzügen der Geometrie gethan hat. Es folgen nun die Formeln für $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$ etc. nebst den daraus entspringenden, wobei der Verfasser das rechte Maass zwischen dem Zuwenig und dem Zuviel gut getroffen haben dürfte. Die Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks basirt der Verfasser auf die drei Grundgleichungen

1) $b \sin A = a \sin B$,

2) $b \sin A = (c - b \cos A) \tan B$,

3) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

denen er nachträglich

4) $c = b \cos A + a \cos B$

und die beiden Mollweide'schen Relationen hinzufügt. Vom analytischen

(und diesen hebt der Verfassers besonders hervor) können
n nicht sämmtlich als fundamentale gelten, denn da es sich
r m ie Bestimmung von drei Unbekannten handelt, so braucht man
ngen; eine derselben ist die geometrische $A+B+C=180^0$,
sind nur noch zwei trigonometrische Beziehungen aufzustellen, und
zu eignen sich jedenfalls No. 1) und 4) am besten. Nach Entwickelung
oben genannten sechs Formeln geht die Erörterung der einzelnen, bei
iecksberechnungen vorkommenden Fälle sehr rasch von statten und
d durch Zahlenbeispiele erläutert. Den Beschluss bildet ein Anhang
zwei geodätischen Aufgaben und einem Abschnitte über die Bestimmung
eiecks durch einen Winkel, eine Seite und die Summe oder Differenz
anderen Seiten.

Indem Referent bekennt, dass er der klaren und präcisen Darstellung
rfassers mit Vergnügen gefolgt ist, erlaubt er sich noch einige
he eine etwaige zweite Auflage des netten Büchelchens. Erstens
Andeutungen über die Berechnung der natürlichen trigono-
r en ln gegeben werden; der Verfasser verweist in §. 8 kurz auf
lfsmittel der Analysis, was jedenfalls nicht historisch und ebenso-
gut pädagogisch ist. Dabei fände sich auch Gelegenheit, über die
ionen der Winkel nahe bei Null und nahe bei 90^0 das Nöthige zu sa-
Ungleichungen wie $1-\frac{1}{2}\vartheta^2 < \cos\vartheta < 1$, $\vartheta-\frac{1}{6}\vartheta^3 < \sin\vartheta < \vartheta$ sind
nts weniger als überflüssig und werden in der Analysis, sowie in der
praktischen Geodäsie häufig gebraucht. Ferner wäre eine kurze Herleitung
der allgemeinen Formeln der Polygonometrie wünschenswerth, damit die
in den ersten Worten von §. 1 angedeutete allgemeine Aufgabe auch analytisch ihre allgemeine Lösung fände.

SCHLÖMILCH.

Mathematische Lehrstunden, von K. H. SCHELLBACH, Prof. am Friedrich-Wilhelms-Gymnasium und an der Kriegsakademie zu Berlin. Aufgaben aus der Lehre vom Grössten und Kleinsten; bearbeitet und herausgegeben von A. BODE und E. FISCHER, Dr. phil. Berlin, Reimer. 1860.

Schon bei verschiedenen Gelegenheiten hat Prof. Schellbach in kleineren Aufsätzen Proben der eigenthümlichen Virtuosität geliefert, womit er Aufgaben, welche die Kräfte der Elementarmathematik zu übersteigen scheinen, ebenso einfach als elegant zu lösen versteht (s. z. B. Crelle's Journal, Bd. 16, 17, 45), und Referent hat es im Interesse des Unterrichtes oft bedauert, dass der Verfasser, wahrscheinlich von Berufsgeschäften vielfach in Anspruch genommen, niemals ein grösseres Werk dieser Art veröffentlichte. Desto erfreulicher ist es, doch noch ein zusammenhängendes Ganzes erscheinen zu sehen, welches im Sinne des Meisters

von seinen Schülern bearbeitet und herausgegeben wurde; Referent beeilt sich, die Leser der Literaturzeitung mit dem Inhalte des Buches bekannt zu machen.

Es sind hauptsächlich drei Methoden zur elementaren Behandlung der Aufgaben über Maxima und Minima, welche der Reihe nach erörtert und auf zahlreiche, meistens auch sehr interessante Beispiele angewendet werden. Das erste Verfahren besteht in einer blossen Umformung der gegebenen Function, wobei es darauf ankommt, die letztere als Summe eines constanten und eines veränderlichen Theiles darzustellen. So kann z. B.

$$y = ax + \frac{b}{x+c}$$

umgesetzt werden in

$$y = -(ac + 2\sqrt{ab}) + \left[\sqrt{a(x+c)} + \sqrt{\frac{b}{x+c}}\right]^2,$$

woraus sogleich erhellt, dass y den Minimalwerth $-(ac+2\sqrt{ab})$ bekommt, wenn das noch übrige Quadrat verschwindet, also

$$x = -c \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$$

genommen wird. Besonders häufig ist diese Methode in dem Falle anwendbar, wo sich die gegebene Function auf eine einfache trigonometrische Form bringen lässt. Ein sehr elegantes Beispiel hierzu bietet die Bestimmung des grössten Vierecks mit vier gegebenen Seiten a, b, c, d. Setzt man nämlich

$$\tfrac{1}{2}(-a+b+c+d) = a', \quad \tfrac{1}{2}(a-b+c+d) = b',$$
$$\tfrac{1}{2}(a+b-c+d) = c', \quad \tfrac{1}{2}(a+b+c-d) = d',$$

ferner $\angle(a, b) = \alpha$ und

$$\sqrt{\frac{ab}{a'b'}} \sin \tfrac{1}{2}\alpha = \sin \varphi, \quad \sqrt{\frac{ab}{c'd'}} \cos \tfrac{1}{2}\alpha = \sin \psi,$$

so findet sich für den Inhalt des Vierecks die einfache Formel

$$V = \sqrt{a'b'c'd'} \,.\, \cos(\varphi - \psi),$$

die sofort erkennen lässt, dass V den Maximalwerth $\sqrt{a'b'c'd'}$ erreicht, wenn $\varphi = \psi$, mithin

$$\tan \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{a'b'}{c'd'}}$$

genommen wird.

Die zweite Methode bezieht sich speciell auf quadratische Functionen

$$y = ax^2 + bx + c$$

und beruht auf der bekannten Bemerkung, dass der Werth von x reell und eindeutig sein muss; lösst man daher die Gleichung nach x auf, nämlich

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c-y}{a}},$$

so bestimmt sich der Maximal- oder Minimalwerth von y durch das Verschwinden der Wurzel und ist

$$x = -\frac{b}{2a}, \quad y = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Die dritte und allgemeinste Methode kommt im Grunde auf das Verfahren der Differentialrechnung hinaus, erscheint aber hier in elementarem Gewande. Wenn nämlich die Function $y = f(x)$ von $x = a$ bis $x = \xi$ wächst und von $x = \xi$ bis $x = b$ abnimmt, mithin für $x = \xi$ ihr Maximum $y = \eta$ erreicht, so durchläuft y im zweiten Intervalle rückwärts die Werthe (ganz oder theilweis), die es im ersten Intervalle hatte; einem individuellen Werthe des y entsprechen daher im Allgemeinen zwei verschiedene Werthe des x, deren einer $< \xi$ und der andere $> \xi$ ist, und nur dem $y = \eta$ entspricht der eine Werth $x = \xi$. Oder geometrisch, wenn $y = f(x)$ als Gleichung einer Curve angesehen wird, so schneidet eine in der Höhe $y < \eta$ parallel zur x-Achse gelegte Gerade die Curve zweimal, während eine in der Höhe η gelegte Parallele die Curve berührt. Demnach giebt es zwei verschiedene Werthe x und x_1, welche dasselbe y liefern d. h. die Gleichung $f(x) = f(x_1)$ oder $f(x) - f(x_1) = 0$ befriedigen; diese lässt sich meistens durch $x - x_1$ dividiren und enthält die Bedingung, welcher x und x_1 genügen müssen, wenn $f(x)$ und $f(x_1)$ gleich sein sollen. Setzt man nachher $x_1 = x = \xi$, so erhält man die nöthige Gleichung zur Bestimmung von ξ. Ganz ähnlich verhält sich die Sache, wenn η ein Minimum ist. Als erstes Beispiel benutzt der Verfasser die Ermittelung des grössten Cylinders, der aus einem geraden Kegel geschnitten werden kann und dessen Basis auf der Kegelbasis ruht. Bezeichnet r den Radius der Basis, h die Höhe des Kegels, x den Halbmesser der Cylinderbasis und V das Cylindervolumen, so hat man

$$V = \pi h \left(x^2 - \frac{x^3}{r}\right)$$

und für einen zweiten Cylinder von gleichem Inhalte und anderer Basis

$$V = \pi h \left(x_1^2 - \frac{x_1^3}{h}\right),$$

woraus durch Vergleichung und Division mit $x - x_1$ folgt

$$r(x + x_1) - (x^2 + x x_1 + x_1^2) = 0.$$

Der Radius von der Basis des grössten sich selbst entsprechenden Cylinders wird nun durch die Gleichung

$$r \,.\, 2\xi - 3\xi^2 = 0 \text{ oder } \xi = \tfrac{2}{3} r$$

bestimmt. — Nach dieser Methode behandelt der Verfasser eine grosse Reihe von Aufgaben, welche theils der Geometrie, theils der Mechanik und Physik entnommen sind. Wir nennen unter diesen: Rechtläufigkeit, Stillstand und Rückläufigkeit der Planeten, die Gesetze der Spiegelung und Brechung, Brechung des Lichts in einer Kugel (Theorie des Regenbogens), Brechung des Lichts in einem Prisma (Theorie der Höfe, Nebensonnen und

Nebenmonde), grösster Glanz der Venus, Form des Körpers von grösster Anziehung etc. Die hierbei vorkommenden Gleichungen höherer Grade und transcendenter Form werden sorgfältig discutirt und deren näherungsweise Auflösungen an vollständig ausgerechneten Beispielen gezeigt.

Das vierte Capitel enthält Aufgaben mit mehreren Veränderlichen. Das zu Grunde liegende Princip ist sehr einfach und lautet folgendermaassen: Wenn $u = f(x, y, z)$ zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden soll, so denke man sich für den Augenblick zwei von den drei Grössen x, y, z als bekannt oder gebe denselben vorläufig irgend welche von der dritten Variabelen unabhängige Werthe; man hat es dann nur mit einer Function einer einzigen Variabelen zu thun und verfährt daher wie früher. Da aber die übrig bleibende Variabele ebensowohl x als y als z sein kann, so hat man die Methode dreimal anzuwenden, indem man der Reihe nach y und z, z und x, x und y als Constanten ansieht.

Im fünften Capitel finden sich vermischte Aufgaben, von denen namentlich die Untersuchungen über die kürzesten Linien auf Cylinder-, Kegel- und abwickelbaren Flächen besonderes Interesse gewähren. Anhangsweis wird die Steiner'sche Methode zur Lösung isoperimetrischer Aufgaben mitgetheilt (Crelle's Journal, Bd. 24).

Nach dieser Inhaltsangabe bedarf es wohl kaum noch einer Empfehlung des Buches, welches auf dem kleinen Raume von 154 Seiten des Lehrreichen so Viel bietet. SCHLÖMILCH.

Neue Untersuchungen über frei rotirende Flüssigkeiten im Zustande des Gleichgewichts. Von Dr. C. MATTHIESSEN, Docent an der Kieler Universität. Kiel, Akademische Buchhandlung.

Im Anschluss an seine früheren Arbeiten über denselben Gegenstand liefert der Verfasser in dem vorliegenden Schriftchen eine Monographie, welche alle bekannten und einige neue partielle Lösungen des berühmten Problemes der Gleichgewichtsformen rotirender Flüssigkeiten enthält. An die Möglichkeit einer allgemeinen analytischen Lösung, selbst unter der Voraussetzung homogener Fluida, glaubt der Verfasser nicht, er geht daher auch nicht analytisch, sondern synthetisch und systematisch zu Werke, um möglichst viele einzelne Figuren zu finden, welche den Bedingungen des Gleichgewichts genügen. In der That empfiehlt sich dieses Verfahren durch Einfachheit und Anschaulichkeit ebensowohl als durch die Resultate, welche der Verfasser damit erzielt hat, „indem als Vermehrung der bisher bekannten Gleichgewichtsfiguren bezeichnet werden können: 1) die absoluten Ringkörper und concentrischen Ringsysteme, 2) die Hohlkörper (Hohlcylinder und Hohlkugel), 3) die Kugel als Gleichgewichtsfigur gewisser rotirender Bewegungen, 4) die eiförmigen Sphäroide".

Bei geringem Umfange (74 Seiten) ist der Inhalt des Werkchens ein sehr reichhaltiger; die Darstellung vereinigt Klarheit mit Eleganz und giebt von dem Scharfsinn des Verfassers ein sprechendes Zeugniss.

SCHLÖMILCH.

Bibliographie

vom 1. Juni bis 1. August 1860.

Periodische Schriften.

Amtlicher Bericht über die 34. Naturforscherversammlung in Carlsruhe 1858. Herausgegeben von EISENLOHR und VOLZ. Carlsruhe, Müller'sche Hofbuchhandlung. 2 Thlr.

Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathem.-naturwissensch. Cl. 18. Bd. Wien, Gerold's Sohn in Comm. 10 Thlr.

Mémoires de l'académie des sciences de Pétersbourg. 7 série. Tome II. No. 4—6. Leipzig, Voss. 1 Thlr. 27 Ngr.

Reine Mathematik.

MÜLLER, J. H. F. Beiträge zur Terminologie der griechischen Mathematiker. Leipzig, Teubner. 8 Ngr.

SCHMIDT, J. P. Die Lehre von der Quadrat- und Cubicwurzel, den Gleichungen zweiten Grades und den Progressionen. Trier, Lintz'sche Buchh. Verl.-Conto. ⅓ Thlr.

FÜRSTENAU, E. Darstellung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten. Marburg, Elwert'sche Universitätsbuchhandlung. 12 Ngr.

ROGNER, J. Die Multiplication mit Vortheil nebst besonderen Erörterungen von Vortheilen bei der abgekürzten Multiplication. Wien, Gerold's Sohn. 8 Ngr.

KULIK, J. P. Beiträge zur Auflösung höherer Gleichungen und der cubischen Gleichungen insbesondere. Prag, Storch in Comm. 1 Thlr.

LÜBSEN, H. B. Ausführliches Lehrbuch der Analysis. 2. Aufl. Hamburg, Meissner. 1⅙ Thlr.

Wolff, F, Lehrbuch der Geometrie. 1. Theil: Planimetrie, Trigonometrie, Theilungslehre. 7. Aufl. Berlin, G. Reimer. 1⅔ Thlr.

Seeger, H. Die Elemente der Geometrie. Schwerin, Hildebrand. ¾ Thlr.

Sahling, J. T. Geometrische Constructionsaufgaben. Altona, Mentzel. 2 Thlr.

Wiegand, A. Lehrbuch der Mathematik. 2. Cursus der Planimetrie. 5. Aufl. Halle, Schmidt. ⅙ Thlr.

Féaux, Lehrbuch der Planimetrie. 2. Aufl. Paderborn, Schöningh. ¾ Thlr.

Mack, L. Goniometrie und Trigonometrie. Stuttgart, Metzler's Verlagsconto. 1⅓ Thlr.

Lübsen, H. B. Ausführliches Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. 3. Aufl. Hamburg, Meissner. 24 Ngr.

Gerlach, H. Lehrbuch der Mathematik. 3. Theil. 2. Cursus der Arithmetik; Elemente der ebenen Trigonometrie. Dessau, Aue's Verl.-Conto. ⅚ Thlr.

Leibnitzen's mathematische Schriften, herausgeg. von Gerhardt. 2. Abth. 2. Bd. Halle, Schmidt. ⅓ Thlr.

Catalan, E. *Traité élémentaire des séries. Paris.* 1⅚ Thlr.

Serret, P. *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure. Paris.* 2⅚ Thlr.

Angewandte Mathematik.

Wiegard, A. Grundzüge der Feldmesskunde. 3. Aufl. Halle, Schmidt. 6 Ngr.

Fialkowsky, R. Die zeichnende Geometrie (Constructionslehre) mit Anwendung auf Maschinen-, Situationszeichnen etc. 2. Auflage. Wien, Wallishauser. 3⅓ Thlr.

Redtenbacher, F. Theorie und Bau der Turbinen. 2. Auflage. Mannheim, Bassermann. 10 Thlr.

Magnus, G. Ueber die Abweichung der Geschosse. 2. Aufl. Berlin, Dümmler. 24 Ngr.

Murmann, A. Ueber die Bahn der Europa. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 2 Ngr.

Littrow, K. v. Andeutungen über astronomische Beobachtungen bei totalen Sonnenfinsternissen. (Akad.) Ebendas. 3 Ngr.

Heis, E. Die Sonnenfinsterniss vom 18. Juli 1860. Halle, Schmidt. 6 Ngr.

Schaub, F. Leitfaden für den Unterricht in der nautischen Astronomie in der k. k. Marine. 2. Aufl. Wien, Gerold's Sohn. 1⅓ Thlr.

Reech, M. *Théorie de l'injecteur automoteur des chaudières à vapeur de M. Giffard. Paris, Mallet-Bachelier.* 3 Frcs.

David, E. *Parties proportionelles calculées de seconde en seconde pour la déclinaison du soleil, la déclinaison de la lune, son ascension droite, son passage au méridien etc. etc. Paris.* 1⅔ Thlr.

Physik.

Gavarret, J. Lehrbuch der Elektricität. Deutsch bearbeitet von R. Arendt. 4. Lief. Leipzig, Brockhaus. 1 Thlr.

Prestel, M. A. F. Die jährliche Veränderung der Temperatur der Atmosphäre in Ostfriesland. Jena, Frommann. 1 Thlr.

Guyot, A. Grundzüge der vergleichenden physikalischen Erdkunde; nach des Verfassers Vorlesungen bearbeitet von Birnbaum. Leipzig, Hinrich's Verl.-Conto. 1½ Thlr.

Müller, J. Auflösungen der Aufgaben des mathematischen Supplementbandes zum Grundriss der Physik und Meteorologie. Braunschweig, Vieweg. ⅓ Thlr.

Knochenhauer, K. W. Ueber das elektrische Luftthermometer. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 8 Ngr.

Wüllerstorf-Urbair, v. Ueber das Verhalten und die Vertheilung der Winde auf der Erdoberfläche, sowie insbesondere über die Windverhältnisse am Cap Horn. (Akad.) Ebendas. 16 Ngr.

Dauber, H. Ermittelung der krystallographischen Constanten und des Grades ihrer Zuverlässigkeit. (Akad.) Ebendas. 14 Ngr.

Littrow, K. v. Ueber das Mikrometer bei lichten Linien bei den Wiener Meridianinstrumenten. (Ak.) Ebendas. 5 Ngr.

Reitlinger, E. Ueber die Einwirkung der Elektricität auf Springbrunnen. (Akad.) Ebendas. 4 Ngr.

Hauer, K. v. Krystallogenetische Beobachtungen. Erste Reihe. (Akad.) Ebendas. 2 Ngr.

Péclet's vollständiges Handbuch über die Wärme. Nach der 3. Aufl. deutsch bearbeitet von Hartmann. 2. Bd. Leipzig, Gerhard. 4½ Thlr.

Becquerel, M. *Recherches sur la température des végétaux et de l'air et sur celle du sol à diverses profondeurs. (Acad.) Paris.*

Literaturzeitung.

Recensionen.

Beiträge zur Terminologie der griechischen Mathematiker von Dr. J. H. T. Müller, Oberschulrath und Director des Realgymnasiums zu Wiesbaden. Leipzig bei B. G. Teubner. 1860.

Es sind nur 2½ Druckbogen, welche der Verfasser unter dem Titel von Beiträgen veröffentlicht, aber wer den Inhalt prüft, wird über die Fülle erstaunen, welche in dem kleinen Raume zusammengedrängt ist, und dadurch nur begieriger auf solche Gegenstände, welche in diesem Schriftchen absichtlich unberührt gelassen wurden. Mit einem Worte, die ganze Kritik der vorliegenden Brochüre lässt sich durch den in Süddeutschland gebräuchlichen Ausdruck wiedergeben: „Sie schmeckt nach mehr". Wir wollen versuchen, jetzt in Kürze zusammenzustellen, was uns alles geboten wird, sowie was der Autor uns halbwegs für die Zukunft verspricht. Beides sind wesentlich Worterklärungen. Wer nur irgend welche Zeit auf das Studium der griechischen Mathematiker verwandt hat, wird aber wissen, dass gerade in den Wörtern die grösste Schwierigkeit liegt, dass z. B. das Wort Porisma zu weitschweifigen Streitschriften geführt hat und täglich führt, wovon auch ein neues Werk von Chasles Zeugniss ablegt, auf welches wir uns vorbehalten näher einzugehen. Nicht weniger bestritten ist der eigentliche Sinn der Methoden, welche als Analysis und Synthesis bezeichnet werden, und auch das Wort *δεδόμενον* (z. B. die Data des Euclid) bedarf nicht bloss für den Laien einer näheren Erörterung. Solcherlei sind die Gegenstände, welche der Verfasser künftiger Bearbeitung vorbehalten hat. In dem bis jetzt Vorliegenden hat er sich nach seinen eigenen Worten, um ein kleines abgeschlossenes Ganzes zu geben, auf die Behandlung der Kugel, des Kegels und Cylinders, des parabolischen und hyperbolischen Konoides und der Sphäroide, unter Einschaltung des lediglich hierfür Erforderlichen aus der Lehre von den Kegelschnitten beschränkt. Die Schriftsteller, welche er dabei benutzt, sind besonders

Euclid, Theodosius, Archimed und Apollonius von Pergae. Es ist leicht begreiflich, dass, wie der Verfasser sagt, mit den Namen auch die Sachen gekommen sind, und so finden wir wenigstens die Hauptsätze erwähnt, welche den Griechen in Bezug auf die genannten Theile der Mathematik bekannt waren. Ebenso natürlich ist es, dass das hier Gebotene nicht bloss für den Mathematiker von Fach, sondern auch für den Philologen des Wissenswerthen genug enthält; wir erwähnen nur die Bemerkung, dass die archimedischen Schriften mit geringen Ausnahmen nur im dorischen Dialecte existiren, ferner die Ableitung des Wortes „Sphäre" als „Knäuel aufgewickelten Garnes", „Potenz" als schlechte Uebersetzung von δύναμις u. s. w. Der Verfasser würde daher durch Fortsetzung seiner Arbeit Gelehrte der verschiedensten Richtungen zum Danke verpflichten.

Cantor.

Exercices d'Analyse numérique, extraits, commentaires et recherches relatifs à l'analyse indéterminée et à la théorie des nombres. Par V. A. Le Besgue, professeur de la Faculté de sciences de Bordeaux etc. Paris, Leiber & Faraguet.

Der Verfasser, durch mehrere zahlentheoretische Arbeiten in Liouville's Journal rühmlichst bekannt, giebt in dem vorliegenden kleinen Schriftchen (150 Seiten) eine Sammlung von Aufsätzen, deren nächster Zweck ist „*à faire voir en quoi consiste la théorie des nombres, et à donner une idée des méthodes qu'elle emploie.* Uebrigens kann das Werkchen recht gut als Elementarlehrbuch der Zahlentheorie gelten, wie man aus der folgenden Inhaltsangabe ersehen wird.

Nach einigen einleitenden Sätzen beschäftigt sich der Verfasser zunächst ausführlich mit der Auflösung der unbestimmten Gleichungen ersten Grades und mit den sich hieran knüpfenden Eigenschaften der Zahlen, z. B. Ermittelung der Menge von Zahlen, welche kleiner als eine gegebene Zahl und relativ prim zu ihr sind, Sätze von Gauss, Fermat und Euler hierüber etc. Darauf folgt die Theorie der Congruenzen nebst den zahlreichen Consequenzen, die sich mittelst derselben aus dem Fermat'schen Satze ziehen lassen. Der nächste Abschnitt ist der Zerlegung der Zahlen in Quadrate und Biquadrate gewidmet, woran sich dann verschiedene Untersuchungen über Eigenschaften der Primzahlen reihen, z. B. Wilson'scher Satz, Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze etc. Den Beschluss machen einige Mittheilungen über den Gebrauch imaginärer und irrationaler Zahlen, sowie über die Benutzung divergenter Reihen bei zahlentheoretischen Untersuchungen.

Der Verfasser verspricht im Fall einer günstigen Aufnahme das Werk durch einen zweiten Theil zu ergänzen, welcher die binomischen Con-

gruenzen und besonders die Congruenzen zweiten Grades behandeln soll; Referent ist überzeugt, dass der Verfasser Veranlassung zur Erfüllung seines Versprechens finden wird. SCHLÖMILCH.

Traité élémentaire des séries par E. Catalan, docteur ès sciences etc. Paris, Leiber & Faraguet. 1860.

Das vorliegende, 132 Seiten zählende Werkchen zerfällt in VII Capitel folgenden Inhalts. In Cap. I werden die Grundbegriffe über unendliche Reihen festgestellt; der Verfasser unterscheidet convergirende, divergirende und unbestimmte (oscillirende) Reihen. Cap. II enthält in grosser Ausführlichkeit die Kennzeichen für die Convergenz und Divergenz der Reihen, wobei Referent nur den einfachen und leicht beweisbaren Satz vermisst, dass die Reihen

$$a_1 \cos \omega + a_2 \cos 2\omega + a_3 \cos 3\omega + \dots$$
$$a_1 \sin \omega + a_2 \sin 2\omega + a_3 \sin 3\omega + \dots$$

jederzeit convergiren, wenn $Lim\, a_n = 0$ und ω kein Vielfaches von π ist. Cap. III beschäftigt sich mit den elementaren Methoden der Reihensummirung; dieselben beruhen hauptsächlich auf dem, freilich nur selten anwendbaren Kunstgriffe, das allgemeine Glied $\varphi(n)$ einer Reihe in eine Differenz von der Form $\psi(n+1) - \psi(n)$ zu zerlegen. In Cap. IV theilt der Verfasser eigene Untersuchungen über die näherungsweise Summirung der Reihen mit, wobei er sich auf einfache geometrische Betrachtungen stützt. Cap. V enthält die Entwickelung der Functionen in Reihen theils mit Hülfe des Maclaurin'schen Satzes, theils nach anderen Methoden. In Cap. VI wird die Summirung der Reihen ausführlicher behandelt; die hauptsächlichsten Methoden kommen darauf hinaus, die gesuchte Summe entweder als Integral einer Differentialgleichung oder als bestimmtes Integral darzustellen. Der Verfasser beschränkt sich hierbei auf die einfacheren Fälle. Cap. VII enthält die Transformation der Reihen; hierzu giebt der Verfasser nur zwei Methoden, die Bildung von Differenzen (nach Euler) und die Einführung complexer Zahlen.

Einige Hauptfragen sind unerledigt geblieben, z. B. unter welchen Umständen die Summe einer Reihe eine continuirliche Function ist, ob und unter welchen Bedingungen die Differentiation einer Reihe erlaubt ist etc.; auch fehlt die Lehre von den Doppelreihen, die gerade bei Transformationen eine wichtige Rolle spielt. SCHLÖMILCH.

Einleitung in die technische Mechanik für Gewerbe- und Industrieschulen und zugleich mit Rücksicht auf das Regulativ für die Aufnahmsprüfungen am eidgenössischen Polytechnikum in Zürich bearbeitet

von ANTON PH. LARGIADÈR, Professor an der Industrieschule in Frauenfeld. Frauenfeld und Leipzig, Druck und Verlag von J. Huber. 1860.

Nach dem Inhalte der Vorrede ist die vorliegende Schrift zunächst im Interesse der schweizerischen kantonalen Gewerbe- und Industrieschulen abgefasst, insofern dieselben Vorbereitungsschulen für das eidgenössische Polytechnikum in Zürich sind. Sie soll nämlich „eine weitere Ausführung derjenigen Lehren der Mechanik, deren Kenntniss von den Bewerbern um Aufnahme in den ersten Jahrescurs der Bau-, Ingenieur- und mechanisch-technischen Schule gefordert wird," enthalten und ein Leitfaden sein, aus welchem sich Jedermann Gewissheit über den Umfang der Kenntnisse in der Mechanik verschaffen kann, die ein Aspirant für den ersten Jahrescurs der erwähnten Fachschulen besitzen muss. Der Umfang des Buches war hiernach im Wesentlichen von dem Regulativ für die Aufnahmeprüfungen*) des Züricher Polytechnikums abhängig; doch hat sich der Verfasser bemüht, demselben eine solche Abrundung zu geben, dass es ein auch ausserhalb der angegebenen Grenzen gewiss brauchbares Lehrbuch der Elemente der allgemeinen Mechanik nebst deren Anwendung auf die Gleichgewichtsbedingungen und Bewegungserscheinungen an festen Körpern geworden ist. Die nachfolgende Inhaltsangabe, welche der Referent zugleich zur Erörterung einiger wenigen Punkte, in denen er mit dem Verfasser nicht ganz einverstanden ist, benutzen will, möge dieses Urtheil rechtfertigen.

Das ganze Buch zerfällt in drei Haupttheile; der erste beschäftigt sich mit der mathematischen Bewegungslehre, der zweite mit der Mechanik des materiellen Punktes, der dritte enthält die Mechanik fester Körper; in einem Anhange sind die einfachen Maschinen abgehandelt.

In der mathematischen Bewegungslehre werden nach Aufstellung der nöthigen Vorbegriffe zunächst die Formeln für gleichförmige und gleichförmig geänderte Bewegung eines Punktes entwickelt, woran sich einige allgemeine Bemerkungen über ungleichförmige Bewegungen, sowie über die Bewegung eines Systems unter sich fest verbundener Punkte schliessen. Bei diesem letzteren Theile fehlt der auch in elementarer Form leicht zu führende Beweis, dass auf die hierbei betrachteten beiden Bewegungsarten: „Fortschreiten" und „Drehung", jede Bewegung eines festen Systems von Punkten zurückgeführt werden kann. Eine Sonderbarkeit ferner, welche der Verfasser mit mehreren Lehrbüchern der Mechanik gemein hat, besteht darin, dass er bei Berechnung der Geschwindigkeit eines zu einem rotirenden System gehörenden Punktes die Radien als unbenannte Zahlen, die Winkelgeschwindigkeiten dagegen als benannte Zahlen in Rechnung stellt.

*) Der Verfasser schreibt consequent „Aufnahmsprüfungen"; überhaupt ist seine Schrift von Provinzialismen, wie „innert" für „innerhalb", „ferners" statt „ferner" u. dgl. m., sowie von stylistischen Härten nicht ganz frei.

Da der Begriff der Winkelgeschwindigkeit von der Proportionalität der Bogenlängen und Radien bei gleichem Centriwinkel, also vom Verhältniss des Bogens zum zugehörigen Halbmesser, nicht aber umgekehrt der Begriff des Radius von einem Geschwindigkeitsverhältnisse abgeleitet ist, so dürfte diese Eigenthümlichkeit schwer zu rechtfertigen sein. — An die Betrachtung der einfachen Bewegungen reiht sich die Lehre von ihrer Zusammensetzung, die, soweit hierbei nur gleichförmige und gleichförmig geänderte Bewegungen eines Punktes in Frage kommen, mit grosser Vollständigkeit abgehandelt wird. Die aus gleichförmiger und gleichförmig geänderter Bewegung zusammengesetzte parabolische Bewegung wird hierbei durch das Beispiel der Wurfbewegung im leeren Raume weiter erläutert; ferner giebt dieselbe Bewegungsart Gelegenheit, davon die Normalacceleration abzuleiten. Den Schluss der mathematischen Bewegungslehre bildet die Untersuchung der relativen Bewegung zweier Punkte, welche durch geometrische Betrachtungen veranschaulicht wird. Einfacher würde sich diese Untersuchung gestaltet haben, wenn der Verfasser die einfache Bemerkung aufgenommen hätte, dass die relative Bewegung zweier Punkte durch eine ihnen ertheilte gemeinschaftliche Bewegung nicht gestört wird, dass also, wenn man dem System der beiden Punkte eine gemeinschaftliche Bewegung ertheilt, welche die des einen aufhebt, dadurch die des anderen in eine absolute umgewandelt wird.

Der zweite Theil, die Mechanik des materiellen Punktes, erörtert zunächst die mechanischen Grundbegriffe, welche nachher auf die Untersuchung der Wirkung einer, sowie mehrerer Kräfte auf einen freien materiellen Punkt angewendet werden. Die Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte stützt sich hierbei auf das Kräfteparallelogramm, welches in bekannter Weise auf das Parallelogramm der Bewegungen zurückgeführt wird. Da die Berechtigung zu dieser Zurückführung sich auf den Grundsatz stützt, dass bei gleichzeitiger Wirkung mehrerer Bewegungsursachen in jedem Augenblicke jede derselben ihre Thätigkeit unabhängig von allen anderen äussert, so wäre es zur schärferen Begründung der so wichtigen Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte wünschenswerth gewesen, dieses Princip mit Bestimmtheit hervorgehoben zu sehen. Es ist diess übrigens ein Mangel, der sich nicht allein in dem vorliegenden Lehrbuche, sondern in dem grösseren Theile derjenigen vorfindet, welche in gleicher Weise das Kräfteparallelogramm ableiten. — Im weiteren Verlaufe des zweiten Theiles wird der Begriff der mechanischen Arbeit erörtert und mit den davon abhängigen lebendigen Kräften, sowie mit dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in Zusammenhang gebracht. Hieran reiht sich die Untersuchung der Wirkung von Kräften auf einen unfreien materiellen Punkt nebst der Theorie der Centrifugalkraft; als besonderes Beispiel einer Kraftwirkung auf einen nicht frei beweglichen Punkt wird zum Schlusse die Bewegung eines materiellen Punktes, der unter alleiniger Wirkung der

Schwerkraft eine vorgeschriebene Bahn beschreibt, nähert erörtert, wobei auch die Bewegungsgesetze des einfachen Pendels, soweit dies in elementarer Weise möglich ist, entwickelt werden.

Der dritte Hapttheil, die Mechanik fester Körper, zerfällt in zwei Unterabtheilungen, die Gleichgewichts- und die Bewegungslehre fester Körper. Die Statik behandelt nach einem Einleitungscapitel, in welchem die nöthigen Grundbegriffe und Grundgesetze festgestellt werden, in den Capiteln 2 bis 5 die Lehre von der Zusammensetzung von Kräften, die an einem festen Systeme materieller Punkte angreifen, in naturgemässem Fortschritte von den einfachsten Fällen bis zu der allgemeinsten Zusammensetzungsaufgabe. Namentlich ist dabei die Lehre von den Kräftepaaren in vollständigerer Weise erörtert und zur Anwendung gebracht, als dies gewöhnlich in elementaren Lehrbüchern zu geschehen pflegt. Aus den allgemeinen Gleichungen für Zusammensetzung der Kräfte werden in Capitel 6 die sechs allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen abgeleitet, worauf das Gleichgewicht an nicht ganz freien Körpern zur Besprechung gelangt. Den Schluss der Statik bildet die Schwerpunktstheorie, wobei Referent nur den allgemeinern, von der Schwerkraft unabhängigen Begriff des Schwerpunktes als Mittelpunkt eines Systems gleichgerichteter, den Massen proportionaler Kräfte, welche an allen Punkten eines materiellen Systems angreifen, vermisst. Die Aufnahme dieses Begriffes wäre um so wünschenswerther gewesen, da die Gesetze der Schwerpunktsbewegung eines festen Körpers von ihm allein abhängig sind. — Die Dynamik fester Körper beginnt mit der Wirkung von Kräften auf ein freies festes System. Das hierbei über die Bewegung des Schwerpunktes Gesagte entbehrt in Folge des eben angegebenen Mangels einer strengeren Begründung. Im 2. Cap. der Bewegungslehre wird aus dem Begriffe der lebendigen Kraft eines festen Körpers der Begriff des Trägheitsmomentes abgeleitet und hierauf die zwischen den auf parallelele Achsen bezogenenen Trägheitsmomenten stattfindende Relation entwickelt; die Berechnung von Trägheitsmomenten homogener Körper war durch den elementaren Standpunkt des Lehrbuches ausgeschlossen. Das 3. Cap. beschäftigt sich mit der Zusammensetzung der Centrifugalkraft an einem um eine feste Achse rotirenden Körper und dem hiervon herrührenden Druck auf die Achse; im 4. Cap. werden die Bewegungsgesetze des materiellen Pendels auf die des einfachen Pendels zurückgeführt; im 5. endlich sind die einfachsten Fälle der Gesetze des Stosses fester Körper entwickelt. Man wird aus dem letzten Theile dieser Inhaltsangabe ersehen, dass die in der Dynamik abgehandelten Theorieen in einem loseren Zusammenhange stehen, als dies in den übrigen Abschnitten des vorliegenden Lehrbuches der Fall ist, bei denen sich überall eine naturgemässere Verbindung der einzelnen Lehren erkennen lässt. Einestheils der zunächst liegende Zweck des Buches, welcher dasselbe an ein feststehendes Programm anknüpft, anderntheils der elemen-

tare, allgemeineren dynamischen Untersuchungen widerstrebende Standpunkt desselben mag hierbei zur Rechtfertigung dienen.

Im Anhange, welcher von den einfachen Maschinen handelt, sind die sogenannten mechanischen Potenzen als mathematische Maschinen (ohne Berücksichtigung des Reibungswiderstandes) nach ihren Gleichgewichtsbedingungen untersucht. An die Theorie der schiefen Ebene knüpft sich hierbei die Lehre von der Stabilität; die Bedingungen des Gleichgewichts am Hebel sind durch die Theorie der gemeinen Waage und der sogenannten Strassburger Brückenwaage näher erläutert.

Was die Behandlung des Stoffes betrifft, so hat der Verfasser nach der Vorrede neben möglichst grosser Anschaulichkeit überall eine möglichst streng mathematische Durchführung der betreffenden Lehren zu erzielen gestrebt; der Referent kann nach Durchsicht des Buches das Urtheil abgeben, dass dieses Ziel grossentheils erreicht worden ist. Der Stellen, die vor einem streng mathematischen Gewissen nicht vollkommen zu rechtfertigen sind, lassen sich nur wenige ausfindig machen; namentlich dürfte jedoch hierher die Auffassung der Rotationsflächen als unendlich dünner Rotationshohlkörper und der erzeugenden Linien als unendlich schmaler Flächen bei Herleitung der Guldin'schen Regel zu rechnen sein. — Die mathematischen Vorkenntnisse, welche das Lehrbuch bei seinen Lesern voraussetzt, überschreiten nicht die elementaren Lehrsätze der Algebra, der Geometrie und der ebenen Trigonometrie. Nur an wenigen Stellen, namentlich bei der allgemeinen auf Zusammensetzung der Bewegungen und Zusammensetzung der Kräfte bezüglichen Untersuchungen sind die Grundlehren der analytischen Geometrie benutzt worden; doch finden dieselben, soweit sie zur Anwendung gelangen, im Buche selbst ihre Erläuterung.

Zum Schlusse hält sich Referent trotz der gemachten Ausstellungen berechtigt, auf das bereits im Eingange ausgesprochene Urtheil zurückzukommen, dass die vorliegende Schrift wohl geeignet ist, auch ausserhalb der Kreise, für welche sie zunächst bestimmt wurde, zur Einleitung in das Studium der technischen Mechanik zu dienen. Für das Privatstudium dürfte sie sich noch durch die nicht unbeträchtliche Anzahl durchgerechneter numerischer Beispiele empfehlen, welche die vorgetragenen Lehren in ein klareres Licht zu setzen bestimmt sind.

O. Fort.

Die Centralprojection als geometrische Wissenschaft, von Dr. O. W. Fiedler. Chemnitz 1860. 41 S. 4°.

Wenn allen Punkten A, B, C... einer geometrischen Gestalt gewisse Punkte a, b, c... einer Fläche nach einem bestimmten Gesetze entsprechen, so nennt man die Gesammtheit der letzteren das Bild oder die Projection

jener Gestalt und die Fläche, in der sie liegen, die Bild- oder Projectionsfläche. Zu den einfachsten Gesetzen der Abhängigkeit der Punkte $a, b, c \ldots$ von den Punkten $A, B, C \ldots$ gelangt man, wenn man die Geraden $Aa, Bb, Cc \ldots$ in Betracht zieht und annimmt, dass dieselben entweder einer bestimmten Richtung parallel sein oder sich in einem einzigen Punkte schneiden sollen. Nimmt man ausserdem, wie dies am häufigsten geschieht, zur Bildfläche eine Ebene, so erhält man die gewöhnliche Parallel- oder Centralprojection der Gestalt ABC... Die Aufsuchung der Beziehung zwischen einer geometrischen Gestalt und ihrem Bilde oder ihrer Projection kann von einem zweifachen Gesichtspunkte aus unternommen werden: einmal sucht man Vorschriften auf zur richtigen Projection des gegebenen Gegenstandes oder sucht umgekehrt von der gegebenen Projection zur geometrischen Bestimmung der dargestellten Raumgestalt zu gelangen, das andere Mal will man aus den Eigenschaften der Projection Eigenschaften des ursprünglichen Objectes herleiten. Im ersten Falle gelangt man zu einer Theorie des Zeichnens, im anderen zu einer Methode der geometrischen Untersuchung. Ist nun die Parallel- und Centralprojection als Methode der Untersuchung in neueren Zeiten vielfach und mit grossem Erfolge angewendet worden, und hat die Darstellung geometrischer Gebilde mit Hülfe der Parallelprojection einen hohen Grad wissenschaftlicher Ausbildung erhalten, so ist dagegen der Darstellung geometrischer Gestalten mit Hülfe der Centralprojection bis jetzt eine systematische Bearbeitung noch nicht zu Theil geworden. Eine solche systematische Bearbeitung der Centralprojection oder Perspective zu versuchen, ist der Zweck der vorliegenden Abhandlung. Sie beabsichtigt weder erschöpfende Vollständigkeit noch nimmt sie Rücksicht auf das Praktische der Perspective; sie will weiter nichts als die Grundgedanken der Methode der Centralprojection niederlegen, auf denen die Wissenschaft weiter gebaut werden kann. Wir können dem Herrn Verfasser für seine Bemühungen nur Dank wissen und wollen unsern Lesern eine nähere Angabe des Inhalts der Abhandlung nicht vorenthalten.

Die Abhandlung zerfällt in zwei Abschnitte, von denen der erste die ebenflächigen Raumformen, der zweite die krummen Oberflächen, insbesondere die Kegelflächen behandelt. Die Theorie anderer Flächen, wie die der Drehungsflächen, der Rückungsflächen, der Umhüllungsflächen, ist nicht gegeben. Der erste Abschnitt enthält drei Theile mit folgenden Ueberschriften:

A. Von der Darstellung der geometrischen Grundgebilde (Punkt, Gerade, Ebene) und ihrer Anwendung zur Auflösung von Aufgaben.

In diesem Theile werden die Principien der Centralprojection entwickelt. Die Grundgedanken aber sind in Kürze folgende: Das Projectionscentrum ist bestimmt durch den Hauptpunkt und den Distanz-

kreis, d. h. durch den Fusspunkt der Senkrechten vom Projectionscentrum auf die Bildebene und durch den um den Hauptpunkt als Mittelpunkt mit der Distanz des Projectionscentrums von der Bildebene als Halbmesser beschriebenen Kreis. Eine Ebene ist bestimmt durch ihre Spur und ihre Fluchtlinie, d. h. durch die beiden geraden Linien, in welchen jene Ebene und eine Parallelebene durch das Projectionscentrum parallel mit der ersten gezogen worden ist, die Bildebene durchsticht. Ein Punkt endlich ist bestimmt durch zwei sich schneidende Gerade, deren eine seine projicirende Linie ist. Nach der Discussion der Darstellung der Ebene, der Geraden und des Punktes werden die Principien angewendet zur Auflösung folgender Aufgaben, die sich aus der Verbindung der drei geometrischen Grundgebilde ergeben. Aufgabe I. Durch einen Punkt zu einer geraden Linie eine Parallele zu ziehen. Aufgabe II. Durch einen Punkt und eine gerade Linie eine Ebene zu legen. Aufgabe III. Die gerade Verbindungslinie zweier Punkte zu bestimmen. Aufgabe IV. Durch eine gerade Linie eine Ebene zu legen, die einer anderen geraden Linie parallel ist. Aufgabe V. Durch einen Punkt eine Ebene zu legen, welche zwei geraden Linien parallel ist; und als specieller Fall die Aufgabe: durch einen Punkt eine Ebene zu legen, die einer gegebenen Ebene parallel ist. Aufgabe VI. Eine Ebene darzustellen, die durch drei gegebene Punkte geht. Aufgabe VII. Die Durchschnittslinie zweier Ebenen anzugeben. Hieran schliessen sich die beiden folgenden Aufgaben: den Durchschnittspunkt von drei Ebenen zu bestimmen und den Durchschnittspunkt einer geraden Linie mit einer Ebene zu construiren. Aufgabe VIII. Eine Schaar Ebenen zu verzeichnen, die durch denselben Punkt gehen. Aufgabe IX. Durch einen Punkt eine gerade Linie so zu ziehen, dass sie zwei andere gerade Linien durchschneidet. Und hierzu die Aufgabe: In einer gegebenen Richtung eine Gerade zu ziehen, welche zwei gegebene Gerade schneidet. Aufgabe X. Die Normale zu zeichnen, welche von einem Punkte aus auf eine Ebene gefällt werden kann, und an diese sich anschliessend die Aufgabe: Durch eine gerade Linie zu einer Ebene die Normalebene zu legen. Aufgabe XI. Durch einen Punkt eine Ebene zu legen, die zu einer geraden Linie normal ist. Hierbei die Aufgabe: Die Senkrechte von einem Punkt auf eine gerade Linie zu construiren. Aufgabe XII. Die gemeinschaftliche Normale zweier geraden Linien zu bestimmen.

B. Von der Ableitung der wahren Grösse und Lage projicirter Raumformen.

Die Bestimmung der wahren Gestalt und Grösse einer Raumform reducirt sich in ihren letzten Elementen auf die Bestimmung der wahren Grösse einer begrenzten Geraden und eines Winkels. Diese Elemente werden in ihrer wahren Grösse dadurch dargestellt, dass man die Ebene, in der sie liegen, um ihre Spur dreht, sie herabschlägt, bis sie mit der

Bildebene zusammenfällt. An die Auflösung des Hauptproblems dieses Theiles: einen Punkt mit einer Ebene, welche ihn enthält, in die Bildebene herabzuschlagen, reihen sich zur Erläuterung folgende vier Aufgaben: 1. die wahre Länge einer geradlinigen Strecke zu construiren; 2. die wahre Grösse des von zwei geraden Linien gebildeten Winkels zu bestimmen; 3. den Neigungswinkel einer geraden Linie gegen eine Ebene, und 4. den Neigungswinkel zweier Ebenen zu construiren.

Wie dieser Theil die Lehre vom richtigen Gebrauch central-projectivischer Zeichnungen enthält, so der folgende dritte die Anweisung zur richtigen Projection einer gegebenen oder definirten Raumform. Die Ueberschrift lautet:

C. Von der Ableitung der Projection aus gegebenen Elementen der Grösse und Lage.

Die Hauptaufgabe dieses Theiles ist: einen in der Bildebene gegebenen Punkt in eine bestimmte Ebene zurückzuschlagen, d. h. eine Ebene, welche den gegebenen Punkt enthält, durch Drehung um ihre Spur in die Lage zurückzuführen, welche ihr zukommt. Als Aufgaben zur Anwendung findet man hier die folgenden gelöst: 1. Auf einer geraden Linie von einem ihrer Punkte aus eine gegebene Länge abzutragen; 2. durch einen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, die mit einer anderen geraden Linie einen vorgeschriebenen Winkel bildet; 3. eine gerade Linie zu bestimmen aus einem ihrer Punkte, ihrer projicirenden Ebene und dem Winkel, den sie mit der Bildebene einschliesst; 4. durch eine gerade Linie eine Ebene zu legen, die mit der Bildebene einen vorgeschriebenen Winkel bildet; eine gerade Linie zu bestimmen durch einen ihrer Punkte, durch ihre Ebene und den Winkel, den sie mit einer anderen Ebene einschliesst; 6. durch eine gerade Linie eine Ebene so zu legen, dass sie mit einer anderen Ebene einen bestimmten Flächenwinkel bildet; 7. durch einen gegebenen Punkt eine Ebene so zu legen, dass die geraden Linien, in denen sie zwei bestimmte Ebenen schneidet, mit der Durchschnittslinie dieser letzteren bestimmte Winkel bilden. — Der erste Abschnitt enthält, wie sich aus der gegebenen Uebersicht seines Inhalts ergiebt, vollständig das System der Mittel, durch welche von jeder bestimmten ebenflächigen Raumgestalt die Centralprojection gezeichnet werden kann. Der Verfasser lässt demselben Betrachtungen über die Veränderung des Projectionscentrums und über die Mittel folgen, durch welche Raumformen nach Zahl und Maass bestimmt werden können.

Der zweite Abschnitt der vorliegenden Abhandlung, welcher die Darstellung der krummen Oberflächen zum Gegenstande hat, bespricht ausführlicher die Darstellung der Kegel- und Cylinderflächen, ihrer Durchschnitte mit Ebenen und geraden Linien, ihrer Tangentialebenen und Tangenten, ihrer Normalen, ihrer gegenseitigen Durchdringung. Daran schliesst sich die Darstellung des elliptischen einfachen Hyperboloids und des hyper-

bolischen Paraboloids und die Angabe der wichtigsten Eigenschaften dieser Oberflächen in der Form, in welcher sie in der Centralprojection auftreten. Zuletzt folgen noch Andeutungen über die Darstellung anderer Regelflächen.

Im Schlusswort kommt der Herr Verfasser noch einmal auf die schon in der Einleitung erwähnten Schriften von J. H. Lambert: „Die freie Perspective, oder Anweisung, jeden perspectivischen Aufriss von freien Stücken und ohne Grundriss zu verfertigen“, sowie auf das Werk von B. E. Cousinery: „*Géométrie perspective*“ (Paris 1828) zurück. In beiden Schriften finden sich schon die Principien der Centralprojection aufgestellt, die wir oben mitgetheilt haben.

Um die Besprechung der vorliegenden Abhandlung nicht zu weit auszudehnen, wollen wir von den Resultaten nicht sprechen, zu welchen eine Vergleichung der selbstständig ausgebildeten Centralprojection mit der Parallelprojection führt; ebenso wenig auf die geometrische Bedeutung der Centralprojection zurückkommen. Beiden Gegenständen sind die letzten Seiten der Abhandlung gewidmet. Nur eine Bemerkung sei uns zum Schlusse noch erlaubt, nämlich die, dass es der Darstellung des interessanten Inhalts der Abhandlung zum grossen Vortheil gereicht hätte, wenn dem Styl mehr Sorgfalt gewidmet worden wäre, als dies an vielen Stellen der Fall gewesen ist. Der berühmte Verfasser der „*Géométrie descriptive*“ konnte auch hierin als Muster gelten. Trotz dieser Bemerkung legen wir aber die Abhandlung mit dem Wunsche aus der Hand, dass sie recht viele Leser finden und zum weiteren Ausbau der geometrischen Wissenschaft der Centralprojection anregen möge. Dr. Rudof Hoffmann.

Bibliographie

vom 1. August bis 1. October 1860.

Periodische Schriften.

Astronomische Nachrichten, begründet von C. Schumacher, fortges. von P. A. Hansen und C. A. F. Peters. 54. Bd. No. 1. Hamburg, Perthes, Besser & Mauke. pro compl. 5 Thlr.

Archiv der Mathematik und Physik, herausgeg. v. J. A. Grunert. 35. Thl. 1. Heft. Greifswald, Koch's Verl. pro compl. 3 Thlr.

Fortschritte der Physik im Jahre 1858. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. 14. Jahrg. redig. von O. Hagen. 1. Abth. Berlin, G. Reimer. 1⅚ Thlr.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica. Ed. E. A. Zuchold. 10. Jahrg. 1. Heft. Januar — Juni 1860. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 8 Ngr.

Mémoires de l'Académie de sciences de l'Institut de France. Tome 30. Paris.

Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du bulletin de l'académie de St. Petersbourg. T. 3. livr. 2. Leipzig, Voss. 12 Ngr.

Mélanges physiques et chimiques tirés du bulletin de l'académie de St. Petersbourg. Tome 4, livr. 1—4. Ebendas. 2 Thlr.

Reine Mathematik.

Kummer, E. E. Gedächtnissrede auf G. P. Lejeune-Dirichlet. (Akad.) Berlin, Dümmler in Comm. 12 Ngr.

Gallenkamp, W. Die Elemente der Mathematik. 2. Aufl. 2. Thl. Arithmetik und Algebra, Stereometrie und Trigonometrie. Iserlohn, Bädeker. ⅔ Thlr.

Sass, J. B. Buchstabenrechnung und Algebra. 3. Aufl. Altona, Schlüter. 1 Thlr.

Thomas, K. Die Potenz und die ganze Zahl, das Eins und Eins der Mathematik. Leipzig, Wagner. ⅓ Thlr.

Schwarz, H. Beiträge zum mathematischen Unterrichte (neue Parallelentheorie und Begründung der Bruchlehre). Hagen, Butz in Comm. ¼ Thlr.

Vega-Bremiker. Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. 24. Aufl. Berlin, Weidmann. 1¼ Thlr.

Bremiker, C. Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit sechs Decimalstellen. Berlin, Nicolai'sche Buchhdlg. 1¼ Thlr.

Meissel, E. D. F. Sammlung mathematischer Tafeln. 1. Lief. Iserlohn, Bädeker. ⅔ Thlr.

Claus, C. Leitfaden für den ersten Unterricht in der Planimetrie. Lübeck, Dittmer'sche Buchh. 6 Ngr.

Escher, H. Die mathematischen Verhältnisse der Kreislinie. Zürich, Meyer & Zeller. 6 Ngr.

Dilling, A. Der rechnende Geometer. Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der algebr. Geom. Langensalza, Schulbuchhdlg. d. Thür. L. V. 1 Thlr.

Kinkelin, H. Grundriss der Geometrie (Planimetrie und Stereometrie). Zürich, Meyer & Zeller. 12 Ngr.

Zehme, W. Lehrbuch der ebenen Geometrie nebst Repetitionstafeln. 3. Aufl. Hagen, Butz. 16 Ngr.

Wenck, J. Die construirende Geometrie als Grundlage für das geometrische Zeichnen. Leipzig, Klinkhardt. 12 Ngr.

Fasbender, E. Anfangsgründe der beschreibenden Geometrie, der analytischen Geometrie, der Kegelschnitte und einfachen Reihen. Für Realschulen als Ergänzung zu den mathem. Lehrbüchern von Koppe. Essen, Bädeker. ⅚ Thlr.

Böklen, O. Analytische Geometrie des Raumes, enth. die Theorie der krummen Flächen, der gewundenen Curven und der Linien auf Flächen. Stuttgart, Becher's Verlag. 1 Thlr.

SERENUS VON ANTISSA. Ueber den Schnitt des Cylinders. Aus dem Griechischen v. E. NIZZE. Stralsund, Hingst. ⅔ Thlr.

Angewandte Mathematik.

KRÖHNKE, H. Handbuch zum Abstecken von Curven auf Eisenbahnen etc. 3. Aufl. Leipzig, Teubner. 18 Ngr.

PLACE, J. Ueber die Prüfung der Glasmikrometer. Inaug. Dissert. Berlin, G. Reimer. ⅓ Thlr.

SEEBERGER, G. Grundzüge einer neuen Methode für angewandte Perspective. München, literarisch-artist. Anstalt. 14 Ngr.

HORNSTEIN, K. Ueber Helligkeitsmessungen bei kleinen Fixsternen. Mit einem Anhang: Ephemeriden für die Helligkeit der Asteroiden im J. 1860. (Akad.)

ENCKE, J. F. Ueber den Kometen von Pons. 8. Abhdlg. (Akad.) Berlin, Dümmler in Comm. 12 Ngr.

HUBER, Ph. Mechanik für Gewerbeschulen, Realschulen etc. 2. Aufl. Stuttgart, Krais & Hoffmann. 1½ Thlr.

BRIX, A. F. W. Ueber die Reibung und den Widerstand der Fuhrwerke auf Strassen von verschiedener Beschaffenheit. 2. Ausg. Berlin, Ernst & Korn. 2⅔ Thlr.

HELMHOLTZ und PIOTROWSKY. Ueber Reibung tropfbarer Flüssigkeiten. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 12 Ngr.

HAUER, K. v. Krystallogenetische Beobachtungen. 2. u. 3. Reihe. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 10 Ngr.

ARMENGAUD FRÈRES et AMOUROUX. *Nouveau cours de dessin industriel, comprenant: le dessin linéaire, les études de projections etc. Paris, Lacroix & Baudry.* 25 *frcs.*

LA GOURNERIE. *Traité de géometrie descriptive. 1 Partie. Paris, Mallet-Bachelier.* 10 *frcs.*

Physik.

ARAGO's sämmtliche Werke, herausgeg. v. G. W. HANKEL. 16. Bd. Leipzig, O. Wigand. 2 Thlr.

FECHNER, G. Th. Elemente der Psychophysik. 2. Bd. Leipzig, Breitkopf & Härtel. 2 Thlr. 21 Ngr.

DUB, J. Der Elektromagnetismus. Berlin, Springer's Verl. 3⅓ Thlr.

HUBER, Ph. Grundzüge der technischen Naturlehre. 2. Aufl. Stuttgart, Krais & Hoffmann. 21 Ngr.

FERREL, W. *The motions of fluids and solids relative to the earth's surface: comprising applications to the winds and the currents of the ocean. New-York. (London, Trübner & Co.)* 3 *sh.* 6 *d.*

BOASE, H. S. *The philosophy of nature: a systematic treatise on the causes and laws of natural philosophy. London, Longman.* 12 *sh.*

DOWNES, O. G. *On the physical constitution of comets. London, Layton.* 6 *sh.*

Mathematisches Abhandlungsregister.

Die Petersburger Academie publicirt seit dem 27. Juni 1859 ihre Sitzungsberichte unter dem Titel: *Bulletin de l'académie imperiale des sciences de St. Petersbourg.* Von diesem Datum an wird desshalb eine neue Abkürzung benutzt, nämlich *Bull. Acad. Petersb.*

1859.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

A.

Analytische Geometrie der Ebene.

247. *Sur les courbes du troisième degré.* **Abel Transon.** *N. ann. math. XVIII,* 266.
248. Ueber eine Gattung von Curven vierten Grades, welche mit den elliptischen Functionen zusammenhängen. **Siebeck.** Crelle LVII, 359.
249. *Le lieu des sommet, des angles droits circonscrits à une courbe de la classe n est une courbe de degré $n^2 - n$.* **Salmon.** *N. ann. math. XVIII,* 314. [Vergl. No. 7.]
250. Ueber die Construction der Tangenten gewisser ebener Curven. **Wiegers.** Grun. Archiv XXXIII, 166.
251. Ueber Grenzverhältnisse bei Curven. **Völler.** Grun. Archiv XXXIII, 350. [Vergl. No. 3.]
252. *Mémoire sur les polaires inclinées.* **Dewulf.** *N. ann. math. XVIII,* 322.
253. Ueber Fusspunktlinien verschiedener Ordnung. **Wetzig.** Zeitschr. Math. Phys. IV, 319.
254. *Theorems on related curves.* **Holditch.** *Quart. Journ. Math. III,* 271.
255. *Enveloppes.* **Salmon.** *N. ann. math. XVIII,* 366.
256. *Transformation des propriétés des figures.* **Faure.** *N. ann. math. XVIII,* 381.
257. *Sur le théorème segmentair de Carnot.* **Terquem.** *N. ann. math. XVIII,* 347.
258. *Relations entre les points et tangentes multiple.* **Salmon.** *N. ann math. XVIII,* 365.

Vergl. Brennpunkte, Convexität, Doppeltangente, Ellipse, Evolution, Geschichte der Mathematik 340, Hyperbel, Kegelschnitte, Krümmungskreis 381, Mechanik 395, Parabel, Quadratur, Rectification.

Analytische Geometrie des Raumes.

259. *Sur le système de coordonnées trilitères et quadrilitères.* **Terquem.** *N. ann. math. XVIII, Bull. de bibl.* 65.
260. Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme. **Kummer.** Crelle LVII, 189.
261. *Les propriétés communes à un système de deux lignes de courbure d'une même surface du second ordre et à un système de deux lignes droites situées dans un même plan.* **Aoust.** *Compt. rend. XLIX,* 729.
262. Auflösung einer geometrischen Aufgabe (Crelle LI, 100). **Bacaloglo.** Zeitschr. Math. Phys. IV, 366.
263. *Sur les lignes de courbure et les lignes géodésiques des surfaces developpables dont les génératrices sont parallèles à celles d'une surface réglée quelconque.* **Molins.** *Journ. Mathém. XXIV,* 347.

264. Ueber einige Sätze der höhern Geometrie. Böcklen. Grun. Archiv XXXIII, 111.
265. *Note sur les sections toriques.* Garlin. *N. ann. math. XVIII*, 319.
266. *On Contour and Slope lines.* Cayley. *Phil. Mag. XVIII*, 264.
267. *Sulle figure inverse.* Tortolini. *Annali mat. II*, 189.
268. *Sopra alcune linee e superficie curve derivate.* Tortolini. *Annali mat. II*, 316.
269. *Note sur les courbes et surfaces dérivées.* Roberts. *Compt. rend. XLIX*, 742.
Vergl. Cubatur, Determinanten in geometrischer Anwendung 290, 291, Krümmungslinien, Oberflächen, Oberflächen 2ter Ordnung, Perspective, Sphärik.

Astronomie.

270. Entwickelung der rechtwinkligen Coordinaten eines Planeten nach aufsteigen den Dimensionen der planetarischen Massen nach Raabe. Fidler. Astr. Nachr. LI, 289.
271. *Calcul des variations séculaires des moyens mouvements du périgée et du noeud de l'orbite de la lune.* Delaunay. *Compt. rend. XLIX*, 309.
272. *Sur l'équation séculaire du moyen mouvement de la lune.* De Pontécoulant. *Compt. rend. XLVIII*, 1023, 1122. — Delaunay. *ibid.* 1031.
273. Ueber Declinationsänderung bei Circummeridianhöhen der Sonne. Schaub. Astr. Nachr. LI, 109.
Vergl. Geschichte der Mathematik 334, 335, 338.

Attraction.

274. *A mathematical theory of attractive forces.* Challis. *Phil. Mag. XVIII*, 321.
275. *A theory of the force of gravity.* Challis. *Phil. Mag. XVIII*, 442.
276. *Richerche analitiche sopra le attrazioni esercitate da una linea piana verso un punto materiale collocato nel suo piano ed in particolare sull' attrazione del quadrante di un ellissa verso il centro.* Tortolini. *Annali mat. II*, 244.

B.

Bernoulli'sche Zahlen.

277. *Sur les différences de 1^p et sur le calcul des nombres de Bernoulli.* Catalan. *Annali mat. II*, 239.

Bestimmte Integrale.

278. *Sur quelques inégalités concernant les intégrales ordinaires et les intégrales aux différences finies.* Bouniakofsky. *Petersb. Acad. Bull XVII*, 535.
279. *Applicazione di una formola d'integrale definito multiplo all' integrazione di una classe di equazioni a derivate parziali e a coefficienti constanti.* Tortolini. *Annali mat. II*, 260.
Vergl. Elliptische Functionen, Gammafunctionen.

Brennpunkte.

280. *Note sur les foyers des courbes planes.* Terquem. *N. ann. math. XVIII*, 399.

C.

Cartographie.

281. *Sur les cartes géographiques.* Tissot. *Compt. rend. XLIX*, 673.

Combinatorik.

282. *On the analytical forms called Trees.* Cayley. *Phil. Mag. XVIII*, 374.

Convexität.

283. *Sur une proposition relative à la convexité des courbes.* Gerono. *N. ann. math. XVIII*, 397.

Cubatur.

284. Zur Bestimmung der Rauminhalte und Schwerpunkte von Körpern zwischen zwei Parallelebenen und einer zusammenhängenden Umfläche. Matzka. Grun. Archiv XXXIII, 121.

D.

Decimalbrüche.

285. Zur Theorie der periodischen Decimalbrüche. Sturm. Grun. Archiv XXXIII, 94.

Determinanten.

286. *Notions élémentaires sur les invariants, covariants, discriminants et hyperdéterminants.* Terquem. *N. ann. math. XVIII*, 249, 290, 446. — Blerzy. *ibid.* 420. [Vergl. Bd. IV, No. 288.]
287. *La teorica dei covarianti e degli invarianti delle forme binarie e le sue principali applicazioni.* Brioschi. *Annali mat. II*, 265. [Vergl. No. 38.]
288. *On the value of certain determinants, the terms of which are the squared distances of points in a plane or in space.* Cayley. *Quart. Journ. Math. III*, 275.

Vergl. Elimination, Gleichungen.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

289. *Application de la nouvelle analyse aux surfaces du second ordre.* Painvin. *N. ann. math. XVIII*, 407. [Vergl. No. 44.]
290. *On a new analytical representation of curves in space.* Cayley. *Quart. Journ. Math. III*, 225.
291. *On the relation which connects the mutual distances of five points in space.* Salmon. *Quart. Journ. Math. III*, 282.
292. *Démonstration d'un théorème de mecanique énoncé par Euler.* Gerono. *N. ann. math. XVIII*, 390.

Differentialgleichungen.

293. *On the solution of differential equations.* S. Roberts. *Quart. Journ. Math. III*, 218.
294. Integration der partiellen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung. Weiler. Grun. Archiv XXXIII, 171.
295. *Démonstration d'un théorème de Jacobi par rapport au problème de Pfaff.* Cayley. *Crelle LVII*, 273.
296. *Sur quelques équations différentielles.* Minding. *Journ. mathém. XXIV*, 273.
297. *Sur les intégrales algébriques des équations différentielles de la mécanique.* Massieu. *Compt. rend. XLIX*, 352
298. *Sur le changement de la variable indépendante.* S. Spitzer. *Compt. rend XLIX*, 48, 270. [Vergl. No. 56.]
299. Studien über Differentialgleichungen von der Form $(mx^2+nx+p)y''+(qx+r)+y' + sy = 0$. S. Spitzer. Zeitschr. Math. Phys, IV, 251.
300. Integration der linearen Differentialgleichung $x^{2n}y^n = Axy' + By$. S. Spitzer. Grun. Archiv XXXIII, 413.
301. Zur Integration einer linearen Differentialgleichung der Form $y^{(n)} = Ax^m y'' + Bx^{m-1}y' + Cx^{m-2}y$. S. Spitzer. Grun. Archiv XXXIII, 118.
302. Integration der Gleichung $(ax+by+c)\frac{d^2z}{dx\,dy} + a\lambda\frac{dz}{dx} + b\mu\frac{dz}{dx} = 0$. S. Spitzer. Grun. Archiv XXXIII, 461.
303. Integration der partiellen Differentialgleichung $(x+y)\frac{2\,d^2z}{dx\,dy} + m_1(x+y)\frac{dz}{dx} + m_2(x+y)\frac{dz}{dy} + nz = 0$. S. Spitzer. Grun. Archiv XXXIII, 476.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 255, Bestimmte Integrale 279, Differenzengleichungen 306.

Differentialquotient.

304. *Sur quelques formules pour la différentiation.* Cayley. *Annali mat. II*, 214.
305. Note über Differenz- und Differentialquotienten von allgemeiner Ordnungszahl. S. Spitzer. Grun. Archiv XXXIII, 116.

Vergl. Mechanik 405.

Differenzengleichungen.

306. Ueber ein zwischen Differenzengleichungen und Differentialgleichungen stattfindendes Reciprocitätsgesetz. S. Spitzer. Grun. Archiv XXXIII, 415.
307. *Sur la différence m^ième^ d'une fonction est constante, la fonction est algébrique entière et du degré m.* Gerono. *N. ann. math. XVIII*, 389.

Doppeltangenten.

308. *On the double tangent of a plane curve.* Cayley. *Phil. Mag. XVIII*, 471. [Vergl. Bd. IV, No. 247.]

E.

Elasticität.

309. Zur Theorie der Elasticität. Neumann. Crelle LVII, 281.

Elimination.

310. *Méthode d'élimination. Cayley. N. ann. math. XVIII*, 397.
311. Ueber ein die Elimination betreffendes Problem. Borchardt. *Annali mat. II*, 262. [Vergl. Nr. 99.]

Ellipse.

312. *Propriété de l'ellipse. Lino de Pombo. Compt. rend. XLIX*, 756.
Vergl. Attraction 276.

Elliptische Functionen.

313. *The higher theory of elliptic integrals treated from Jacobi's functions as its basis. Newman. Phil. Mag XVIII*, 394.
314. *Sur la transformation des fonctions elliptiques de la première espèce. Baehr.* Grun. Archiv XXXIII, 354.
315. *On the comparison of hyperbolic arcs. Merrifield. Phil. Mag. XVIII*, 461.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 248, Variationsrechnung.

Evolution.

316. *On the nth evolutes and involutes of curves. Holditch. Quart. Journ. Math. III*, 236.

Exponentialgrösse.

317. Ueber den Werth von e^{a+bi}. Dienger. Grun. Archiv XXXIII, 481.

F.

Factorielle.

318. Ueber Facultätenreihen. Schlömilch. Sächs. Acad. Ber. — Zeitschr. Math. Phys. IV, 390.

Figurirte Zahlen.

319. Ueber den Zusammenhang der Gleichung $x^2+y^2=z^2$ mit Dreieckszahlen. Sturm. Grun. Archiv XXXIII, 92.

Functionen.

320. *Fondamenti di una teorica generale delle funzioni di una variabile complessa. Riemann. Annali mat II*, 288.
321. Rechnung mit rationellen symmetrischen Functionen. Hoppe. Zeitschr. Math. Phys. IV, 353
322. *Sur une classe de fonctions qui peuvent s'exprimer rationellement les unes par les autres. Woepcke Journ. Mathém. XXIV*, 339.
323. *On an analytical theorem relating to the distribution of electricity upon spherical surfaces Cayley. Phil Mag. XVIII*, 119, 193.
324. Ueber eine transcendente Function. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. IV, 433.
Vergl. Bernoulli'sche Zahlen, Elliptische Functionen, Exponentialgrössen, Gammafunctionen, Partialbrüche, Tabelle, Trigonometrie.

G.

Gammafunction.

325. Entwickelung einer neuen Reihe für die Gammafunction. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. IV, 431.
326. *Déduction simple de l'expression $\Gamma(x)$. Zehfuss. N. ann. math. XVIII*, 356. [Vergl. Bd. IV, No. 87.]
327. Von den Gammafunctionen und einer besonderen Art unendlicher Producte. Bauer. Crelle LVII, 256.

Geodäsie.

328. Ueber die Genauigkeit einer besonderen Art von Nivellirinstrumenten. Winckler. Zeitschr. Math. Phys. IV, 438.

Geometrie (höhere).

329. *Sur diverses géométries.* Terquem. N. ann. math. XVIII, 445.
330. *Note sur la théorie des polaires réciproques.* Mannheim. N. ann. math. XVIII, 308.
331. *Discussion d'un problème relatif à la construction des coniques.* De Jonquières. N. ann. math. XVIII, 404.
332. *Par une point fixe donné dans le plan d'une conique passe une sécante mobile, trouver le lieu géométrique du point d'intersection des deux normales menées à la conique aux deux points où la sécante coupe la conique.* De Jonquières. N. ann. math. XVIII, 261, 406. [Vergl. No. 123.]

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 264, Krümmungskreis 381.

Geschichte der Mathematik.

333. *Les trois livres de porismes d'Euclide, rétablis pour la première fois d'après la notice et les lemmes de Pappus et conformément au sentiment de R. Simson sur la forme des énoncés de ces propositions.* Chasles. Compt. rend. XLVIII, 1033.
334. Berechnung einiger alten Finsternisse mit Hülfe der Hansen'schen Sonnen- und Mondtafeln. Hartwig. Astr. Nachr. LI, 33.
335. Ueber eine Sternbedeckung in Ptolemäus' Almagest. Encke. Astr. Nachr. LI, 97.
336. *Sur l'origine du mot algorisme d'après Boncompagni.* Chasles. Compt. rend. XLVIII, 1054.
337. Einige Aufgaben aus dem Arabischen des Abraham Aben Ezra. Schnitzler. Zeitschr. Math. Phys. IV, 383.
338. *Recherches sur l'astronomie indienne.* Biot. Compt rend. XLIX, 571.
339. Die Professur des Ramus. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. IV, 314.
340. *Note historique sur les courbes planes.* Terquem. N. ann. math. XVIII, Bulletin de bibl. 72.
341. *Sur le théorème de Tinseau.* Prouhet. N. ann. math. XVIII, Bulletin de bibl. 59.
342. *Bibliographie de la partition des nombres.* Bellavitis. N. ann. math. XVIII, 443.
343. *Sur plusieurs écrits relatifs au comte Jacques Riccati.* Bald. Buoncompagni. N. ann. math. XVIII, Bulletin de bibl. 61.
344. *Lettre autographe de Legendre.* N. ann. math. XVIII, Bulletin de bibl. 49.
345. Necrolog von G. Lejeune-Dirichlet. Tortolini. Annali mat. II, 196.
346. Zum Andenken an Alexander v. Humboldt. Baer. Petersb. Acad. Bull. XVII, 529.
347. Ueber Alexander v. Humboldt. Encke. Berl. Acad. Ber. 1859, 637.
348. *Funérailles de M. Poinsot. Discours de M. Bertrand. — Discours de M. Mathieu.* Journ. Mathém. XXIV, 427.

Gleichungen.

349. *On the theorem that every algebraic equation has a root.* Airy. Phil. Mag. XVIII, 230.
350. *Sketch of a proof of the theorem that every algebraic equation has a root.* Cayley. Phil. Mag. XVIII, 436.
351. *Sur la théorie des équations algébriques.* Michael Roberts. Annali mat. II, 330.
352. *Essai de résolution des équations par les séries et les logarithmes.* Valz. Compt. rend. XLIX, 705.
353. *Approximation to the roots of algebraic equations in a series of aliquot parts.* Korner. Quart. Journ. Math. III, 251.
354. *Sur les limites des racines.* Toussaint. N. ann. math. XVIII, 310. [Vergl. No. 91.]
355. *Sur une limite supérieure du nombre des racines commensurables d'une équation.* De Montebello. N. ann. math. XVIII, 256.
356. *Sur les diviseurs commensurables du second degré.* Prouhet. N. ann. math. XVIII, 257.
357. *Dimostrazione dell' irreduttibilità dell' equazione formata con le radici primitive dell' unità.* Lebesgue. Annali mat. II, 232.
358. *On the theory of groups as depending on the symbolic equation* $\Theta^n = 1$. Cayley. Phil. Mag. XVIII, 34.
359. *Solution abrégée des équations du troisième et du quatrième degré dans un cas particulier.* Montucci. Compt. rend XLIX, 295.
360. Zur Auflösung biquadratischer Gleichungen. Spitz. Grun. Archiv XXXIII, 442.

361 *Observations on the theory of equations of the fifth degree.* Cockle. *Phil. Mag. XVIII*, 50, 342, 508. [Vergl. No. 98.]
362. *Sur la résolution des équations du cinquième degré.* Fergola. *Compt rend. XLIX*, 267.
363. *Solution d'une équation transcendente.* Burat et Bos. *N. ann. math. XVIII*, 282.
364. *Intorno ad una equazione trinomia.* Genocchi. *Annali mat. II*, 253.
365. *Sur l'équation générale du nième degré à deux variables dans laquelle on fait varier un des coefficients.* Woepcke. *Journ. Mathém. XXIV*, 329.
Vergl. Determinanten, Elimination, Functionen 321.

H.

Hydrodynamik.

366. Ergebnisse vergleichender Versuche über den Ausfluss der Luft und des Wassers unter hohem Drucke. Weisbach. Der Civilingenieur, Neue Folge, V. Bd., 1. Heft. — Zeitschr. Math. Phys. IV, 264.

Hyperbel.

367. *Si sur la diagonale d'un rectangee comme corde on décrit un cercle le lieu des extrémités d'un diamètre parallèle à l'autre diagonale est une hyperbole équilatère.* Decharme et Banachiewicz. *N. ann. math. XVIII*, 280.
Vergl. Elliptische Functionen 315.

I.

Imaginäres.

368. *Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires.* Marie. *Journ. Mathém. XXIV*, 305, 360. [Vergl. No. 109.]
Vergl. Exponentialgrösse, Functionen 320, Verwandtschaft.

Irrationalgrössen.

369. Ueber das Rationalmachen des Nenners in Brüchen von der Form
$$\frac{Z}{a_1 + \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} + \ldots + \sqrt{a_n}}.$$ Unferdinger. Grun. Archiv XXXIII, 104.

K.

Kegelschnitte.

370. *On the system of conics having double contact with each other.* Cayley. *Quart. Journ. III*, 246.
371. *Théorème de M. Chasles sur un quadrilatère circonscrit à une conique.* Housel. *N. ann. math. XVIII*, 352.
372. *Intorno alle coniche inscritte in una stessa superficie sviluppabile del quart' ordine (e terza classe).* Cremona. *Annali mat. II*, 201.
Vergl. Ellipse, Geometrie (höhere) 331, Gleichungen 360, Hyperbel, Kreis, Parabel, Quadratur 438, Verwandtschaft.

Kettenbrüche.

373. Ueber die Zähler und Nenner der Näherungswerthe von Kettenbrüchen. Heine. Crelle LVII, 231.
374. Einiges über Kettenbrüche. König. Grun. Archiv XXXIII, 369.
375. Ueber periodische Kettenbrüche. Simon. Grun. Archiv XXXIII, 448.
376. Ueber unendliche Kettenbrüche. S. Spitzer. Grun. Archiv XXXIII, 418.
377. Darstellung des unendlichen Kettenbruches
$$\varphi(x) = n(2x+1) + \cfrac{m}{n(2x+3) + \cfrac{m}{n(2x+5) + \ldots}}$$
in geschlossener Form. S. Spitzer. Grun. Archiv XXXIII, 474.

Kreis.

378. Ueber den Kreis, der durch die Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise bestimmt ist. Noeggerath. Grun. Archiv XXXIII, 329.
379. *Cercle de neuf points.* Pujet et Françoise. *N. ann. math. XVIII*, 359.

380. *Des relations qui existent entre les rayons des huit cercles tangents à trois autres et entre les rayons des seize sphères tangentes à quatre autres.* **Mention.** *N. ann. math. XVIII*, 438. [Vergl. No. 128.]
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 249.

Krümmungskreis.

381 *Construction du centre de courbure de l'épicycloïde.* **Mannheim.** *N. ann. math. XVIII*, 371.
382. Ueber die Krümmung der Flächen. **Bacaloglo.** Zeitschr. Math. Phys. IV, 312.
383. *Sur la courbure des surfaces.* **Babinet.** *Compt. rend. XLIX*, 418.
384. *Sur la courbure d'une série de surfaces et de lignes.* **Hirst.** *Annali mat. II*, 148. [Vergl. No. 137.]
385. *Note de géométrie infinitésimale.* **Mannheim.** *Annali mat. II*, 208. [Vergl. Bd. IV, No. 389.]
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 251.

Krümmungslinien.

386. *Sur les lignes de courbure de la surface des ondes.* **Combescure.** *Annali mat. II*, 278. — **Brioschi.** *ibid* 285.
387. Einige Bemerkungen über die von den Krümmungslinien auf dem Ellipsoid gebildeten Vierecke. **Plagemann.** Grun. Archiv XXXIII, 390.

L.

Logarithmen.

388. *Sur la série logarithmique d'***Euler.** *N. ann. math. XVIII*, 362. [Vergl. No. 65.]
Vergl. Gleichungen 352.

M.

Maxima und Minima.

389. *Deux théorèmes de maximums arithmologiques.* **Oettinger.** *N. ann. math. XVIII*, 442.
390. *Sur une ligne droite satisfaisant à une condition de minimum.* **Jaufroid.** *N. ann. math. XVIII*, 376.
391. *Influence maximum des erreurs dans la mesure des trois côtés d'un triangle sur les angles.* *N. ann. math. XVIII*, 277.
Vergl. Oberflächen 414.

Mechanik.

392. *Percussion d'un corps animé par des forces quelconques.* **Poinsot.** *Journ. Mathém. XXIV*, 421.
393. *Sur la manière de ramener à la dynamique des corps libres celle des corps que l'on suppose gênés par des obstacles fixes.* **Poinsot.** *Compt. rend. XLIX*, 5.
394. *Sur la quantité de mouvement qui est transmise à un corps par le choc d'un point massif qui vient le frapper dans une direction donnée.* **Poinsot.** *Compt. rend. XLVIII*, 1127. — *Phil. Mag. XVIII*, 211. [Vergl. No. 149.]
395. Ueber die Bewegung eines schweren Punktes auf einer vertical stehenden Plancurve. **Schlömilch.** Zeitschr. Math. Phys. IV, 300
396. Zur Bestimmung des Querschnitts eines Körpers, dessen absolute Festigkeit in Anspruch genommen wird. **Zetzsche.** Zeitschr. Math. Phys. IV, 341.
397. Ueber eine Aufgabe aus der analytischen Mechanik. **Bacaloglo.** Zeitschr. Math. Phys. IV, 309.
398. Einige Theoreme der Mechanik. **Dahlander.** Zeitschr. Math. Phys. IV, 443.
399. *Travail dans la poulie mobile.* **Buch.** *N. ann. math. XVIII*, 363.
400. *Sur l'influence du mouvement de la rotation de la terre.* **Perrot.** *Compt. rend. XLIX*, 637. — **Babinet.** *ibid.* 638, 659, 686, 769. — **Bertrand.** *ibid.* 658, 685, 692. — **Delaunay.** *ibid.* 688. — **Picbert.** *ibid.* 693.
401. Ueber die Berechnung der Steighöhe der Raketen. **Kahl.** Zeitschr. Math. Phys. IV, 279.
402. *Mouvement des gaz de la poudre dans l'âme des bouches à feu.* **Picbert.** *Compt. rend. XLIX*, 757, 829, 909, 953.
403. Theorie der circularpolarisirenden Medien. **Clebsch.** Crelle LVII, 317.
404. *Sopra alcune proprietà della propagazione della corrente elettrica nei fili telegrafici dedotte dalla teoria di* **Ohm.** **Keller.** *Annali mat. II*, 305.

405. Ueber eine Umgestaltung der Ampère'schen Formel. Roch. Zeitschr. Math. Phys. IV, 295.
406. Ueber magnetische Momente. Roch. Zeitschr. Math. Phys. IV, 375.
407. Ueber Magnetismus. Roch. Zeitschr. Math. Phys. IV, 415.
Vergl. Attraction, Determinanten in geometrischer Anwendung 202, Differentialgleichungen 297, Elasticität, Functionen 323, Hydrodynamik, Schwerpunkt, Trägheitsmoment.

Methode der kleinsten Quadrate.

408. Ueber die Bestimmung der drei Gleichungen, welche dienen, aus gemachten Ablesungen am Limbus eines Winkelinstrumentes die Excentricität desselben zu berechnen. Andres. Grun. Archiv XXXIII, 95.

Mittelgrössen.

409. *Moyennes géométriques, arithmetiques, harmoniques. Schloemilch. N. ann. math. XVIII*, 353. [Vergl. Bd. IV, No. 173.]
Vergl. Bestimmte Integrale 278.

Modulargleichungen.

410. *Sur la théorie des équations modulaires. Hermite. Compt. rend. XLVIII*, 1079, 1095, *XLIX*, 16, 110, 141. [Vergl. No. 157.]

N.

Normale.

Vergl. Geometrie (höhere) 332.

O.

Oberflächen.

411. Ueber die Gleichung der Berührungsebene an eine Fläche. Baur. Zeitschr. Math. Phys. IV, 369.
412. Ueber den Grad der abwickelbaren Fläche, die einer Fläche $m$ter Ordnung doppelt umschrieben ist. Bischoff. Crelle LVII, 278
413. *Sur la surface qui est l'enveloppe des plans conduits par les points d'un ellipsoide perpendiculairement aux rayons menés par le centre. Cayley Annali mat. II*, 168.
414. *Note sur une classe particulière de surfaces à aire minima. Lamarle. Journ. Mathém. XXIV*, 241.
415. *On derived surfaces. Hirst. Quart. Journ. Math. III*, 210.
416. *Note on the Cartesian equation to the wave-surface. Tait. Quart. Journ. Math. III*, 269.
417. *On cones of the third order. Cayley. Phil. Mag. XVIII*, 430.
418. *Mémoire sur la figure de la terre considérée comme peu différent d'une sphère. Ossian Bonnet. Annali mat. II*, 180. [Vergl. No. 164]
Vergl. Carthographie, Krümmungskreis 382, 383, 384, Krümmungslinien 386.

Oberflächen zweiten Grades.

419. *Sur des surfaces du second ordre, qui passent par une conique et coupent un plan. Chabirand. N. ann. math. XVIII*, 248.
420. *Déterminer le lieu géométrique des milieux des cordes d'une surface du second degré qui passe par un point donné. Gérono. N. ann. math. XVIII*, 305.
421. Eine Eigenschaft der conjugirten Diametralebenen des Ellipsoids. Dahlander. Zeitschr. Math. Phys. IV, 437.
422. *Equations les plus simples des hyperboloides à une nappe et a deux nappes. Gérono. N. ann. math. XVIII*, 393.
423. *Condition pour que deux génératrices rectilignes de l'hyperboloide* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ *se coupent sous un angle droit. Gerono. N. ann. math. XVIII*, 343.
424. *Les hauteus d'un tetraèdre sont les génératrices d'un même hyperboloide à une nappe. Bellac. N. ann. math. XVIII*, 350.
425. *Théorème sur un hyperboloide de révolution. Chardonnet. N. ann. math. XVIII*, 339.
Vergl. Krümmungslinien 387.

Operationscalcül.

426. *On a theorem in the calculus of operations. Walton. Quart. Journ. III*, 278.

P.

Parabel.

Vergl. Quadratur 440.

Partialbrüche.

427. *Sur la décomposition des fractions rationelles et la théorie des résidus.* Rouché. *Compt. rend. XLIX*, 863.
428. *Sur la décomposition des fractions rationelles.* *Vielle.* *Compt. rend. XLIX*, 746. [Vergl. Bd. IV, No. 191.]
429. *Décomposition d'une fraction rationelle irréductible d'une certaine forme.* *Gérono.* *N. ann. math. XVIII*, 346.

Perspective.

430. Elementare Theorie der axonometrischen Projection. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. IV, 361.
431. Zur Axonometrie. Mann. Zeitschr. Math. Phys. IV, 284.

Planimetrie.

432. Zur Lehre vom Dreieck. Unferdinger. Grun. Archiv XXXIII, 420.
433. *Les projections du sommet d'un triangle rectiligne sur les quatre bissectrices des deux autres angles sont en ligne droite.* *Vigne.* *N. ann. math. XVIII*, 265.

Q.

Quadratische Form.

434. Ueber die Anzahl der verschiedenen Klassen quadratischer Formen von negativer Determinante. Kronecker. Crelle LVII, 248.
435. *Sur le résultant des trois formes quadratiques ternaires.* *Hermite.* Crelle LVII, 371.
436. *De la composition des formes binaires du second degré.* *Lejeune-Dirichlet.* *Journ. Mathém. XXIV*, 389.
437. *Théorèmes relatifs aux formes binaires quadratiques qui représentent les mêmes nombres.* *Schering.* *Journ. Mathém. XXIV*, 253.

Quadratur.

438. Quadratur sämmtlicher Kegelschnitte. Voeller. Grun. Archiv XXXIII, 433. [Vergl. Bd. IV, No. 248.]
439. Beweis des Völler'schen Satzes. Baur. Zeitschr. Math. Phys. IV, 366. [Vergl. No. 190.]
440. *Demonstratio theorematis Lambertini de sectoribus parabolicis quadrandis.* *Lindman.* Grun. Archiv XXXIII, 478.
441. Zu der Quadratur der Epicycloide und der Hypocycloide. Baur. Zeitschr. Math. Phys. IV, 311.

Vergl. Geschichte der Mathematik, Mechanik.

Quadratwurzel.

Vergl. Kettenbrüche 375, Tabellen.

R.

Rectification.

442. *Théorème sur les roulettes.* *P. Serret.* *N. ann. math. XVIII*, 341.

Vergl. Elliptische Functionen 315.

Reihen.

443. *Notes on certain infinite series.* *Grea.* *Quart. Journ. Math. III*, 262.
444. *Remarques sur quelques séries.* *Le Besgue.* *N. ann. math. XVIII*, 433, 460.
445. $\frac{1}{1.2.3\ldots n}+\frac{1}{2.3\ldots(n+1)}+\frac{1}{3.4\ldots(n+2)}+\ldots=\frac{1}{(n-1).1.2.3\ldots(n-1)}$. *Boutery.* *N. ann. math. XVIII*, 242. — *De Virieu.* *ibid.* 273.

Vergl. Factorielle, Gammafunctionen 325, Gleichungen 352, 353, Logarithmen, Taylor'sche Reihe.

S.

Schwerpunkt.

Vergl. Cubatur.

Sphärik.

446. *Détermination du centre et du rayon de la sphère représentée par une certain équation. Gérono. N. ann. math. XVIII,* 346.
447. *Si dans un triangle sphèrique on donne un angle compris entre deux côtés variables, mais dont la somme des tangentes est constante le lieu de la rencontre des trois hauteus dans chaque triangle est une circonférence de grand cercle. Challiot. N. ann. math. XVIII,* 336.
448. *Etant donné un angle formé par deux grands cercles et un point, mener par ce point un troisième cercle qui forme avec les deux autres un triangle sphérique de surface donnée. Chanson. N. ann. math. XVIII,* 335.
449. *On the employment of the gnomonic projection of the sphere in Crystallography. Miller. Phil. Mag. XVIII,* 37.

Vergl. Trigonometrie 462, 463, 464.

Stereometrie.

450. *Théorèmes sur la tétraèdre. De Staudt. N. ann. math. XVIII,* 441.
451. *Section du tore par un plan tangent à cette surface et passant par son centre. N. ann. math. XVIII,* 258.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 265, Cubatur.

T.

Tabelle.

452. Construction einer compendiösen Tafel der reciproken Werthe zur Erleichterung sehr exacter Rechnungen. Lehmann. Astr. Nachr. LII, 1.

Vergl. Wahrscheinlichkeitsrechnung 467, 468.

Taylor'sche Reihe.

453. Neue Restbestimmung der Taylor'schen Reihe. Winckler. Zeitschr. Math. Phys. IV, 291. — *Annali mat II,* 185.

Trägheitsmoment.

454. Ueber die elementare Bestimmung der Trägheitsmomente. Zehme. Zeitschr. Math. Phys. IV, 445.

Trigonometrie.

455. Ueber einige goniometrische Formeln, Wiegers. Grun. Archiv XXXIII, 338.
456. *Généralité des formules pour* $\sin(a+b)$ *et* $\cos(a+b)$. *Spitz. N. ann. math. XVIII,* 430. [Vergl. No. 222.]
457. Einfache Begründung der ebenen Trigonometrie. Unferdinger. Grun. Archiv XXXIII, 429.
458. *Expression mnémonique de l'aire du triangle rectiligne. Sacchi. N. ann. math. XVIII,* 247.
459. Das pythagoräische Dreieck. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. IV, 306.
460. *A quelles conditions doivent satisfaire les côtés et les angles d'un parallelogramme pour qu'il soit possible d'inscrire un carré dans ce parallelogramme. Murent. N. ann. math. XVIII,* 451.
461. *Essai sur le problème de Fuss. Mention. Bull. Acad. Petersb. I,* 15, 33.
462. Das sphärische Dreieck dargestellt in seinen Beziehungen zum Kreis. Unferdinger. Grun. Archiv XXXIII, 14.
463. Das sphärische Dreieck mit seinem Sehnendreiecke verglichen. Unferdinger. Grun. Archiv XXXIII, 89.
464. Ueber die Vergleichung sphärischer Dreiecke, deren Seiten gegen den Halbmesser der Kugel, auf welcher sie liegen, sehr klein sind, mit ebenen Dreiecken von gleichen Seiten. Grunert. Astr. Nachr. LII, 49.

Vergl. Maxima und Minima 391.

V.

Variationsrechnung.

465. *Sur les équations différentielles du calcul des variations. Richelot. Compt. rend. XLIX,* 641. — *Annali mat. II,* 333.

Verwandtschaft.

466. Die Brennpunkte eines Kegelschnittes als solche Punkte der Ebene aufgefasst, in welchen je zwei entsprechende Punkte zweier kreisverwandten Systeme vereinigt sind. Siebeck. Grun. Archiv XXXIII, 462.

W.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

467. *On a test for ascertaining whether an observed degree of uniformity or the reverse in Tables of Statistics is to be looked upon as remarkable.* *Campbell.* *Phil. Mag. XVIII*, 359.
468. *On the construction of life-tables.* *Farr.* *Phil. Mag. XVIII*, 467.
469. *Sur la probabilité des hypothèses d'après les évènements.* *Ostrogradskk.* *Petersb. Acad. Bull. XVII*, 516.

Vergl. Methode der kleinsten Quadrate.

Z.

Zahlentheorie.

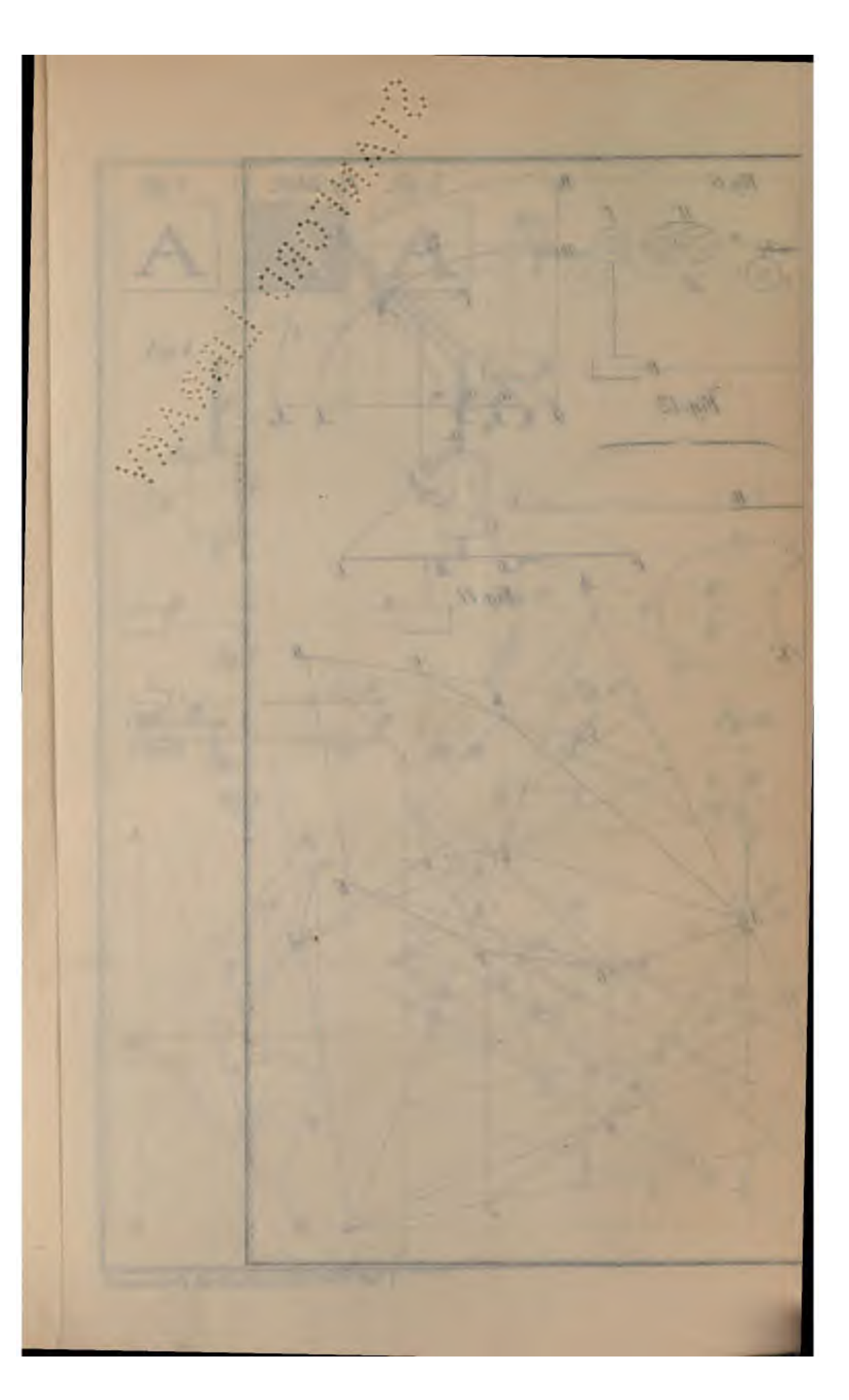
470. *Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres.* *Liouville.* *Journ. Mathém. XXIV*, 281.
471. *Sur la première démonstration donnée par Gauss de la loi de réciprocité dans la théorie des résidus quadratiques.* *Lejeune-Dirichlet.* *Journ. Mathém. XXIV*, 401.
472. *Sur le caractère biquadratique du nombre 2.* *Dirichlet.* *Journ. Mathém. XXIV*, 367. [Vergl. No. 244.]
473. *On a theorem in numbers.* *Lanavicensis.* *Phil. Mag. XVIII*, 281.
474. Ueber eine Eigenschaft der geometrischen Progression 1, 3, 9, 27. Unferdinger. Grun. Archiv XXXIII, 106.
475. *Théorème arithmétique.* *Liouville.* *Journ. Mathém. XXIV*, 271.
476. *Nombre de solutions d'une congruence du premier degré à plusieurs inconnues.* *Lebesgue.* *Journ. Mathém. XXIV*, 366.
477. Zerlegung der Gleichung $x^2 - fgy^2 = \pm 1$ in Factoren. Koenig. Grun. Archiv XXXIII, 1.
478. Allgemeinste Auflösung der Gleichung $x^3 + y^3 = z^2$ in relativen Primzahlen. Hoppe. Zeitschr. Math. Phys. IV, 304.
479. Ueber die Auflösung der Gleichung $x^3 + y^3 = x - y$ in relativen Zahlen. Hoppe. Zeitschr. Math. Phys. IV, 359.
480. *Recherches nouvelles sur les nombres premiers.* *De Polignac.* *Compt. rend. XLIX*, 350, 386, 624, 724.
481. Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. Riemann. Berl. Acad. Ber. 1859, 671.
482. Zerfällung der Primzahlen innerhalb des ersten Tausend in ihre aus siebenten Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Primfactoren. Reuschle. Berl. Acad. Ber. 1859, 694.
483. *Théorème concernant les nombres premiers de la form* $24\mu + 7$. *Liouville.* *Journ. Mathém. XXIV*, 399.
484. *Sulla partizione dei numeri, e sul numero degli invarianti.* *Bellavitis.* *Annali mat. II*, 137.
485. *Note on a theorem of M. Bellavitis on the partition of numbers.* *Lanavicensis.* *Phil. Mag. XVIII*, 283.

Vergl. Decimalbrüche, Figurirte Zahlen, Geschichte der Mathematik 342, Maxima und Minima 389, Quadratische Formen, Trigonometrie 459.

Zinseszinsrechnung.

486. *Note sur les intérêts instantanés.* *Terquem.* *N. ann. math. XVIII*, 334.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

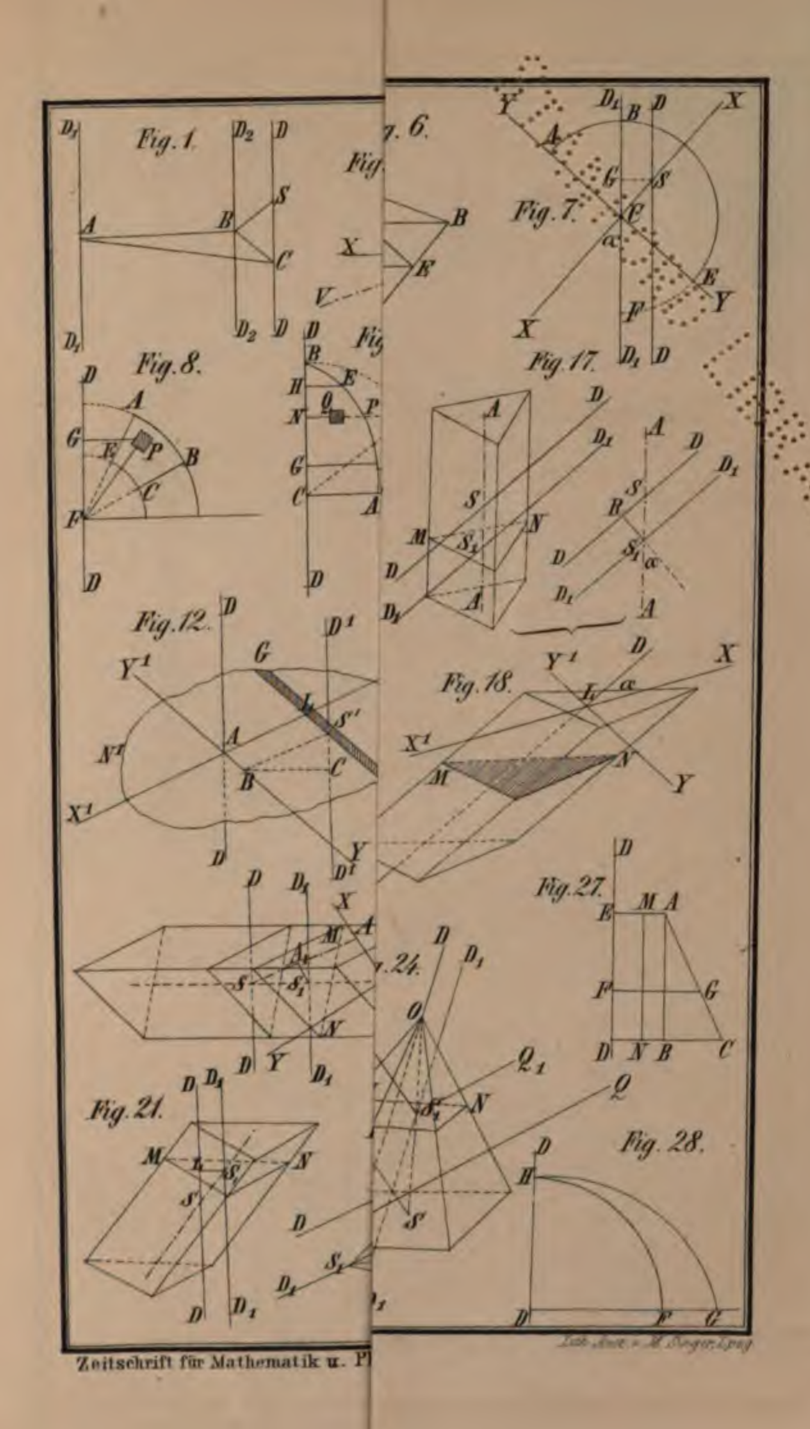






Zeit





Lith. Anst. v. M. Singer, Lpzg.





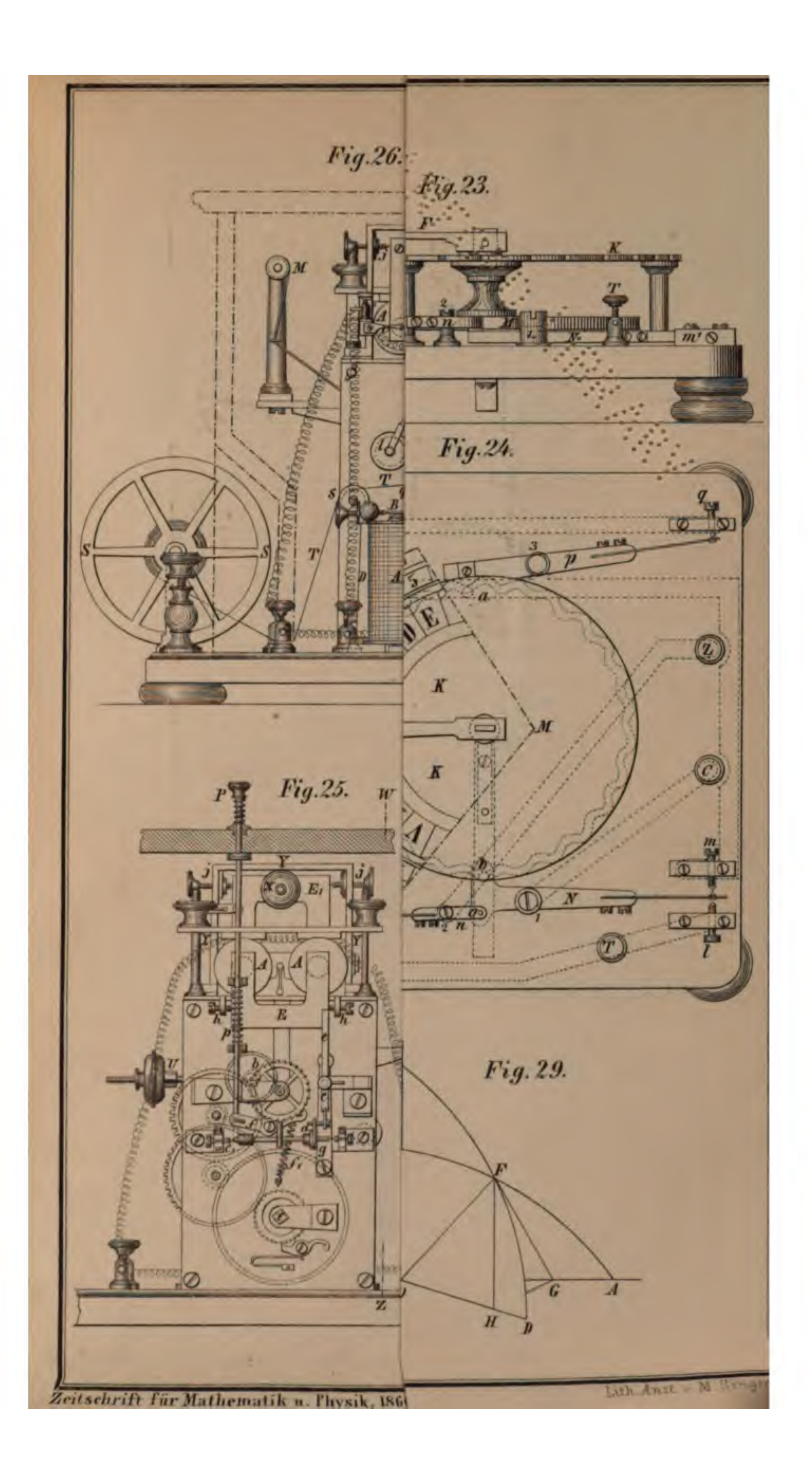

Fig. 9
Fig. 10











Lith. Anst. v. M. Senger



